Capítulo 3

Ecuaciones en derivadas parciales

Sumario. Definiciones básicas. Ecuaciones lineales de segundo orden: clasificación. Método de separación de variables. Series de Fourier. Resolución de las ecuaciones canónicas: calor, ondas y Laplace.

3.1. Introducción a las EDP

Por una ecuación en derivadas parciales entederemos una expresión de la forma

$$F(y_1, ...y_n, u, u_{y_1}, ...u_{y_n}, ...u_{y_{i_1}...y_{i_k}}) = 0,$$

donde $y_1, ..., y_n$ son n variables independientes, $u = u(y_1, ..., y_n)$ es una variable dependiente (incógnita de la ecuación) y $u_{y_{i_1}...y_{ij}}$ son las derivadas parciales de u de orden j, $1 \leq j \leq k$, respecto de las variables $y_{i_1}...y_{ij}$. La derivada de mayor orden indica el orden de la ecuación. Por ejemplo

$$u + u_x + u_y = 0$$

es una ecuación de orden uno, mientras que

$$y - u_x + u \cdot u_{xy} = xu$$

es una ecuación de orden dos, que será el orden máximo que estdiaremos en este curso.

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) se utilizan para modelar procesos que además de tener una variación temporal, tienen una variación de tipo espacial. Ejemplos conocidos son la variación de calor con el tiempo en un sólido, la distribución de poblaciones en un cierto habitat o la propagación del sonido de las cuerdas de una guitarra.

En general, las EDP van a ser bastante difíciles de resolver. De hecho, no existe un teorema de existencia y unicidad "sencilloçomo el que se estudiaba para problemas de condiciones iniciales de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por todo ello, las EDP son fuente de estudio en la actualidad para muchos matemáticos siendo una de las áreas de la matemáticas con mayor investigación en la actualidad.

Como ocurre con las ecuaciones diferenciales, normalmente se suelen asociar varios tipos de condiciones a una EDP. Según se trate, hablaremos de ellas como condiciones iniciales o condiciones de contorno. Consideremos por ejemplo el problema siguiente

$$\begin{cases} u_t = u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,1), \\ u_t(0,y) = f(y), \ y \in [0,1], \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \ t \geq 0, \end{cases}$$

que, como veremos posteriormente modela la varición temperatura u de una varilla unidimensional de longitud 1 a lo largo del tiempo. La ecuación de segundo orden $u_t = u_{yy}^2$ se conoce como ecuación del calor, que en este problema tiene asociados dos tipos de condiciones. La condición $u_t(0,y) = f(y)$ establece la temperatura inicial de la varilla para todo punto de ésta $y \in [0,1]$, por lo que hablamos de ella como una condición inicial. Sin embargo, la condición $u(t,0) = u(t,1) = 0$ nos indica que los valores de la temperatura en los extremos de la varilla son fijos para cada instante de tiempo. Estas condiciones se llaman de frontera o contorno.

3.2. Ecuaciones lineales de orden 2

Una ecuación lineal de segundo orden es de la forma

$$a(t,y)u_{tt} + b(t,y)u_{ty} + c(t,y)u_{yy} + d(t,y)u_t + e(t,y)u_y + f(t,y)u = g(t,y), \tag{3.1}$$

donde $a, b, c, d, e, f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones de regularidad suficiente para cada problema que vayamos a estudiar. Es fácil comprobar que si $u_1(t,y)$ y $u_2(t,y)$ son soluciones de (3.1), entonces una combinación lineal de ellas

$$\alpha u_1(t,y) + \beta u_2(t,y),$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es también solución de la ecuación, por lo que ésta recibe el calificativo de lineal. Dicha ecuación se dirá de coeficientes constantes si las funciones a, b, c, d, e, f son constantes. En este caso, se pueden introducir nuevas variables independientes s y x, y una nueva variable dependiente v de manera que la ecuación (3.1) se escribe de una de las siguientes formas:

$$v_{ss} + v_{xx} + \gamma v = \varphi(s,x), \tag{3.2}$$

$$v_{ss} - v_{xx} + \gamma v = \varphi(s,x), \tag{3.3}$$

$$v_{xx} - v_s = \varphi(s,x), \tag{3.4}$$

$$v_{ss} + \gamma v = \varphi(s,x), \tag{3.5}$$

donde γ es una constante que toma los valores -1, 0 y 1. Si la ecuación original verifica que $b^2 - ac < 0$ esta se dirá elíptica y se reducirá a una ecuación del tipo (3.2). Si verifica que $b^2 - ac > 0$ se dirá hiperbólica y puede reducirse a una ecuación de la forma (3.3). Finalmente, si $b^2 - ac = 0$ la ecuación puede reducirse a la forma (3.3) y se dirá parabólica o a la forma (3.5) que se conoce con el nombre de degenerada.

Veamos por ejemplo cómo transformar la ecuación

$$3u_{tt} - 2u_{ty} + 6u_{yy} - 12u_t - 9u_y - 5u = 0$$

en una de las formas anteriores. En primer lugar, démonos cuenta que

$$b^2 - ac = -14 < 0$$

por lo que se trata de una ecuación elíptica. La transformación se hace en tres etapas.

- Cambio en las variables independientes para eliminar el término u_{ty}. Para ello consideramos una rotación en el plano de ángulo α que tendrá la forma

$$\left\{\begin{array}{r}s=t\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ x=-t\sin\alpha+y\cos\alpha,\end{array}\right.$$

y cuya transformación inversa es

$$\left\{\begin{array}{l}t=s\cos\alpha-x\sin\alpha,\\ y=s\sin\alpha+x\cos\alpha.\end{array}\right.$$

Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\cos\alpha-\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha,\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial s}\sin\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha.\end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial s}\cos\alpha-\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\cos\alpha-\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha\right)\\ &=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin^2\alpha-2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\cos\alpha\sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial s}\sin\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\sin\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha\right)\\ &=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\sin^2\alpha+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos^2\alpha+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\cos\alpha\sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}&=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial s}\cos\alpha-\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\sin\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha\right)\\ &=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\cos\alpha\sin\alpha-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos\alpha\sin\alpha+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación original tenemos

$$\begin{aligned}0&=3u_{tt}-2u_{ty}+6u_{yy}-12u_t-9u_y-5u\\ &=3\left(u_{ss}\cos^2\alpha+u_{xx}\sin^2\alpha-2u_{tx}\cos\alpha\sin\alpha\right)\\ &\quad-2\left(u_{ss}\cos\alpha\sin\alpha-u_{xx}\cos\alpha\sin\alpha+2u_{ts}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\right)\\ &\quad+6\left(u_{ss}\sin^2\alpha+u_{xx}\cos^2\alpha+2u_{ts}\cos\alpha\sin\alpha\right)\\ &\quad-12\left(u_s\cos\alpha-u_x\sin\alpha\right)-9\left(u_s\sin\alpha+u_x\cos\alpha\right)-5u\\ &=\left(3\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha+6\sin^2\alpha\right)u_{ss}\\ &\quad+\left(3\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha+6\cos^2\alpha\right)u_{xx}\\ &\quad+\left(6\cos\alpha\sin\alpha-4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\right)u_{sx}\\ &\quad-\left(12\cos\alpha+9\sin\alpha\right)u_s+\left(12\sin\alpha-9\cos\alpha\right)u_x-5u.\end{aligned}$$

Si buscamos que el coeficiente que multiplica a u_{sx} sea 0, debe verificarse que

$$6\cos\alpha\sin\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

o equivalentemente

$$4\tan^2\alpha + 6\tan\alpha - 4 = 0,$$

de donde obtenemos que, considerando α en el primer cuadrante,

$$\tan\alpha = \frac{1}{2},$$

con lo que

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

quedando la ecuación original como

$$\frac{14}{5}u_{ss} + \frac{31}{5}u_{xx} - \frac{33\sqrt{5}}{5}u_s - \frac{6\sqrt{5}}{5}u_x - 5u = 0,$$

o equivalentemente

$$14u_{ss} + 31u_{xx} - 33\sqrt{5}u_s - 6\sqrt{5}u_x - 25u = 0. \tag{3.6}$$

- La siguiente etapa consiste en la eliminación de los términos de u_s y u_x, en dos pasos. En primer lugar eliminaremos el término de u_s introduciendo la variable dependiente

$$w = e^{\beta s}u,$$

y calculamos β para que el término que acompaña a w_s sea cero. Para ello tenemos en cuenta que $u = e^{-\beta s}w$ y derivamos

$$\begin{array}{rcl} u_s &=& -\beta e^{-\beta s}w + e^{-\beta s}w_s, \\ u_x &=& e^{-\beta s}w_x, \\ u_{ss} &=& \beta^2 e^{-\beta s}w - 2\beta e^{-\beta s}w_s + e^{-\beta s}w_{ss}, \\ u_{xx} &=& e^{-\beta s}w_{xx}, \end{array}$$

y sustituimos en la ecuación (3.6) teniéndose

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& 14u_{ss} + 31u_{xx} - 33\sqrt{5}u_s - 6\sqrt{5}u_x - 25u = 0 \\ &=& 14(\beta^2 e^{-\beta s}w - 2\beta e^{-\beta s}w_s + e^{-\beta s}w_{ss}) + 31e^{-\beta s}w_{xx} \\ && -33\sqrt{5}(-\beta e^{-\beta s}w + e^{-\beta s}w_s) - 6\sqrt{5}e^{-\beta s}w_x - 25e^{-\beta s}w \\ &=& e^{-\beta s}\left(14w_{ss} + 31w_{xx} - [28\beta + 33\sqrt{5}]w_s - 6\sqrt{5}w_x + [14\beta^2 + 33\sqrt{5}\beta - 25]w\right), \end{array}$$

de donde obtenemos la condición

$$28\beta + 33\sqrt{5} = 0,$$

de donde

$$\beta = -\frac{33\sqrt{5}}{28},$$

y teniendo en cuenta que $e^{-\beta s} \neq 0$, la ecuación se simplifica a

$$14w_{ss} + 31w_{xx} - 6\sqrt{5}w_x - \frac{6854}{56}w = 0. \tag{3.7}$$

Procediendo del mismo modo con la variable x, introduciendo la variable dependiente

$$q = e^{\gamma x}w,$$

la ecuación (3.7) se reduce a

$$14q_{ss} + 31q_{xx} - \frac{95737}{868}q = 0. \tag{3.8}$$

- Finalmente, introducimos la variables dependiente e independientes para reescalar la ecuación (3.8) de la siguiente forma. En primer lugar introducimos la variable dependiente

  $$v = \frac{95737}{868}q,$$

  y como

  $$\begin{aligned} q_{ss} &= \frac{868}{95737}v_{ss}, \\ q_{xx} &= \frac{868}{95737}v_{xx}, \end{aligned}$$

  la ecuación (3.8) se reduce a

  $$\frac{12152}{95737}v_{ss} + \frac{26908}{95737}v_{xx} - v = 0.$$

  Finalemente, los cambios de variables independientes

  $$\begin{cases} \tau = s/\sqrt{\frac{12152}{95737}}, \\ \xi = x/\sqrt{\frac{26908}{95737}}, \end{cases}$$

  hacen que teniendo en cuenta que

  $$\begin{aligned} v_{ss} &= \frac{95737}{12152}v_{\tau\tau}, \\ v_{xx} &= \frac{95737}{26908}v_{\xi\xi}, \end{aligned}$$

  nos quede la ecuación reducida

  $$v_{\tau\tau} + v_{\xi\xi} - v = 0.$$

3.3. Ecuación del calor. Método de separación de variables.

Partamos del problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0, L), \\ u(0, y) = f(y), \ 0 < y < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \ t > 0, \end{cases}$$

que es la ecuación del calor en una varilla unidimensional de longitud L con temperatura inicial $f(y)$. La incógnita $u(t, y)$ mide la temperatura en cada instante de tiempo y en cada punto de la barra.

Una manera de resolver el problema anterior es intentar reducirlo a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello suponemos que la solución puede expresarse de la forma

$$u(t, y) = T(t)Y(y),$$

es decir, como el producto de dos funciones reales de variable real $T(t)$ e $Y(y)$. Derivando obtenemos

$$\begin{aligned} u_t(t, y) &= T'(t)Y(y), \\ u_{yy}(t, y) &= T(t)Y''(y). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original tenemos

$$T'(t)Y(y) = \alpha^2 T(t)Y''(y),$$

y suponiendo que las fuciones no se anulan rescribimos la ecuación como

$$\frac{T'(t)}{T(t)\alpha^2} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Un lado de la igualdad solo depende de t , mientras que el contrario lo hace solo respecto de y, por lo que necesariamente ambos deben ser constantes, es decir

$$\frac{T'(t)}{T(t)\alpha^2} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

de donde obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} T' + \lambda\alpha^2 T &= 0, \\ Y'' + \lambda Y &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, las condiciones de contorno se escriben como

$$\begin{aligned} T(t)Y(0) &= u(0, y) = 0, \\ T(t)Y(L) &= u(L, y) = 0, \end{aligned}$$

por lo que debe verificarse que $Y(0) = Y(L) = 0$. Si escribimos el problema para la función Y tenemos lo que se conoce como un problema de contorno

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(L) = 0. \end{cases}$$

Como sabemos, las solución general de la ecuación $Y'' + \lambda Y = 0$ es de una de las siguientes formas

- Si $\lambda = 0$, entonces $Y(y) = c_1 + c_2 y$, donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.
- Si $\lambda < 0$, la solución es $Y(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} y}$, donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.
- Si $\lambda > 0$, la solución es $Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} y) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} y)$, donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

El problema se presenta a lo hora de calcular las constantes anteriores. En el primer caso tendríamos que

$$Y(0) = c_1 = 0,$$

e

$$Y(L) = c_1 + c_2 L = 0,$$

de donde $c_1 = c_2 = 0$ y la solución sería nula. En el segundo caso, las condiciones de contorno se escriben como

$$Y(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

e

$$Y(L) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0,$$

que da lugar al sistema lineal

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda} L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0, \end{cases}$$

y dado que el determinante de la matriz asociada

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda} L} & e^{-\sqrt{\lambda} L} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda} L} - e^{\sqrt{\lambda} L} \neq 0,$$

tenemos que la única solución posible es $c_1 = c_2 = 0$ y la solución sería nuevamente nula. Finalmente, en el tercer caso

$$Y(0) = c_1 = 0,$$

e

$$Y(L) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0,$$

de donde

$$c_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0.$$

Como las soluciones de la ecuación $\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$ son

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Si definimos

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2},$$

tenemos que el problema de condiciones de contorno tiene soluciones no nulas de la forma

$$Y_n(y) = c \sin(\sqrt{\lambda_n} y) = c \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right)$$

para los valores de λ_n dados en (3.9).

Para estos valores, la ecuación para la función T queda de la forma

$$T' + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 T = 0,$$

que para cada valor de n proporciona la solución

$$T_n(t) = Ce^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t},$$

lo que da lugar a la solución

$$u_n(t,y) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}.$$

La linealidad de la ecuación nos lleva a plantear como posible solución

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t},$$

y utilizando la condición inicial

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) = f(y), \tag{3.10}$$

lo que nos lleva a plantearnos si cualquier función $f(y)$ puede desarrollarse como en (3.10). La solución a esta cuestión será el desarrollo en serie de Fourier.

3.4. Series de Fourier

Consideremos una función real de variable real $f(y)$ que sea $2L$ periódica, es decir, para todo y se verifica la expresión

$$f(y) = f(y + 2L).$$

Por ejemplo, las funciones seno y coseno son 2π periódicas. Definimos los coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy, \ n = 0, 1, 2, ...$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy, \ n = 1, 2, ...$$

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right)$$

se conoce como serie de Fourier asociado a $f(y)$. Por ejemplo, consideremos la función $f(y)$ tal que

$$f(y) = \begin{cases} 0 & si \ x \in [-1,0), \\ 1 & si \ x \in [0,1), \end{cases}$$

y es 2 periódica. Para dicha función tenemos que los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)dy = \int_0^1 1dy = \frac{1}{2},$$

y para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)\cos(n\pi y)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(n\pi y)\, dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi y)\right]_0^1 = \frac{1}{2n\pi}\left(\sin(n\pi) - \sin(0)\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)\sin(n\pi y)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(n\pi y)\, dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi y)\right]_0^1 = \frac{-1}{2n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) \\ &= \begin{cases} 0 & si\ n\ es\ par, \\ \frac{1}{n\pi} & si\ n\ es\ impar, \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que la serie de Fourier asociada a $f(y)$ será

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\pi}\sin\left((2n-1)\pi y\right).$$

La cuestión radica en saber si la igualdad

$$f(y) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\pi}\sin\left((2n-1)\pi y\right) \tag{3.11}$$

se verifica, es decir, si $f(y)$ puede aproximarse en forma de la serie anteriormente calculada.

La respuesta a esta pregunta es afirmativa para una familia notable de funciones, que precisa de unas definiciones previas para su compresión. Recordemos que una función es continua en y_0 si

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$$

y $f(y)$ es continua si es continua en todos sus puntos. Si $f(y)$ no es continua en y_0 pueden existir sus límites laterales

$$f(y_0^-) = \lim_{\substack{y\to y_0 \\ y<y_0}} f(y)$$

y

$$f(y_0^+) = \lim_{\substack{y\to y_0 \\ y>y_0}} f(y)$$

y la discontinuidad se tipo salto finito si

$$f(y_0^-) - f(y_0^+)$$

es finito. Finalmente, $f(y)$ se dice continua a trozos en $[-L, L]$ si es continua salvo en una cantidad finita de puntos y las discontinuidades son de tipo salto finito. Se verifica entonces el siguiente resultado.

Teorema 31 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $2L$ periódica de manera que f y su derivada f' son de continuas a trozos. Entonces la serie de Fourier de f dada por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \right)$$

converge a $f(y)$ en los puntos de continuidad de f, a $\frac{1}{2}[f(y_0^-) - f(y_0^+)]$ en los puntos de discontinuidad y a $\frac{1}{2}[f(L^-) - f(-L^+)]$ cuando $y = \pm L$.

El teorema anterior garantiza que la igualdad a la que hacíamos alusión en (3.11) se verifica para $y \in (-1,1) \setminus \{0\}$ es igual a $1/2$ para ± 1 y 0.

3.4.1. Funciones pares e impares

La series de Fourier tienen expresiones particulares cuando las funciones son pares o impares. Recordemos que f es par si se cumple que

$$f(y) = f(-y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Se dice que la función es impar si por el contrario la relación que se cumple es

$$f(y) = -f(-y).$$

Veamos cómo se obtiene la serie de Fourier para cada una de estas funciones.

- Si f es par, se verifica que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)dy \\ &=_{\{x=-y\}} \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \frac{1}{L}\int_0^L f(y)dy \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L f(y)dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy + \frac{1}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy \\ &=_{\{x=-y\}} \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \frac{1}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&=_{\{x=-y\}} -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo que para una función par tendremos que

$$f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

- Si f es impar

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)dy \\
&=_{\{x=-y\}} -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)dy \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&=_{\{x=-y\}} -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&= 0,
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&=_{\{x=-y\}} -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy,
\end{aligned}$$

por lo que para una función par tendremos que

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

3.4.2. Aplicación a ecuaciones diferenciales

Supongamos una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes con función de transferencia $T(z)$. Supongamos que el sistema es asintóticamente estable, de tal manera que si $f(t) = A\sin(\omega t+\phi)$ es la entrada del sistema, se verifica que su salida para tiempos suficientemente grandes viene dada por

$$x(t) = A|T(i\omega)|\sin(\omega t+\phi+\arg T(i\omega)).$$

Supongamos ahora que la señal es periódica de periodo $2L$. Dicha función puede expresarse en su serie de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right) \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right), \end{aligned}$$

donde $\omega = \pi/L$. Por otra parte, si escribimos (b_n, a_n) en coordenadas polares mediante la expresión

$$\begin{cases} b_n = A_n\cos\phi_n, \\ a_n = A_n\sin\phi_n, \end{cases}$$

podemos reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right) \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\phi_n\cos(n\omega t)+A_n\cos\phi_n\sin(n\omega t)\right) \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\phi_n). \end{aligned}$$

Si ahora $f(t)$ es la entrada al sistema anterior, entonces su salida para tiempos suficientemente grandes vendrá dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2}T(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n|T(in\omega)|\sin(n\omega t+\phi_n+\arg T(in\omega)).$$

Dado que para casos prácticos $\lim_{x\to\infty}|T(ix)| = 0$, por lo que $\lim_{n\to\infty}|T(in\omega)| = 0$, como consecuencia la series de Fourier de $x(t)$ converge a cero más rápidamente que la serie de Fourier de la señal inicial $f(t)$.

3.4.3. Aplicación a la ecuación del calor

Si retomamos la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{yy},\ t>0,\ y\in(0,L), \\ u(0,y) = f(y),\ 0<y<L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0,\ t>0, \end{cases}$$

la teoría de Fourier nos dice que su solución formal es

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t},$$

donde

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) = f(y).$$

Ahora bien, si pensamos en $f(y)$ como una función impar $2L$ periódica tendremos que

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy,$$

y por tanto dicha solución formal será

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}. \tag{3.12}$$

Hablamos de solución formal ya que no podemos asegurar que la expresión dada en (3.12) sea una solución. Por una parte, aunque la linealidad garantiza que una combinación lineal finita de soluciones sea solución, nuestra combinación lineal es infinita, por lo que tendríamos que comprobar que efectivamente es solución, es decir que es dos veces derivable y cumple la ecuación del calor. En general comprobar que las soluciones formales son soluciones es un problema bastante díficil, que en el caso de la ecuación del calor se garantiza por el término $e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}$. Cualitativamente hablamos de un proceso de difusión, en el que la barra va disipando calor convergiendo muy rápidamente a 0 y suavizando cualquier irregularidad que la función $f(y)$ pudiera presentar.

Por ejemplo, si nuestra barra es de aluminio (con un coeficiente $\alpha^2 = 0{,}86$) y mide 10 cm., y la tempreartura inicial en la barra es de 100 ^{o}C, la evolución de la tempreatura con el tiempo vendrá determinada por la expresión

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{10}\int_0^{10} 100\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx\right] \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right) e^{-\frac{0{,}86 n^2 \pi^2}{100}t},$$

y como

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} 100\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx &= -100\left[\frac{n\pi}{10}\cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\right]_0^{10} \\
&= -10n\pi\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) \\
&= \left\{\begin{array}{cl} 0 & si\ n\ es\ par, \\ 20n\pi & si\ n\ es\ impar, \end{array}\right.
\end{aligned}$$

tenemos

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 4(2n-1)\pi \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{10}y\right) e^{-\frac{0{,}86(2n-1)^2\pi^2}{100}t}.$$

Hemos de destacar que en el desarrollo anterior tienen una gran importancia que las condiciones de contorno sean nulas. En general esto no tiene porqué ser así, es decir la ecuación del calor sería

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{yy},\ t > 0,\ y \in (0, L), \\ u(0, y) = f(y),\ 0 < y < L, \\ u(t, 0) = g_1(t);\ u(t, L) = g_2(t),\ t > 0, \end{cases}$$

donde $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son las funciones que miden la temperatura de la varilla. Un cambio de variable en la variable dependiente permite llevar condiciones de contorno no nulas a un problema que sí las tenga mediante la nueva función

$$v(t, y) = u(t, y) - g_1(t) - \frac{y}{L}(g_2(t) - g_1(t)).$$

Es fácil ver que ahora

$$v(t, 0) = u(t, 0) - g_1(t) = g_1(t) - g_1(t) = 0,$$

mientras que

$$\begin{aligned} v(t, L) &= u(t, L) - g_1(t) - (g_2(t) - g_1(t)) \\ &= g_2(t) - g_1(t) - (g_2(t) - g_1(t)) = 0, \end{aligned}$$

por lo que tendremos condiciones de contorno nulas. La ecuación original se reescribe

$$0 = u_t - \alpha^2 u_{yy} = v_t + g_1'(t) + \frac{y}{L}(g_2'(t) - g_1'(t)) - \alpha^2 v_{yy},$$

por lo que tendríamos el problema

$$\begin{cases} v_t - \alpha^2 v_{yy} = -g_1'(t) - \frac{y}{L}(g_2'(t) - g_1'(t)),\ t > 0,\ y \in (0, L), \\ v(0, y) = f(y) - g_1(0) - \frac{y}{L}(g_2(0) - g_1(0)),\ 0 < y < L, \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0,\ t > 0. \end{cases}$$

Si la temperatura en los extremos de la varilla permanece constante, esto es, $g_1(t) = T_1$ y $g_2(t) = T_2$, el problema anterior se reduce a

$$\begin{cases} v_t = \alpha^2 v_{yy},\ t > 0,\ y \in (0, L), \\ v(0, y) = f(y) - T_1 - \frac{y}{L}(T_2 - T_1),\ 0 < y < L, \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0,\ t > 0. \end{cases}$$

3.5. Ecuación de ondas

Consideremos el problema hiperbólico

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy},\ t > 0,\ y \in (0, L), \\ u(0, y) = f(y),\ 0 < y < L, \\ u_t(0, y) = g(y),\ 0 < y < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0,\ t > 0, \end{cases}$$

que modela la vibración mecánica de una cuerda, donde $u(t, y)$ mide el desplazamiento respecto de la horizontal en cada instante de tiempo y en cada posición de la cuerda.

Con el método de separación de variable planteamos soluciones de la forma $u(t,y) = T(t)Y(y)$, que nos da lugar a los problemas de ecuaciones diferencales

$$T'' + \lambda c^2 T = 0,$$

y el problema de contorno

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(L) = 0, \end{cases}$$

que como sabemos tiene una familia de soluciones no nulas para los valores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right).$$

Para dichos valores λ_n tenemos las ecuaciones

$$T'' + \lambda_n c^2 T = 0,$$

que tendrá por solución general

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right),$$

pudiendo entonces plantear la solución formal

$$\begin{aligned} u(t,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) Y_n(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right). \end{aligned}$$

De la condición inicial

$$u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right).$$

Derivando formalmente $u(t,y)$ respecto a t obtenemos

$$u_t(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right),$$

que aplicada a la otra condición inicial

$$u_t(0,y) = g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right).$$

Considerando de nuevo f y g como funciones impares $2L$ periódicas, concluimos que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

y

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

para todo $n \geq 1$.

3.6. Ecuación de Laplace

Al contrario que las ecuaciones del calor y ondas, la ecuación de Laplace es estática y representa una condición de equilibrio en, por ejemplo, la temperatura de una sección plana. La ecuación del calor en dos dimensiones espaciales tiene la forma

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$$

y si suponemos un equilibrio de esta función invariante respecto al tiempo, obtendríamos

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3.13}$$

que es la ecuación de Laplace. Estas ecuaciones se plantean sólo con condiciones de contorno sobre la frontera del recinto, que para los calculos prácticos tiene que tener alguna regularidad. Estas condiciones de contorno son en general de dos tipos. Si R es el recinto donde se verifica la ecuación (3.13), podemos suponer conocido $u(x,y)$ para todo (x,y) en la frontera de R en cuyo caso estaríamos hablando de una condición tipo Dirichlet. Si por el contrario suponemos que el vector normal a R en la frontera $\frac{\partial u}{\partial n}$ es conocido, se trata de una condición de Neumann. En cualquiera de los casos, la geometría del conjunto R es muy importante y sólo podemos calcular soluciones cuando ésta cumple adecuadas condiciones de regularidad.

Supongamos por ejemplo que R es el rectángulo $[0,a] \times [0,b]$ y tenemos el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, \ 0 \leq x \leq a, \\ u(0,y) = 0, \ 0 \leq y \leq b, \\ u(a,y) = f(y), \ 0 \leq y \leq b, \end{cases}$$

que es de tipo Dirichlet.

Si planteamos una solución de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, construimos las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0, \\ Y'' + \lambda Y &= 0. \end{aligned}$$

La segunda ecuaición da lugar al problema de contorno

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

que como sabemos tiene por soluciones no nulas las funciones

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

para los valores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. La primera ecuación se reescribe entonces

$$X'' - \lambda_n X = 0,$$

que tiene por solución general

$$X_n(x) = C_1 e^{-\frac{n\pi}{b}x} + C_2 e^{\frac{n\pi}{b}x}.$$

De la condición $u(0,y)=0$ obtenemos que $X(0)=0$, por lo que

$$X(0)=0=C_1+C_2,$$

por lo que $C_2=-C_1=c_n/2$, por lo que para todo natural n obtenemos la solución

$$\begin{aligned}
u_n(x,y) &= c_n \frac{e^{\frac{n\pi}{b}x}-e^{-\frac{n\pi}{b}x}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
&= c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).
\end{aligned}$$

Planteamos entonces la solución formal

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Utilizando la condición de contorno que nos queda

$$u(a,y)=f(y)$$

tenemos que

$$f(y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

y considerando f como $2b$ periódica e impar, tenemos que

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy.$$

3.7. Ejercicios

1. Encontrar las soluciones de los siguientes problemas de contorno:

   a) $y''+\lambda y=0,\ y(0)=0,\ y'(L)=0.$
   b) $y''+\lambda y=0,\ y'(0)=0,\ y'(L)=0.$
   c) $y''+\lambda y=0,\ y'(0)=0,\ y(L)=0.$
   d) $y''+\lambda y=0,\ y(0)=0,\ y(\pi)-y'(\pi)=0.$
   e) $y''+\lambda y=0,\ y(0)-y'(0)=0,\ y(1)=0.$
   f) $y''+\lambda y=0,\ y(0)-y'(0)=0,\ y(\pi)-y'(\pi)=0.$

2. Para qué valores de λ tienen soluciones no triviales los siguientes problemas de contorno:

   a) $y''-2y'+(1+\lambda)y=0,\ y(0)=0,\ y(1)=0.$
   b) $y''+\lambda y=0,\ y(0)=y(2\pi),\ y'(0)=y'(2\pi).$

3. Clasificar las siguientes EDP y encontrar su forma canónica:

a) $3u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0.$

b) $4u_{xx} + u_{xy} + 4u_{yy} + u = 0.$

c) $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 4u_y + 25u = 0.$

d) $u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_x - u_y + u = 0.$

e) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = 0.$

4. Encontrar los desarrollos en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas (se da su valor en el intervalo $[-l, l]$ con $2l$ el periodo).

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0), \\ 1 & x \in [0, 1]. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 2]. \end{cases}$

c) $f(x) = x, \ x \in [-1, 1].$

d) $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-1, 0), \\ x & x \in [0, 1]. \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 1), \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-2, 1), \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-L, 0), \\ e^x & x \in [0, L]. \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in [-L, 0), \\ e^x & x \in [0, L]. \end{cases}$

5. Los extremos de una barra de aluminio ($\alpha^2 = 0{,}86$) de longitud 10 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales

a) $u(0, y) = 70, \ 0 \le y \le 10.$

b) $u(0, y) = 70 \cos y, \ 0 \le y \le 10.$

c) $u(0, y) = \begin{cases} 10y & y \in [0, 5), \\ 10(10 - y) & y \in [5, 10]. \end{cases}$

d) $u(0, y) = \begin{cases} 0 & y \in [0, 3), \\ 65 & y \in [3, 10]. \end{cases}$

6. Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1{,}14$) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales

a) $u(0,y) = 65\cos^2(\pi y)$, $0 \le y \le 2$.

b) $u(0,y) = 70\sin y$, $0 \le y \le 2$.

c) $u(0,y) = \begin{cases} 60x & x \in [0,1), \\ 60(2-x) & x \in [1,2]. \end{cases}$

d) $u(0,y) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ 75 & x \in [1,2]. \end{cases}$

7. Un estado de equilibrio para la ecuación del calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ es aquella que no varía con el tiempo. Demostrar

   a) Todos los equilibrios de la ecuación del calor son de la forma $u(y) = A + By$.

   b) Encontrar los estados de equilibrio de la ecuación del calor que cumplen $u(t,0) = T_1$ y $u(t,L) = T_2$.

   c) Resolver el problema
$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 75, \ 0 < y < 1, \\ u(t,0) = 20, \ u(t,L) = 60, \ t > 0. \end{cases}$$

   Ayuda: Calcularla como $u(t,y) = v(y) + w(t,y)$ donde $v(y)$ es el estado de equilibrio asociado a las condiciones de contorno $u(t,0) = 20, \ u(t,L) = 60$, y $w(t,y)$ es la solución del problema con condiciones de contorno nulas.

8. Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1{,}14$) de longitud 10 centímetros se mantienen a temperatura de 0^oC mientras que el centro de la barra es mantenido a 100^oC mediante una fuente de calor externa. Encontrar la temperatura de la barra con el tiempo para la condición inicial
$$u(0,y) = \begin{cases} 50 & x \in [0,5), \\ 100 & x \in [5,10]. \end{cases}$$

   Ayuda: Descomponer el problema en dos problemas de contorno con uno de los estremos en la mitad de la barra.

9. Resolver el problema
$$\begin{cases} u_t = u_{yy} + u, \ t > 0, \ y \in (0,1), \\ u(0,y) = \cos y, \ 0 < y < 1, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,L) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

10. Resolver los siguientes problemas

   a) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,2\pi), \\ u(0,y) = \cos y - 1, \ 0 < y < 2\pi, \\ u_t(0,y) = 0, \ 0 < y < 2\pi, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,2\pi) = 0, \ t > 0. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 0, \ 0 < y < 1, \\ u_t(0,y) = 1, \ 0 < y < 1, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,1) = 0, \ t > 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy},\ t > 0,\ y \in (0,3), \\ u(0,y) = f(y),\ 0 < y < 3, \\ u_t(0,y) = 0,\ 0 < y < 3, \\ u(t,0) = 0,\ u(t,3) = 0,\ t > 0. \end{cases}$ donde $f(y) = \begin{cases} x & x \in [0,1), \\ 1 & x \in [1,2), \\ 2 - x & x \in [2,3]. \end{cases}$

11. Una cuerda de 10 metros fijada en sus extremos se levanta por el medio hasta la distancia de un metro y se suelta. Describe su movimiento suponiendo que $c^2 = 1$.

12. Demuestra que el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \tau = y + ct, \\ \xi = y - ct, \end{cases}$$

transforma la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{yy}$ en la ecuación $u_{\tau\xi} = 0$. Concluir que la solución general de la ecuación será de la forma

$$u(t,y) = F(y - ct) + G(y + ct)$$

para funciones apropiadas F y G.

13. Demostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy},\ t > 0,\ y \in (0,L), \\ u(0,y) = f(y),\ 0 < y < L, \\ u_t(0,y) = g(y),\ 0 < y < L, \\ u(t,0) = 0,\ u(t,3) = 0,\ t > 0, \end{cases}$$

es de la forma

$$u(t,y) = \frac{1}{2}\left(F(y - ct) + F(y + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{y-ct}^{y+ct} g(x)dx,$$

donde F es la extensión $2l$ periódica e impar de f.

14. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy} + u,\ t > 0,\ y \in (0,L), \\ u(0,y) = f(y),\ 0 < y < L, \\ u_t(0,y) = 0,\ 0 < y < L, \\ u(t,0) = 0,\ u(t,3) = 0,\ t > 0, \end{cases}$$

15. Resolver los problemas

a) $\begin{cases} u_x + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u(x,0) = 0,\ 0 < x < a, \\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a, \\ u(0,y) = u(a,y) = 0,\ 0 < y < b. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_x + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u(x,0) = u(x,b) = 0,\ 0 < x < a, \\ u(0,y) = g(y),\ 0 < y < b, \\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b. \end{cases}$

$$c)\quad \begin{cases} u_x + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < a, \\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a, \\ u(0,y) = g(y),\ 0 < y < b, \\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b. \end{cases}$$

16. Resolver los problemas de Neuman

$$a)\quad \begin{cases} u_x + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0,\ 0 < x < a, \\ u_x(0,y) = f(y),\ 0 < y < b, \\ u_x(a,y) = 0,\ 0 < y < b. \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} u_x + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u_x(0,y) = u_x(b,y) = 0,\ 0 < y < b, \\ u_x(x,0) = f(x),\ 0 < x < a, \\ u_x(x,b) = 0,\ 0 < x < a. \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} u_x + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u_x(0,y) = 1,\ 0 < y < b, \\ u_x(b,y) = 0,\ 0 < y < b, \\ u_x(x,0) = 1,\ 0 < x < a, \\ u_x(x,b) = 0,\ 0 < x < a. \end{cases}$$

17. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_x + u_{yy} = u,\ (x,y) \in (0,1)^2, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0,\ 0 < x < 1, \\ u(0,y) = f(y),\ 0 < y < 1, \\ u(1,y) = 0,\ 0 < y < 1. \end{cases}$$