Capítulo 4

Transformada de Fourier

Sumario. Definición y propiedades básicas. Transformada de Fourier inversa. Relación con la transformada de Laplace. Aplicación a las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.

4.1. Definición y primeros ejemplos

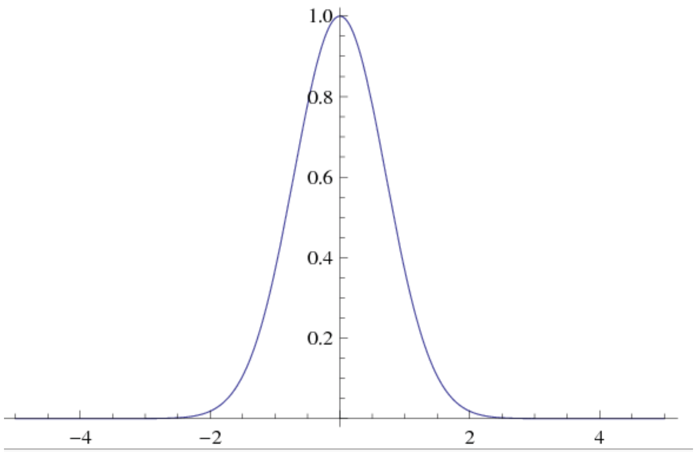
Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se define la transformada de Fourier de f como

$$\mathcal{F}[f](z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt$$

en todo z donde la expresión anterior tenga sentido, es decir la integral impropia anterior sea convergente. Esta convergencia es más difícil de verificar que en el caso de la transformada de Laplace. Supongamos por ejemplo que t y z son reales, por o que $e^{-itz} = \cos(tz) - i\sin(tz)$, que como sabemos tiene módulo 1. Si $f(t)$ es también real, para garantizar la convergencia absoluta de la integral anterior debe de satisfacerse que

$$\lim_{t\to\pm\infty} |f(t)e^{-itz}| = \lim_{t\to\pm\infty} |f(t)| = 0,$$

por lo que las funciones reales que tendrán transformada de Fourier tienen que tener una gráfica como la siguiente



o bien ser nulas fuera de un intervalo compacto $[a,b]$. Veamos algunos ejemplos.

Consideramos la función $f(t)=h_{-a}(t)-h_a(t)$, donde $h_a(t)$ es la función de Heaviside en $a\in\mathbb{R}$. Como vemos f es no nula con valor uno en el intervalo $[-a,a)$. Su transformada de Fourier se calcula como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt = \int_{-a}^{a} e^{-itz}dt \\ &= \left[\frac{e^{-itz}}{-iz}\right]_{-a}^{a} = \frac{-1}{iz}\left(e^{-iaz}-e^{iaz}\right) = \frac{2}{z}\sin(az).\end{aligned}$$

Tomemos ahora la función $f(t)=e^{-|t|}$. Su transformada de Fourier vendrá dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-itz}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-itz}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-iz)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+iz)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{(1-iz)t}}{1-iz}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(1+iz)t}}{1+iz}\right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{1-iz}+\frac{1}{1+iz} = \frac{2}{z^2+1}.\end{aligned}$$

4.2. Propiedades básicas

Al igual que la transformada de Laplace, la transformada de Fourier tiene unas propiedades básicas que permiten operar con ella con más facilidad. Las enumeramos a continuación suponiendo siempre buenas condiciones de convergencia de las funciones implicadas.

4.2.1. Linealidad

Dadas dos funciones f y g y dos números α, β se verifica que

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](z) = \alpha \mathcal{F}[f](z) + \beta \mathcal{F}[g](z).$$

La prueba de esta propiedad viene directamente de la linealidad de la integral de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha f + \beta g](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f + \beta g)(t) e^{-itz} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itz} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-itz} dt \\ &= \alpha \mathcal{F}[f](z) + \beta \mathcal{F}[g](z). \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $f(t) = h_{-a}(t) - h_a(t) + e^{-|t|}$, su transformada de Fourier vendrá dada por

$$\mathcal{F}[f](z) = \mathcal{F}[f_1](z) + \mathcal{F}[f_2](z) = \frac{2}{z} \sin(az) + \frac{2}{z^2+1},$$

siendo $f_1(t) = h_{-a}(t) - h_a(t)$ y $f_2(t) = e^{-|t|}$.

La linealidad no puede aplicarse al calculo de f_1 del siguiente modo

$$\mathcal{F}[f_1](z) = \mathcal{F}[h_{-a}](z) - \mathcal{F}[h_a](z)$$

ya que las funciones h_{-a} y h_a no tienen transformada de Fourier.

4.2.2. Transformada de la derivada

Dada una función derivable a trozos, se tiene que

$$\mathcal{F}[f'](z) = iz\mathcal{F}[f](z).$$

La demostración se hace con la fórmula de integración por partes del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-itz} dt = \left\{ \begin{array}{cc} u = e^{-izt} & du = -ize^{-iz} dt \\ dv = f'(t) & v = f(t) \end{array} \right\} \\ &= \left[f(t) e^{-izt} \right]_{-\infty}^{\infty} + iz \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itz} dt = iz\mathcal{F}[f](z), \end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{t \to \pm\infty} |f(t) e^{-izt}| = 0$$

para garantizar la convergencia.

En general, puede comprobarse que la derivada n–ésima se calcula como

$$\mathcal{F}[f^{n)}](z) = (iz)^n \mathcal{F}[f](z).$$

Esta fórmula, junto con la linealidad, tiene, al igual que ocurría con la transformada de Laplace, utilidad potencial para la resolución de ecuaciones diferenciales.

4.2.3. Cambios de escala

Sea f una función y a un número real. Podemos calcular la transformada de Fourier de la función $g(t) = f(at)$, que puede verse como un cambio de escala en t, con la fórmula

$$\mathcal{F}[g](z) = \mathcal{F}[f(at)](z) = \frac{1}{a}\mathcal{F}[g](z/a).$$

Esta fórmula es consecuencia del cambio de variable en la integral ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](z) &= \mathcal{F}[f(at)](z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-izt}dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} at = s \\ adt = ds \end{array} \right\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-izs/a}ds = \frac{1}{a}\mathcal{F}[f](z/a)
\end{aligned}$$

A modo de ejemplo, si suponemos que $f(t) = e^{-b|t|}$ con $b > 0$, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](z) &= \mathcal{F}[e^{-b|t|}](z) = \mathcal{F}[e^{-|bt|}](z) \\
&= \frac{1}{b}\mathcal{F}[e^{-|t|}](z/b) = \frac{1}{b}\frac{2}{z^2/b^2 + 1} = \frac{2b}{z^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

4.2.4. Derivada de la transformada

La fórmula para calcular la derivada de la trasnforma de Fourier de una función es

$$i\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z) = \mathcal{F}[tf(t)](z).$$

Esta relación es consecuencia de un cambio de orden en el cálculo de límites ya que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z) &= \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt = (*) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}f(t)e^{-itz}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-itz}dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-itz}dt = -i\mathcal{F}[tf(t)](z).
\end{aligned}$$

Vamos a aplicar esta fórmula al cálculo de la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-t^2/2}$. En primer lugar, la función $f(t)$ verifica el problema de condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{c} f'(t) = -tf(t), \\ f(0) = 1. \end{array} \right.$$

Por otra parte, transformando la ecuación anterior tenemos que

$$iz\mathcal{F}[f](z) = -\mathcal{F}[tf(t)](z) = -i\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z),$$

por lo que $\mathcal{F}[f](z)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z) = -z\mathcal{F}[f](z),$$

que tiene por solución

$$\mathcal{F}[f](z) = ce^{-z^2/2}.$$

Por otra parte, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

tenemos que mediante un cambio de variable

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

y por tanto

$$\mathcal{F}[f](0) = c = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi},$$

por lo que

$$\mathcal{F}[f](z) = \sqrt{2\pi} e^{-z^2/2},$$

es decir, la transformada de Fourier de $e^{-t^2/2}$ es ella misma salvo el factor multiplicativo $\sqrt{2\pi}$.

4.2.5. Convolución

Dadas dos funciones f y g con transformadas de Fourier $\mathcal{F}[f]$ y $\mathcal{F}[g]$, no se verifica que $\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$. Vamos a buscar qué función h verificaría que $\mathcal{F}[h] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$, es decir, cómo puede definirse h a partir de las funciones iniciales f y g. Para ello calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-izt} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-izs} ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(s) e^{-iz(t+s)} dt ds \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t + s = x \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) e^{-izx} dx ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds \right] e^{-izx} dx,
\end{aligned}$$

por lo que hemos derivado formalmente[1] que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds,$$

que se conoce con el nombre de producto de convolución, denotado por

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds.$$

Como veremos, esta fórmula tiene aplicaciones en la resolución de diferentes ecuaciones diferenciales.

[1] Auí hemos hecho un cambio en la integración, es decir, una permuta de límites de la que no hemos probado su validez.

4.3. Transformada de Fourier inversa

Dada una función f sabemos cómo obtener su transformada de Fourier de dicha función $\mathcal{F}[f]$. Ahora bien, como en el caso de la transformada de Laplace a veces es necesario recorrer el camino inverso, es decir, dada una función $F(z)$, ¿es posible encontrar una función real f tal que $\mathcal{F}[f] = F$. En términos de función inversa sería la relación $f = \mathcal{F}^{-1}[F]$, donde $\mathcal{F}^{-1}[F]$ denota la transformada inversa de Fourier.

Al tratarse de una transformda integral, no existirá una única función verificando ser la transformada inversa de $F(z)$. Sin embargo, en general la fórmula de inversión establece que para una función suficientemente buena la relación

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](z)e^{izt}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-izt}dte^{izt}dz \tag{4.1}$$

se verifica por lo que la transformada inversa de Fourier podría definirse como

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)e^{izt}dz.$$

En particular, las condiciones de Dirichlet establecen que si se verifica que

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$,
- f tiene un múero finito de extremos relativos y un número finito de discontinuidades, todas ellas evitables, en cada subintervalo compacto de la recta real,

entonces la fórmula (4.1) se verifica en todos los puntos de continuidad de f. En los puntos de discontinuidad x la integral valdría el promedio de $f(x+)$ y $f(x-)$.

Así, por ejemplo, dada la función

$$F(z) = \frac{2b}{z^2 + b^2}$$

se verifica que

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = e^{b|t|},\ b > 0.$$

Por tratarse de una fórmula integral, dicha función hereda las propiedades de la integración, en particular la linealidad

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F + \beta G](t) = \alpha\mathcal{F}^{-1}[F](t) + \beta\mathcal{F}^{-1}[G](t).$$

4.4. Relación con la transformada de Laplace

Como sabemos, la transformada de Laplace de una función $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ se define como

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt,$$

que tendrá validez en un dominio de definición dado por $\operatorname{Re} z > \alpha$ para algún a real. Si $a < 0$, el eje imaginario estará contenido en el dominio de definición de la transformada de Laplace de f. En particular, la integral

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,\ \omega \in \mathbb{R},$$

tendrá sentido al ser finita.

Si consideramos $f(x) = 0$ definida como para todo $x \leq 0$, podemos calcular su transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}[f](z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-izt}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-izt}dt,$$

integral que tendrá sentido para todo $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, se tendría la igualdad

$$\mathcal{L}[f](i\omega) = \mathcal{F}[f](\omega), \ \omega \in \mathbb{R}.$$

Consideremos por ejemplo la función $f(t) = e^{-t}$, que como sabemos tiene transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{z+1}$$

para todo z tal que $\operatorname{Re} z > -1$. Si estendemos f como nula en valores negativos, es decir, definimos $g(t) = f(t)h_0(t)$ siendo $h_0(t)$ la función de Heaviside, tendremos para todo número real ω que

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{L}[f](i\omega) = \frac{1}{i\omega + 1}.$$

4.4.1. Aplicación a los sistemas estables

Si tenemos un sistema asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$, sabemos que su respuesta a una señal sinusuidal de la forma

$$A\sin(\omega t + \phi)$$

viene dada por la expresión

$$x(t) = A|T(i\omega)| \sin(\omega t + \phi + \arg T(i\omega)),$$

pero $T(i\omega)$ es la transformada de Fourier. Esta función $T(i\omega)$ se conoce como función de transferencia de frecuencias del sistema. En particular, para sistemas estables estos pueden verse como

$$\mathcal{F}[y](\omega) = T(i\omega)\mathcal{F}[f](\omega)$$

que relaciona la transformada de Fourier de la salida $\mathcal{F}[y](\omega)$ con la de la entrada $\mathcal{F}[f](\omega)$.

4.5. Aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales

Consideremos la ecuación del calor en una barra infinita

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como vemos no hay condiciones de frontera y por tanto sólo existen condiciones iniciales. Para resolver dicho problema tomamos la transformada de Fourier de la función $u(t,x)$, para cada valor fijo del tiempo t, es decir

$$\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-ixz}dx.$$

Entonces
$$\mathcal{F}[u_{xx}(t,\cdot)](z) = -z^2\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z),$$
y por la fórmula de derivación bajo el signo de la integral
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u_t(t,\cdot)](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)e^{-ixz}dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-ixz}dx = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z),\end{aligned}$$
por lo que la ecuanción $u_t = u_{xx}$ se transforma en
$$-z^2\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z).$$
La condición incial se transforma en
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(0,\cdot)](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)e^{-ixz}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixz}dx = \mathcal{F}[f](z),\end{aligned}$$
por lo que tenemos el problema de condiciones iniciales
$$\begin{cases} -z^2\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z), \ t>0, \\ \mathcal{F}[u(0,\cdot)](z) = \mathcal{F}[f](z), \end{cases}$$
que como sabemos del cálculo de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene por solución
$$\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \mathcal{F}[f](z)e^{-z^2t}.$$
La solución de la ecuación la escribimos formalmente como
$$\begin{aligned}u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](z)e^{-z^2t}](x) = f(x)*\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](s)ds.\end{aligned}$$
Calculamos entonces $\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](x)$ teniendo en cuenta que
$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](z) = \sqrt{2\pi}e^{-z^2/2}.$$
Partiendo de esta expresión y haciendo el cambio de escala $y = x/\sqrt{2t}$ tenemos que
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-y^2/2}](z) &= \mathcal{F}[e^{-x^2/2t}](z) = \sqrt{2t}\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](z\sqrt{2t}) \\ &= \sqrt{2t}\sqrt{2\pi}e^{-(z\sqrt{2t})^2/2} = 2\sqrt{\pi t}e^{-tz^2},\end{aligned}$$
por lo que
$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/2t}.$$
Entonces
$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-s^2/2t}ds$$

4.6. Ejercicios

1. Encontrar la transformada de Fourier de las siguientes funciones ($a > 0$):

   a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \pi/2, \\ 0 & |x| \geq \pi/2. \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} x & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} a - |x| & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

2. Calcular la convolución $f * f$ es los siguientes casos ($a > 0$):

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   b) $f(x) = e^{-|x|}$.

3. Calcular la transformada de Fourier inversa de la función $F(z) = e^{-z^2}/(1+z^2)$.

4. Si $g(t) = f(t-a)$, demostrar la fórmula

$$\mathcal{F}[g](z) = e^{-iza}\mathcal{F}[f](z).$$

5. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   donde:

   a) $f(x) = e^{-ax^2}$.

   b) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   c) $f(x) = h_0(x)$ siendo h_0 la función de Heaviside.

6. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + au_x, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

7. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,1) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$