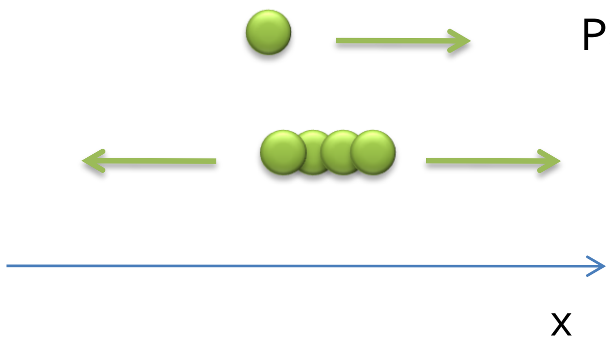
MOVIMIENTO ARMÓNICO



Partícula en posición de equilibrio

OSCILA Se mueve periódicamente alrededor de su posición de equilibrio

T (PERÍODO) Tiempo empleado en reproducir el movimiento

υ (Frecuencia) La inversa del período $\mu = \frac{1}{T} \quad (Hz)$

X varia → $x = f(t)$ Si esta dependencia viene expresada en términos de funciones trigonométricas → **Movimiento Armónico**

→ Fase

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

Amplitud o máximo valor de x

Frecuencia angular

Origen de fase

La ecuación diferencial de este movimiento

Una primera deriva

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

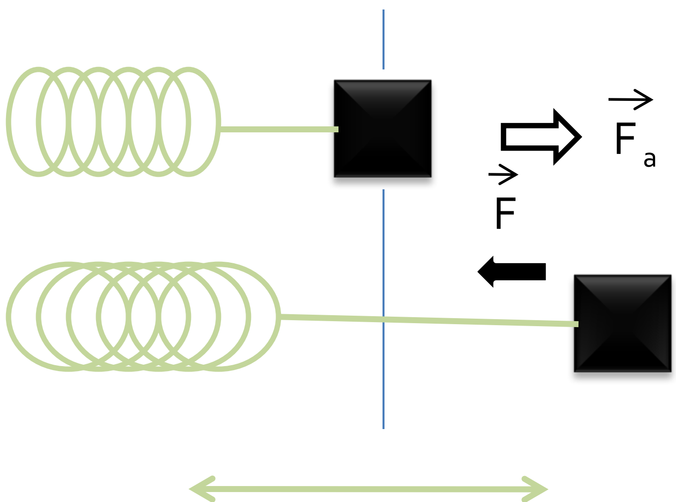
Una segunda derivada

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

Aplicación I. Resorte



Aparece una fuerza restauradora que obedece a la ley de Hook

$$F = -k x$$

$$m\ddot{x} = -k x$$

Aplicamos la II ley de Newton

$$m\ddot{x} + k x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Identificamos. El valor de la frecuencia angular es $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \longrightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

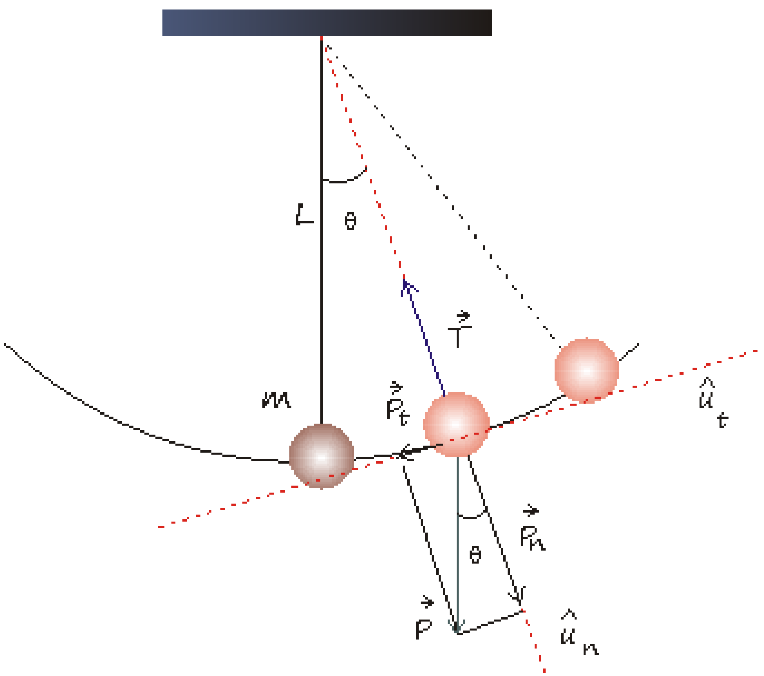
El período resulta $\dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \longrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

Y la frecuencia

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La solución a esta ecuación es $x = A \sin(\omega t + \phi)$

Movimiento armónico



Aplicación II. Péndulo

$\sum F_n \longrightarrow$ No son las responsables del movimiento del péndulo

$$\sum F_t = -P_t = -m\,g\,\sin\theta$$

Aplicamos la segunda ley de Newton

$$-m\,g\,\sin\theta = m\,a_t = m\,\frac{dv}{dt}$$

Consideramos que la amplitud es muy pequeña

$$\sin\theta \approx \theta$$

En función de la velocidad angular

$$-\,m\,g\,\theta = m\,\frac{dv}{dt}$$

$$v = \omega\,L$$

$$-\,g\,\theta = \frac{d(\omega\,L)}{dt} = L\,\frac{d\omega}{dt}$$

como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$-g\,\theta = L\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \longrightarrow -g\,\theta = L\,\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta}\,L + g\,\theta = 0$$

Comparamos

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} L + g\,\theta = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Energía en el movimiento armónico

Sistema aislado $\longrightarrow$ La energía neta debe permanecer constante

$E_c \longrightarrow$ Energía asociada a la velocidad de la partícula

$E_p \longrightarrow$ Energía asociada a la fuerza conservativa

La energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} m\, (\dot{x})^2$$

como

$$\dot{x} = A \cos(\omega\, t)$$

La energía potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} k\, A^2 \sin^2(\omega\, t)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2 \cos^2(\omega\, t)}$$

La energía total es

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2 \cos^2(\omega\, t) + \frac{1}{2} k\, A^2 \sin^2(\omega\, t)$$

$$E = \frac{1}{2} k\, A^2 = cte$$

La energía cinética máxima

1

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2 \cos^2(\omega\, t)} \longrightarrow (E_c)_m = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} A^2$$

La energía potencial máxima

$$(E_p)_m = \frac{1}{2} k A^2$$

La energía total equivale al máximo de cinética o máximo de potencial

Una partícula tiene un desplazamiento dado por

$$x = 0{,}3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad SI$$

a) Determina la frecuencia, el período, la amplitud, la frecuencia angular y la constante de fase del movimiento b) Determina la posición de la partícula para el instante t=1 s c) Halla la velocidad y aceleración para cualquier instante d) Determina la posición y velocidad inicial de la partícula

La amplitud y la constante de fase

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Ecuación general

$$A = 0{,}3\ m \qquad \phi = \frac{\pi}{6}$$

La frecuencia y el período

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}\ Hz$$

$$\omega = 2 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi\ s$$

Posición para t=1 s

$$t = 1\,s \qquad x = 0{,}3\cos\left(2\,(1) + \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}245\,m$$

Velocidad y aceleración para cualquier instante

$$v = \dot{x} = -\,(0{,}3)\,2\,\sin\left(2\,t + \frac{\pi}{6}\right) = -\,0{,}6\,\sin\left(2\,t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$a = \ddot{x} = -(0{,}6)\,2\,\cos\left(2\,t + \frac{\pi}{6}\right) = -\,1{,}2\,\cos\left(2\,t + \frac{\pi}{6}\right)$$

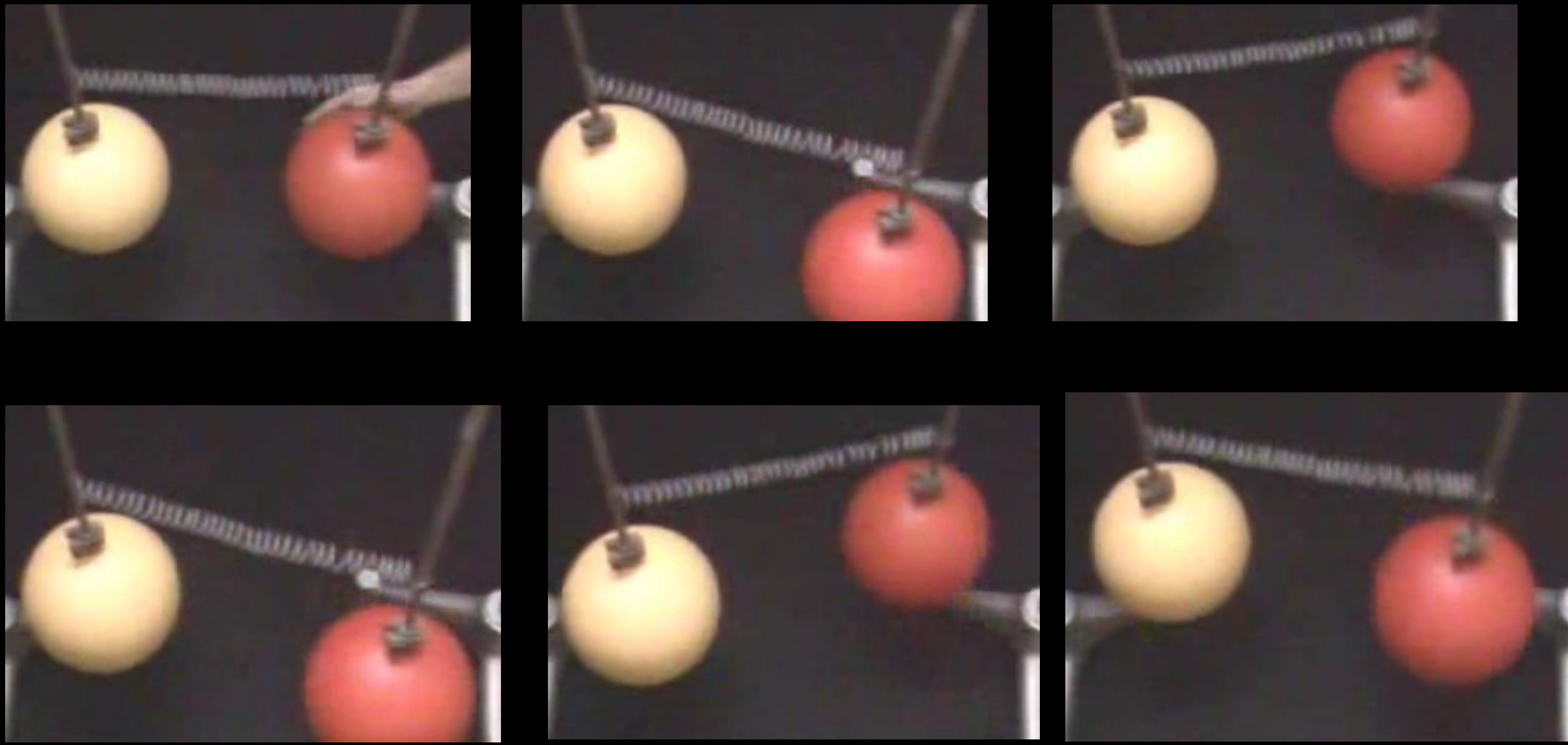
Posición y velocidad inicial

$$t = 0\,s$$

$$v_0 = -\,0{,}6\,\sin\left(2\,(0) + \frac{\pi}{6}\right) = -\,0{,}3\,m/s$$

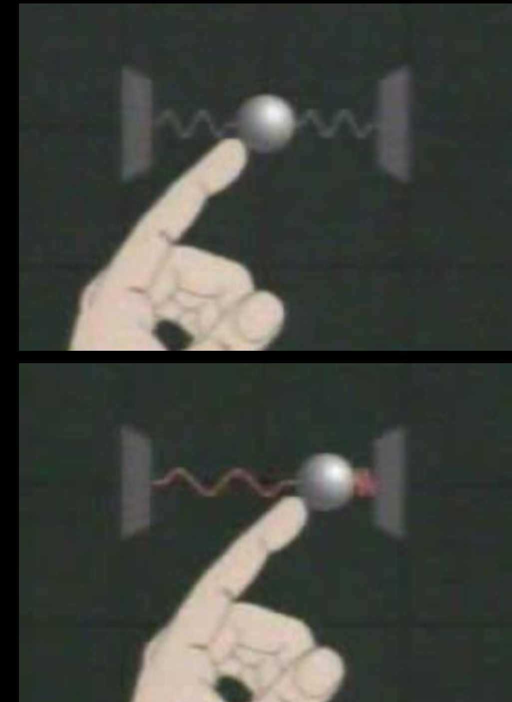
$$x_0 = 0{,}3\,\cos\left(2\,(0) + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}26\,m$$

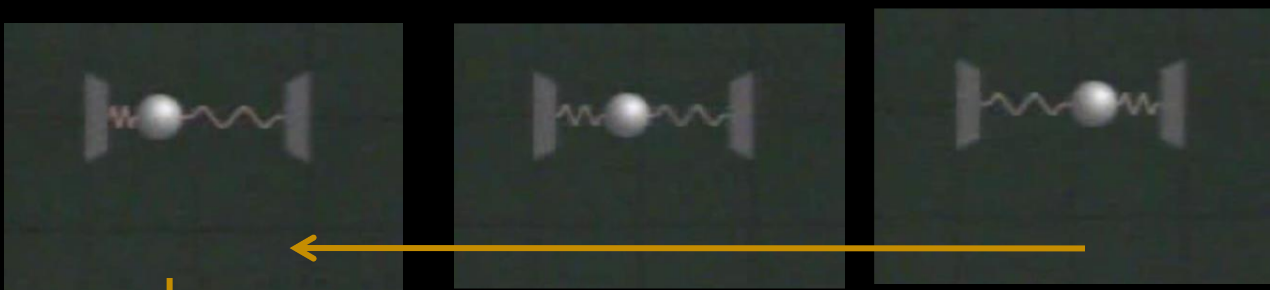
MOVIMIENTO ONDULATORIO

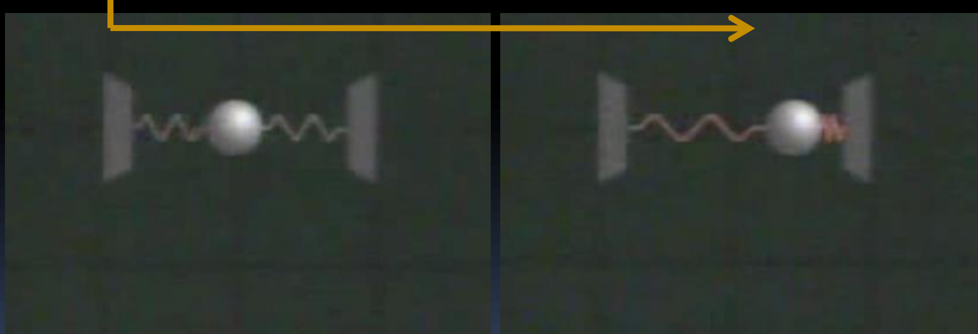


Cuando se unen simples sistemas mecánicos, una perturbación en uno de ellos pasará al siguiente

Perturbamos un sistema mecánico estable







La respuesta es un movimiento armónico. Es lo que sucede en el caso de un oscilador simple

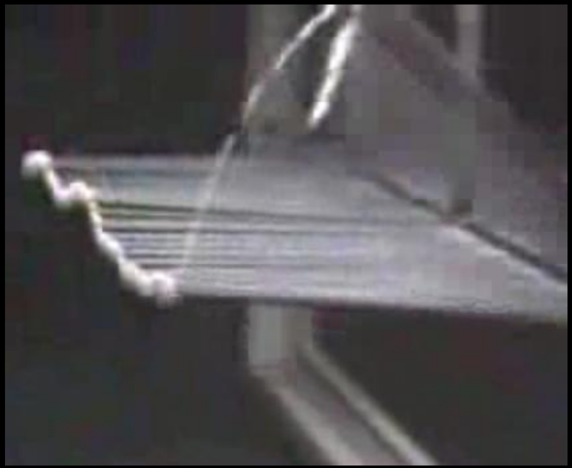
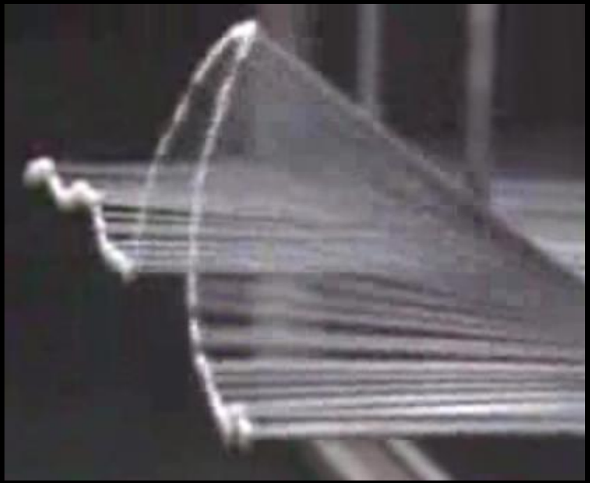
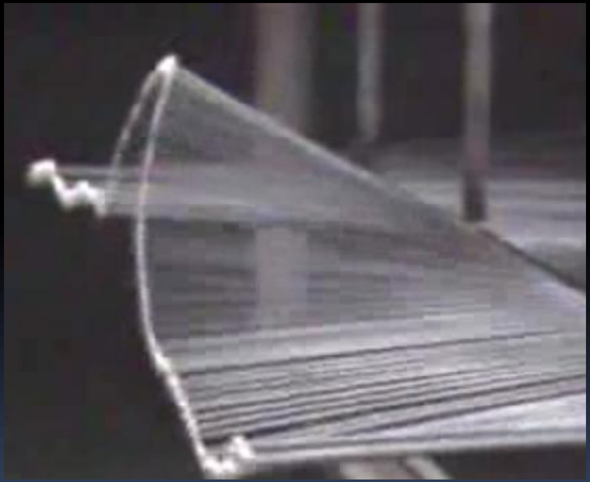
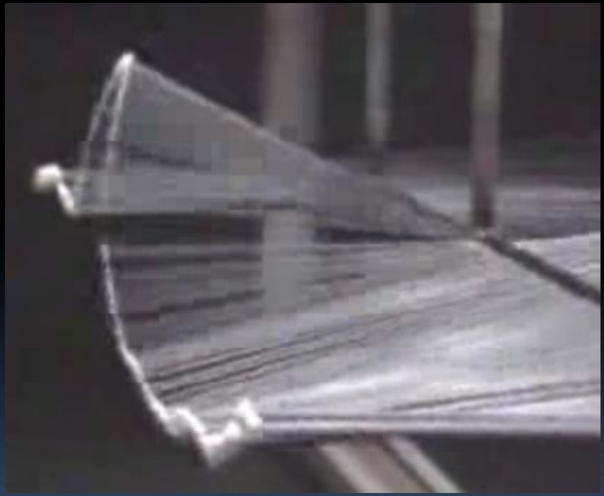
Unimos varios osciladores entre si

Una perturbación en uno de ellos

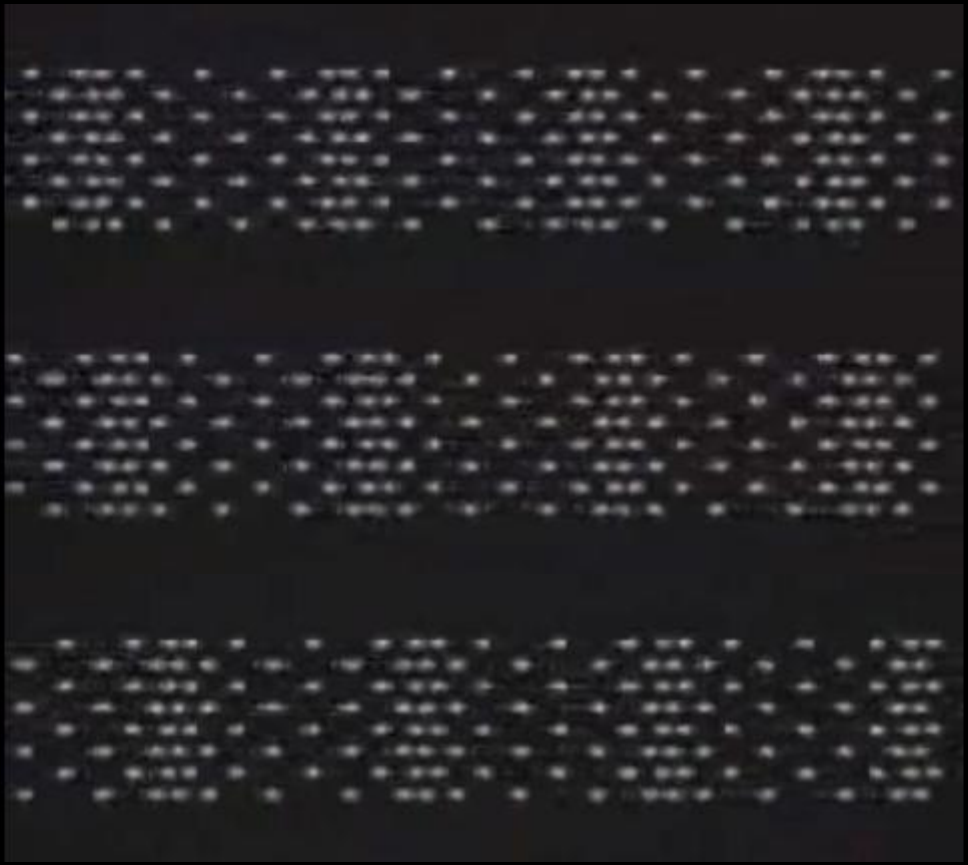
Pasa al siguiente oscilador

Y así sucesivamente

Hemos creado una **ONDA MECÁNICA**

Una ONDA mecánica no es más que una perturbación que viaja a través de un medio



- Una perturbación se propaga en el espacio afectando a una serie de partículas alejadas del foco (origen de la perturbación), decimos que hemos generado una ONDA.

- Un movimiento ondulatorio es considerado como un mecanismo de transporte de energía y momento.

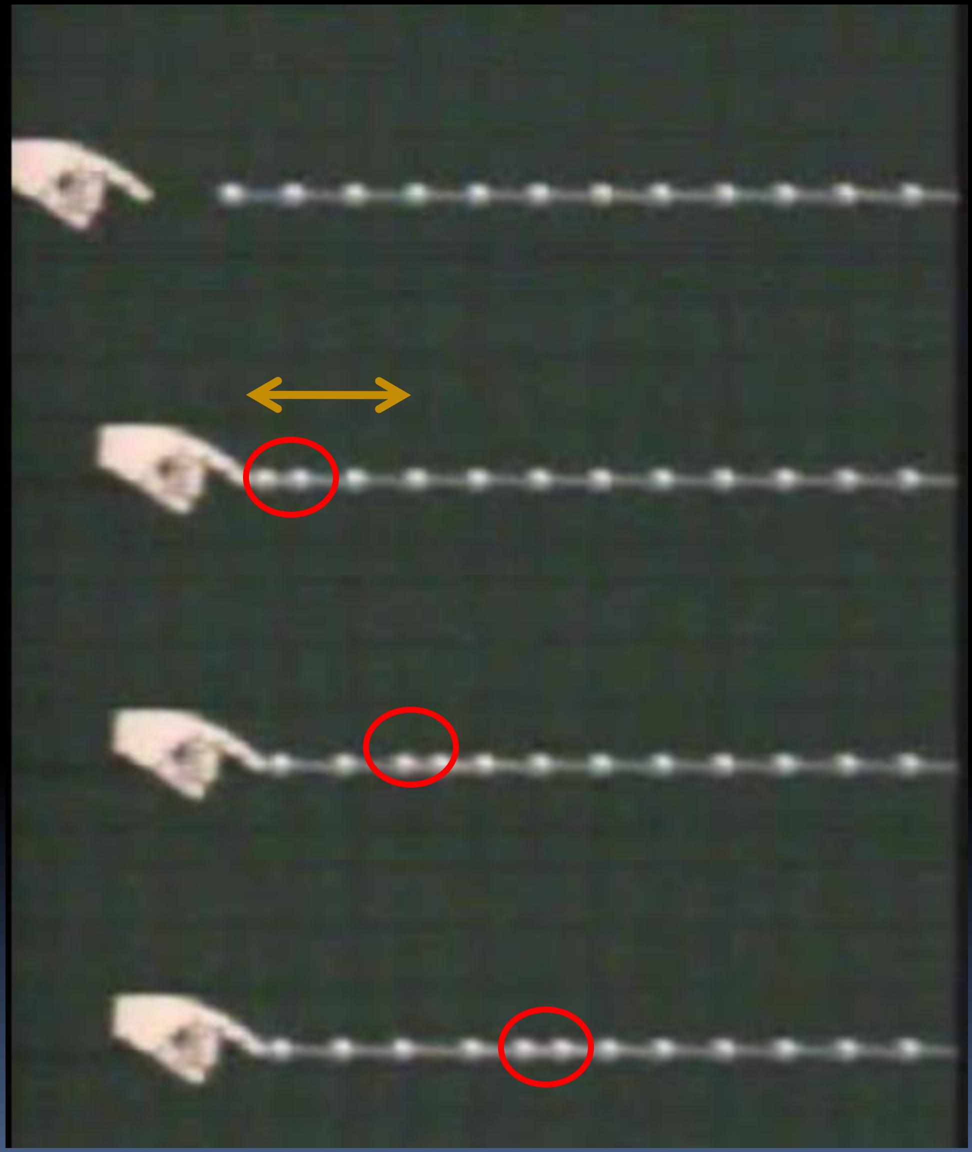
- En un movimiento ondulatorio no hay transporte de masa.

Magnitudes perturbadas

Densidad $\rho = f(x,t)$

Presión $P = f(x,t)$

Ondas Longitudinales y transversales

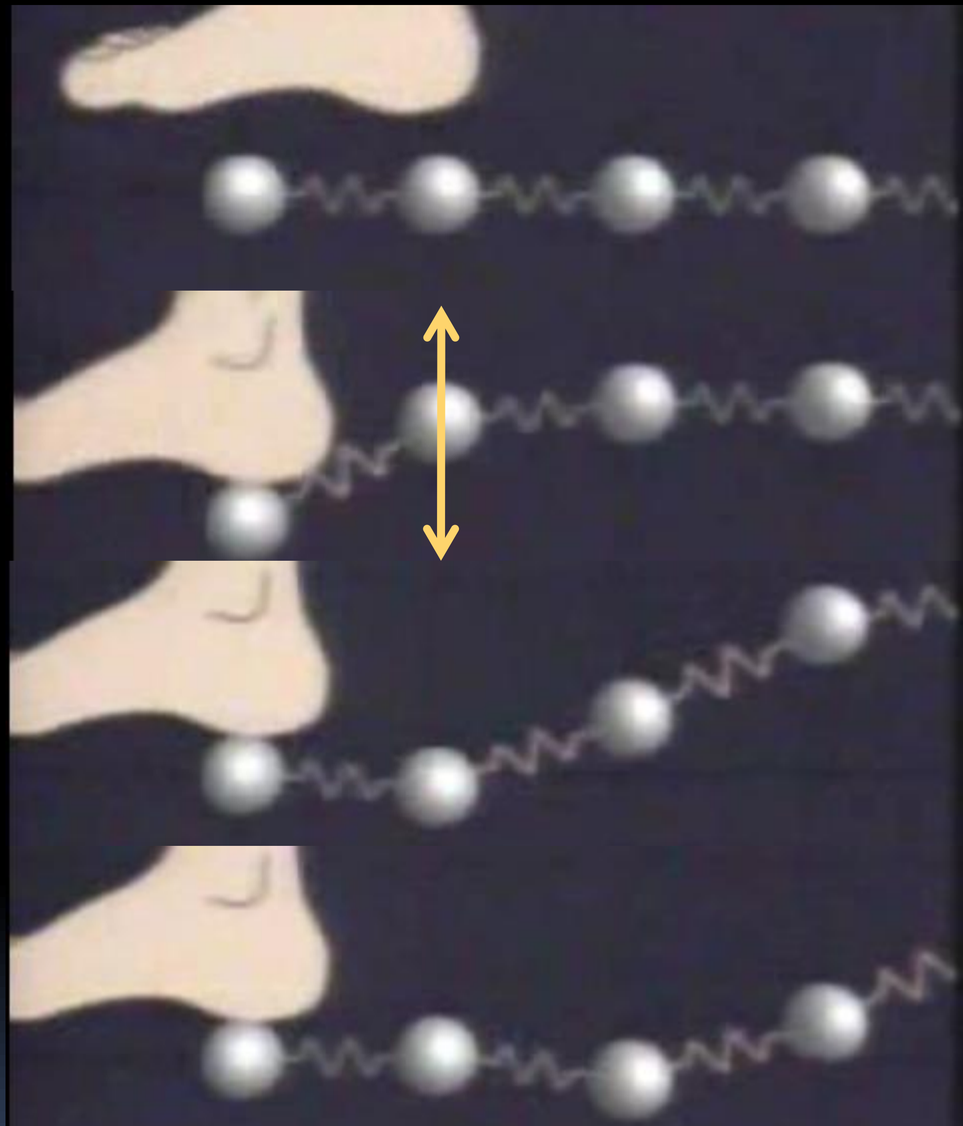


Los muelles pueden oscilar a lo largo de la dirección que los conecta

→ Dirección de la propagación

↔ Dirección de vibración

Hablamos de ondas longitudinales



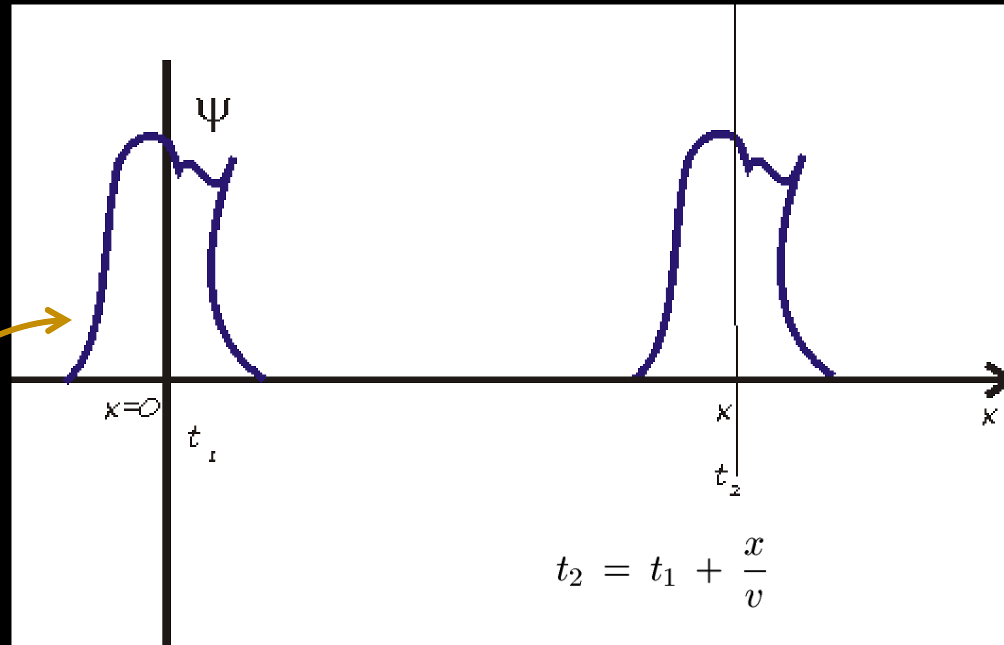
Vibración de las partículas

Dirección de propagación

Hablamos de **ondas transversales**

Ecuación de ondas

La perturbación se propaga sin deformarse y a velocidad constante



Para t_1 la perturbación está en

x = 0

Tomamos origen de tiempos en t_1

$$t_1 = t - \frac{x}{v}$$

$$\Psi = f(t) \Rightarrow \Psi = f(t - \frac{x}{v})$$

Representa a una perturbación propagándose a lo largo del eje x

$$\Psi = f(t - \frac{x}{v})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \dot{f} \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \ddot{f}$$

La variación con respecto a x

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{1}{\partial x/\partial t} = \dot{f}\frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{f}\frac{1}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{f}\frac{1}{v}\right)\frac{1}{\partial x}/\partial t = \frac{1}{v}\ddot{f}\frac{1}{v}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

Ecuación de Ondas.
Ecuación que expresa la propagación de una perturbación

La forma de 'f' viene determinada por el tipo de vibración del foco (x=0). Si la perturbación es periódica

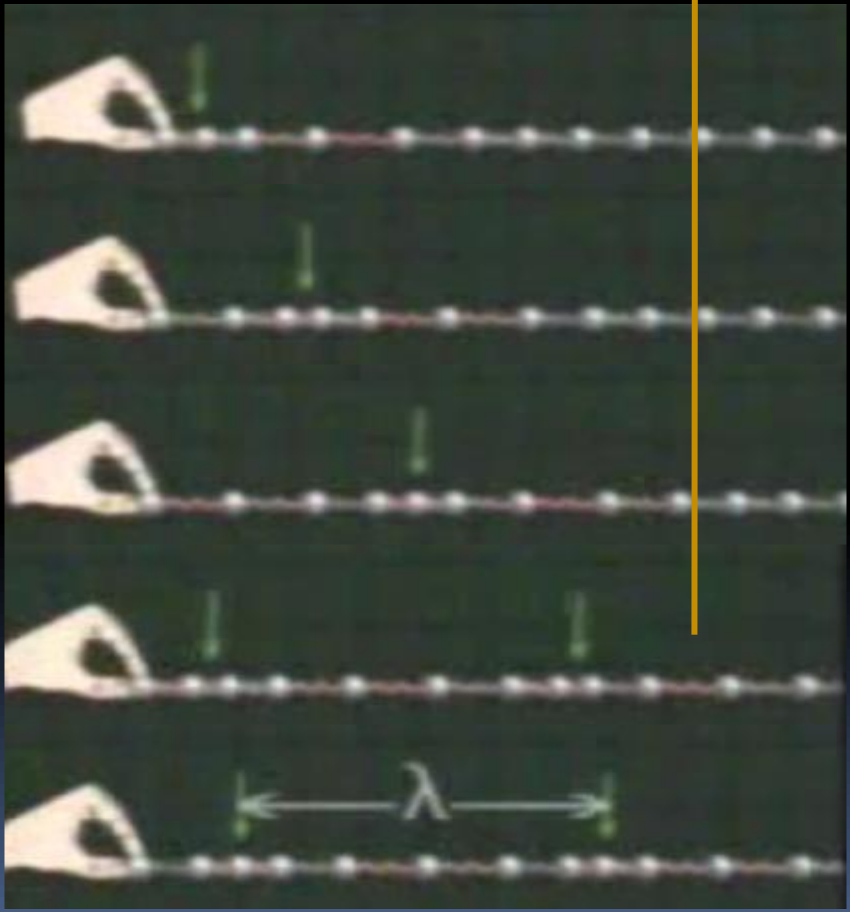
$$\Psi = A\sin(\omega t)$$

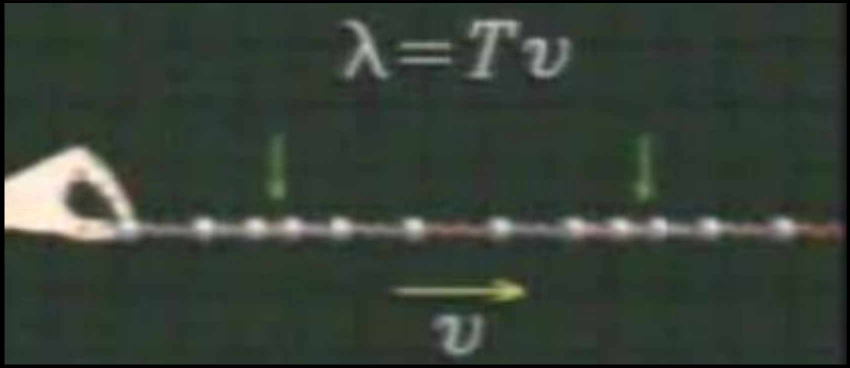
$$\Psi = A\sin\omega(t - \frac{x}{v})$$

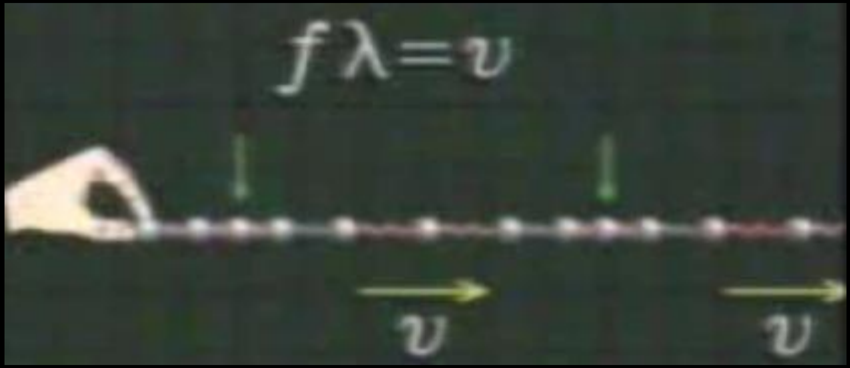
Ecuación de una ONDA armónica

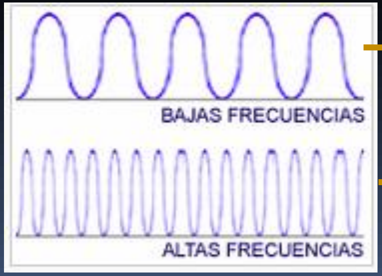
Longitud de Onda

De una compresión a la siguiente hay una distancia definida que llamamos **longitud de onda**



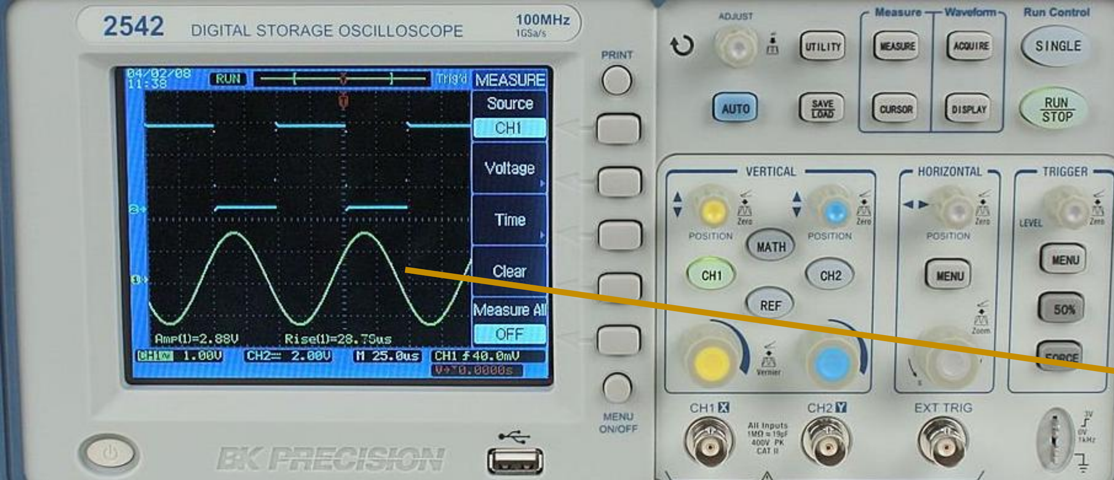






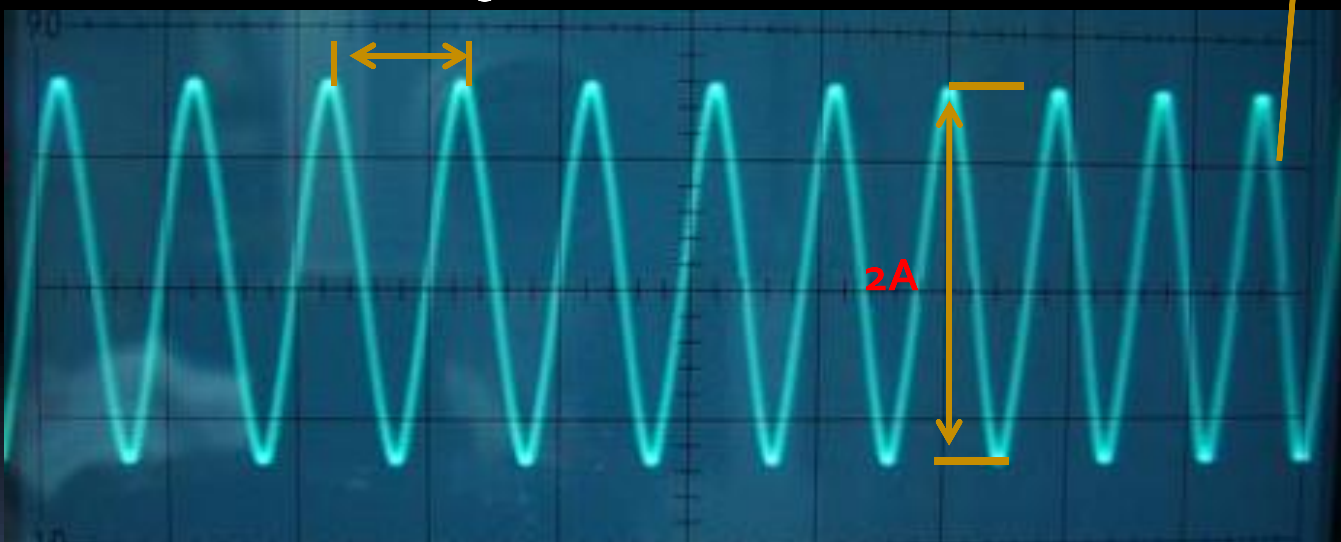
Longitud de onda larga

Longitud de onda corta



Frecuencias distintas

Longitud de onda



Expresión de la ecuación de una onda

$$\Psi = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \longrightarrow \Psi = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi x}{T v}\right)$$

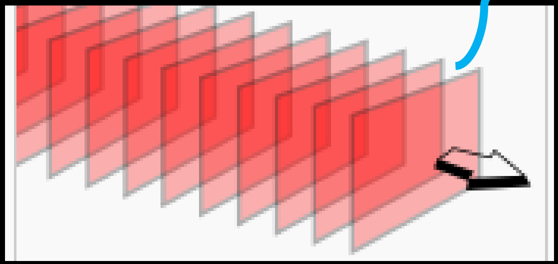
$$\Psi = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{T v}\right) \longrightarrow \boxed{\Psi = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$$

Introducimos el concepto de número de onda **k** $\longrightarrow$ $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\boxed{\Psi = A \sin(\omega t - k x)}$$

Representa el número de longitudes de onda en una distancia 2π

$$\boxed{\Psi = Re\left[A e^{i(t - kx)}\right]}$$



frente de onda o **superficie de onda** es el lugar geométrico en que los puntos del medio son alcanzados en un mismo instante por una determinada onda. Dada una onda propagándose en el espacio o sobre una superficie, los frentes de onda pueden visualizarse como superficies o líneas que se desplazan a lo largo del tiempo alejándose de la fuente sin tocarse.

El frente de onda está formado por puntos que comparten la misma fase $\longrightarrow$ $(\omega t - k x) = cte$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - k x) = 0 \rightarrow \omega - k \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \omega - k v = 0$$

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Velocidad de fase

Dos puntos vibrando en fase

Dos puntos vibrando en oposición de fase

En fase $\longrightarrow$ Cuando sus fases difieren en $2n\pi$

$$(\omega t - k x_1) - (\omega t - k x_2) = 2 n \pi \longrightarrow k(x_1 - x_2) = 2 n \pi$$

La separación entre los puntos ha de ser un número entero de longitudes de onda

En oposición de fase

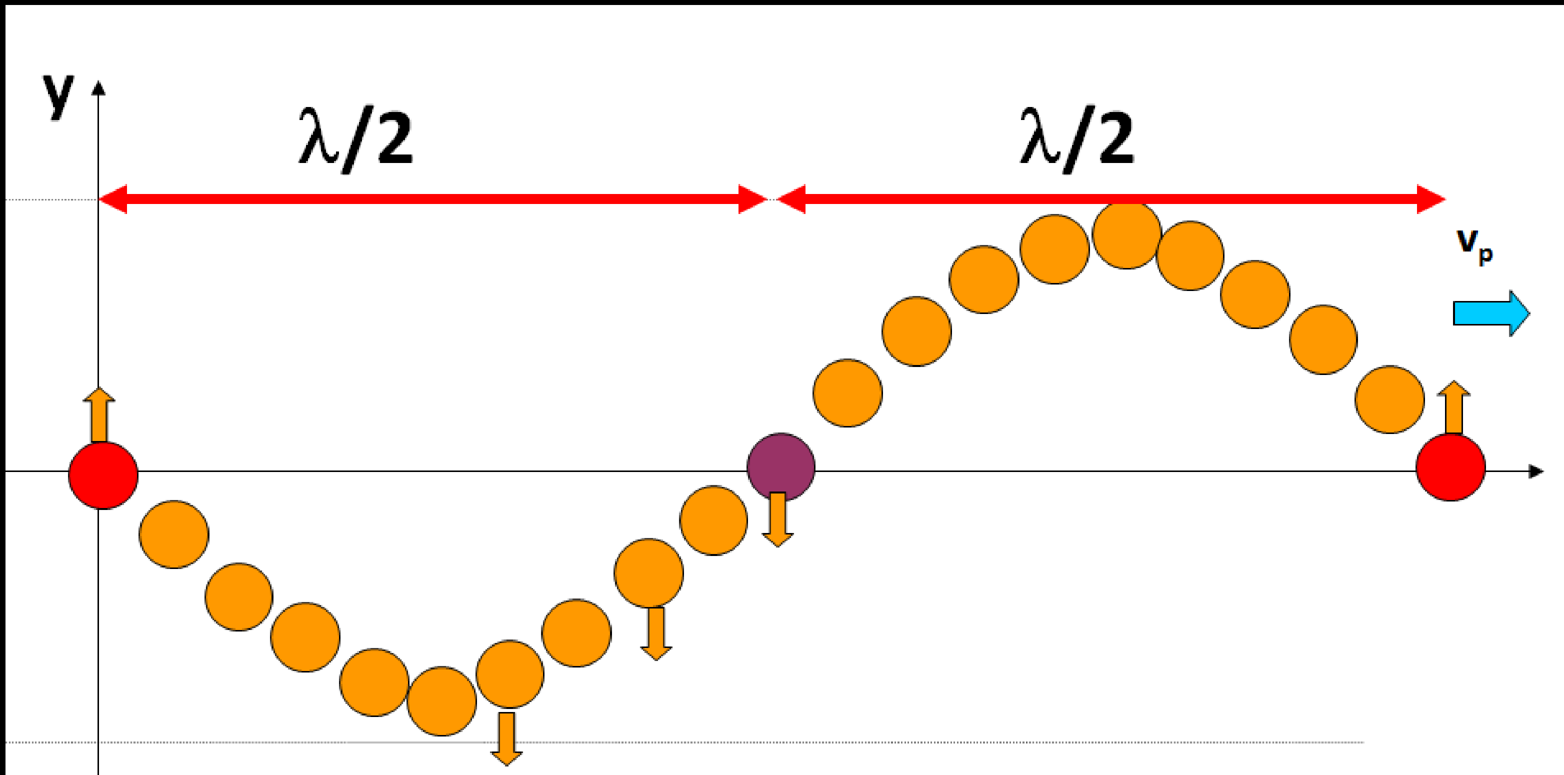
Cuando sus fases difieren en $(2n + 1)\pi$

$$(\omega t - k x_1) - (\omega t - k x_2) = (2n + 1)\pi$$

$$\downarrow$$

$$k(x_1 - x_2) = (2n + 1)\pi$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{(2n + 1)\pi}{k}}$$



DOS PUNTOS QUE VIBRAN EN *OPOSICIÓN DE FASE* ESTÁN SEPARADOS LA MITAD DE UNA LONGITUD DE ONDA (λ/2)

Un foco puntual realiza un movimiento periódico representado por la ecuación

$$y = 4 \cos 2\pi \left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240} \right) \quad (cm)$$

Pedimos:

1. La velocidad de propagación de la onda

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$k = \frac{2\pi}{240} \quad \omega = \frac{2\pi}{6}$$

$$v = \frac{2\pi(240)}{6(2\pi)} = 40\, cm/s$$

2. La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo es de 1s

$$\phi_1 = 2\pi \left(\frac{t_1}{6} + \frac{x}{240} \right) \qquad \phi_2 = 2\pi \left(\frac{t_2}{6} + \frac{x}{240} \right)$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{6}(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

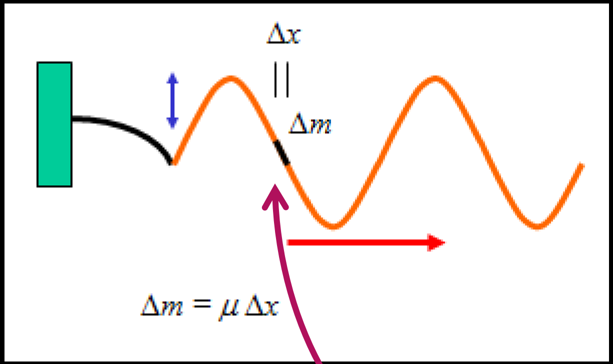
3. La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 210 cm

$$\phi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x_1}{240}\right)$$

$$\phi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x_2}{240}\right)$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{240}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{240} = \frac{7}{4}\pi$$

Energía transmitida por las ondas



- Disponemos de una cuerda por la que se propaga un movimiento ondulatorio.
- Cada elemento de la cuerda tiene un movimiento armónico de amplitud A y frecuencia ω
- La energía vibrando es $E = \frac{1}{2} k\, A^2$

  O bien $= \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2$

Aplicamos esto al segmento

$$E = \frac{1}{2} \Delta m\, \omega^2\, A^2 = \frac{1}{2} \mu\, \Delta x\, \omega^2\, A^2$$

- Cada segmento en la cuerda posee esta energía.
- Después de un intervalo de tiempo Δt la onda recorre una distancia $\Delta x = v\, \Delta t$

La energía transmitida de un punto a otro durante ese tiempo es

$$E = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2\,A^2\,v\,\Delta t$$

La energía transmitida por unidad de tiempo (POTENCIA) es

$$\boxed{P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2\,A^2\,v}$$

La rapidez de transferencia de energía de cualquier onda armónica es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y al cuadrado de la amplitud.

Determina la ecuación de una onda armónica que se propaga en el sentido negativo del eje x con una velocidad de 900 m/s, siendo su frecuencia de 400 Hz y su amplitud de 0.02 m. Además sabemos que para x=0 y t=0, la magnitud es de 0.02 m

Sometemos al extremo de una cuerda a un vibrador que le produce una onda sinusoidal. Si la ecuación de la vibración es

$$\Psi = 5 \sin 0{,}2\pi t$$

Propagándose en la cuerda con una velocidad de 10 m/s. Determina la ecuación de la onda producida y la diferencia de fase entre las oscilaciones de dos puntos separados 125 m.

Ondas Sonoras

- Ondas que se producen en un medio debido a variaciones de presión

- Puede demostrarse que la ecuación de ondas para esta situación es

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

K es el módulo de elasticidad de volumen
La velocidad de propagación es

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}}$$

Esta perturbación se propaga a través del medio como una onda longitudinal, y las ecuaciones que las representa es

$$D = D_m \sin\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

$$P = -k\,D_m\,\frac{\omega}{v}\cos\left(\frac{x}{v} - t\right)\omega$$

$$\rho = -\rho_0\,\frac{\omega}{v}\,D_m\cos\left(\frac{x}{v} - t\right)\omega$$

Impedancia acústica

La impedancia acústica de un medio en un punto es la relación entre la presión acústica en dicho punto y la velocidad que la partícula posee en ese instante

$$Z = \frac{P}{\dot{D}} \longrightarrow \frac{-k\,D_m\,\omega\ \cos\left(\frac{x}{v} - t\right)\omega}{-v\,D_m\,\omega\ \cos\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)}$$

$$Z = \frac{k}{v} \longrightarrow Z = \frac{k}{\sqrt{k/\rho_0}} = \sqrt{\rho_0\,k} = \rho_0\,v$$

La impedancia representa un índice de resistencia del medio

Intensidad acústica

Es la potencia transmitida por unidad de superficie normal a la dirección de propagación

$$\boxed{P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2\,A^2\,v} \longrightarrow I = \frac{1}{2}\,\rho_0\,\omega^2\,D_m^2\,v$$

Intensidad aplicada a la onda de desplazamiento

como $Z = \rho_0\,v \longrightarrow I = \frac{1}{2}\,Z\,\omega^2\,D_m^2$

La relación que existe entre presiones y desplazamientos es

$$P_m = k\,D_m\,\frac{\omega}{v} = Z\,v\,D_m\,\frac{\omega}{v} = Z\,D_m\,\omega$$

La intensidad para ondas de presiones es

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{P_m^2}{Z}$$

El oído humano

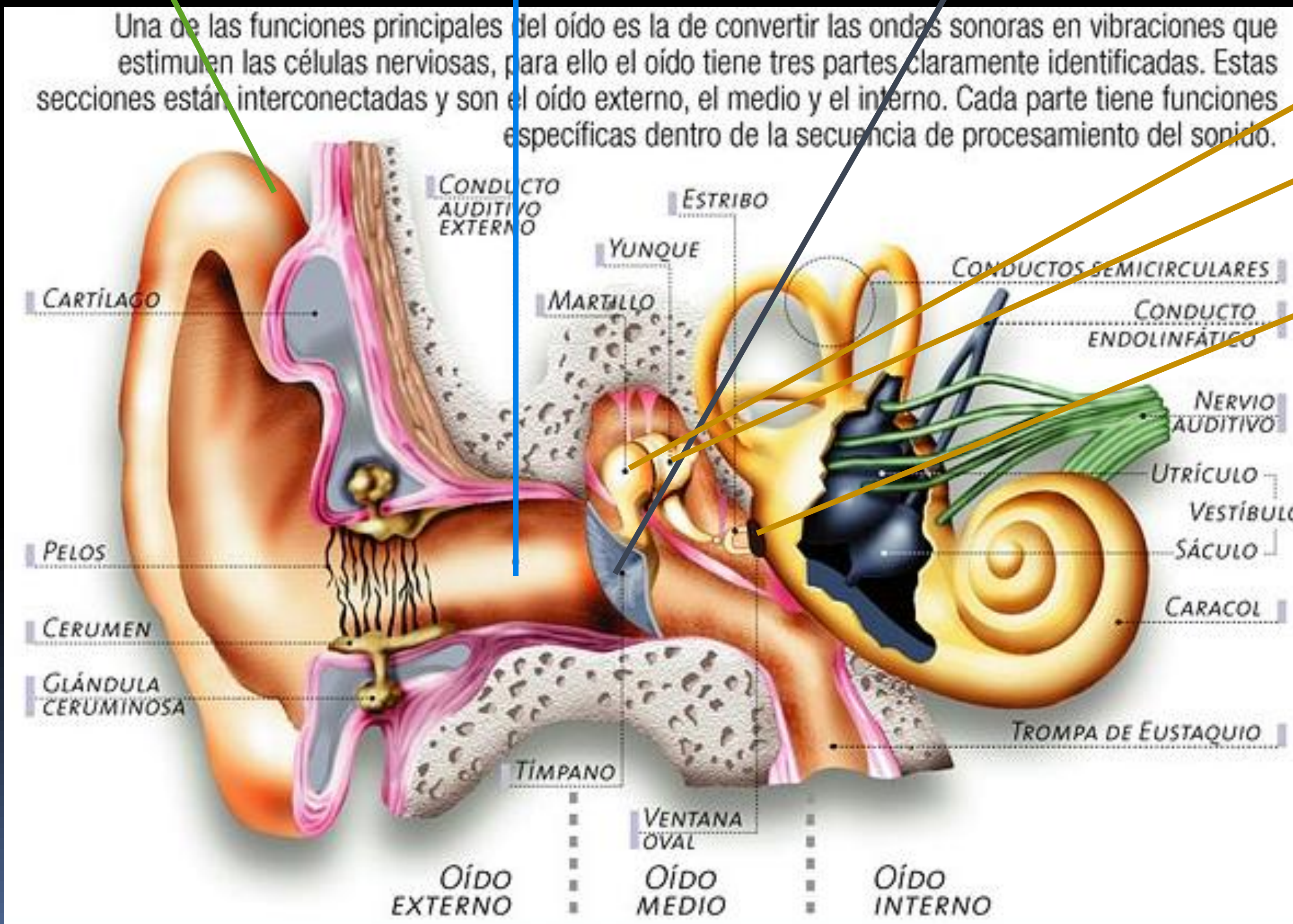
La onda sonora es captada por el pabellón auditivo

Llega a la membrana timpánica o tímpano

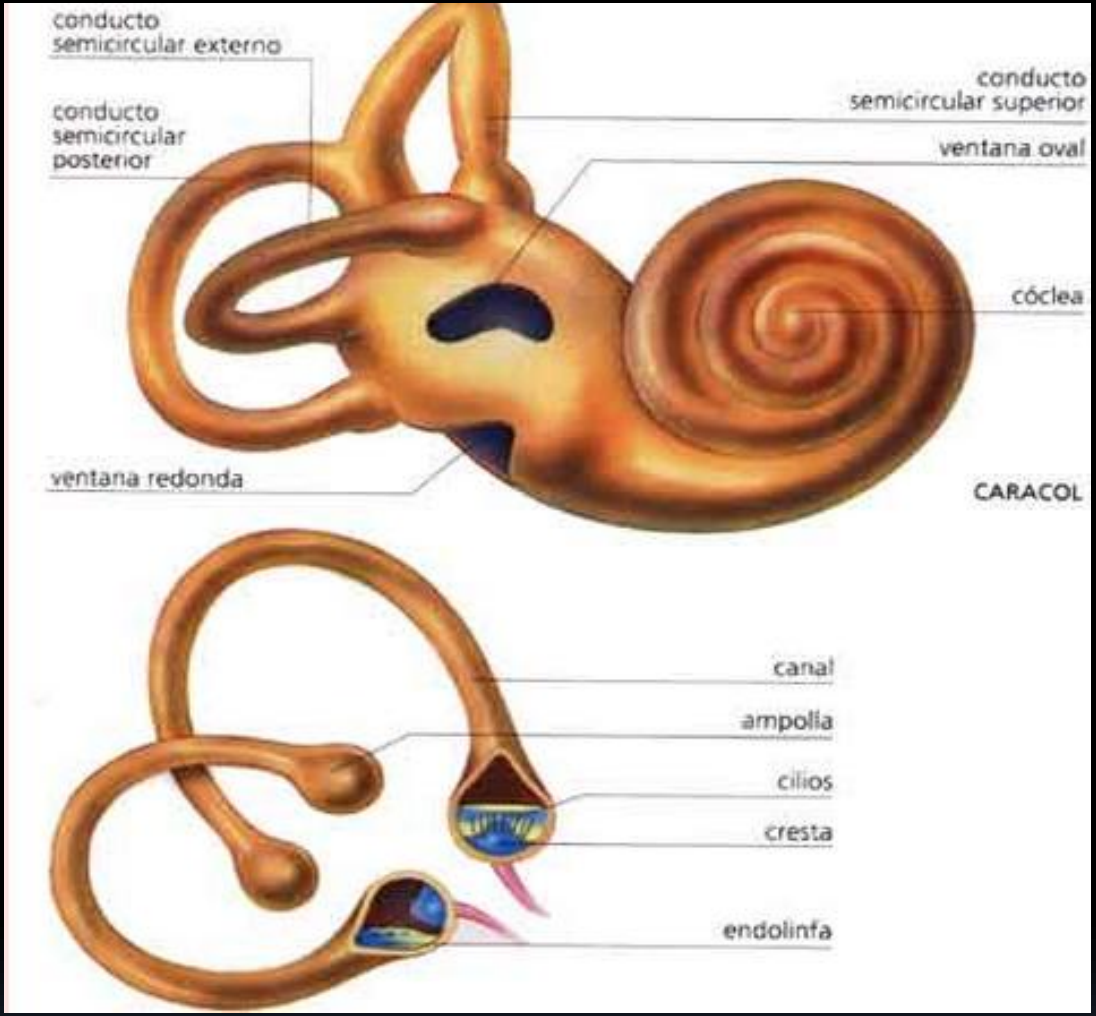
Pasa al conducto auditivo externo

Transmite la vibración hacia la cadena de huesecillos

1. Martillo
2. Yunque.
3. Estribo



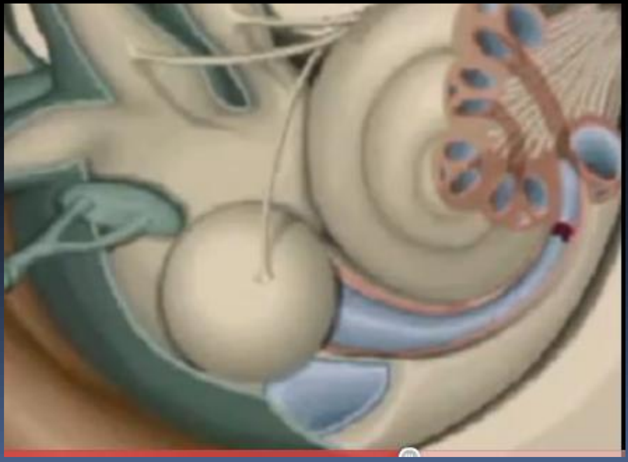
La vibración va del martillo al yunque de allí al estribo y del estribo (Hasta aquí oído medio)al oído interno y la onda sonora se convierte en un impulso mecánico



Las vibraciones que llegan al oído interno se transmiten a través del líquido de los canales que están alrededor de la cóclea, la presión de las ondas llega a la membrana basilar de la región timpánica y el líquido dentro del canal se agita estimulando el órgano de Corti que se encuentra dentro de la región coclear, aquí se produce un componente químico que convierte los movimientos en impulsos eléctricos siendo transmitidos por el nervio correspondiente al cerebro.



Mecanismo de audición


El oído humano es un instrumento registrador extremadamente sensible; es capaz de percibir vibraciones del aire del orden de 10^{-11} m, aunque evidentemente esta sensibilidad no es la misma para todos los individuos ni para todas las frecuencias. **Fletcher y Munson** (F&M) fueron los primeros investigadores que en los años 30 establecieron la sensibilidad humana a sonidos de diversa amplitud y frecuencia, demostrando que la sensibilidad del oído es extremadamente dependiente de la frecuencia, registrando una sensibilidad máxima entre 3 y 4 KHz. Por encima y debajo de estas frecuencias los sonidos se perciben más débilmente.

$$10^{-12}\ \frac{W}{m^2} \quad \rightarrow \quad \text{Intensidad mínima detectable por el oído}$$

$$10^{5}\ \frac{W}{m^2} \quad \rightarrow \quad \text{Intensidad máxima soportada}$$

La sensación de intensidad percibida no es proporcional a la variación de intensidad

" La magnitud de la sensación percibida es proporcional al logaritmo del estímulo que lo provoca" (Ley de Weber – Fechner)

$$L = k \log I$$

Nivel de sensación

Constante

$$I = 10^{-12} \Rightarrow L = -12\,k$$

$$I = 10^{5} \Rightarrow L = 5\,k$$

Deseamos la escala siempre positiva

$$\text{Como referencia } I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$$

$$L = k \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} L_i &= 0 \\ L_s &= 17k \end{aligned} \right.$$

Esta escala recibe el nombre de **BELS** o **BELIOS**

Si k=10, obtenemos otra escala que recibe el nombre **de DECIBELIOS**

$$\boxed{L = 10 \log \frac{I}{I_0}}$$

A partir de **1 W/mm** se produce una sensación dolorosa y se fija este nivel como el máximo tolerable **(Umbral de dolor**)

$$L = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \log 10^1 2 = (10)(12) \log 10 = 120db$$

Umbral dolor $\longrightarrow$ $\boxed{120db}$

El campo audible se extiende:

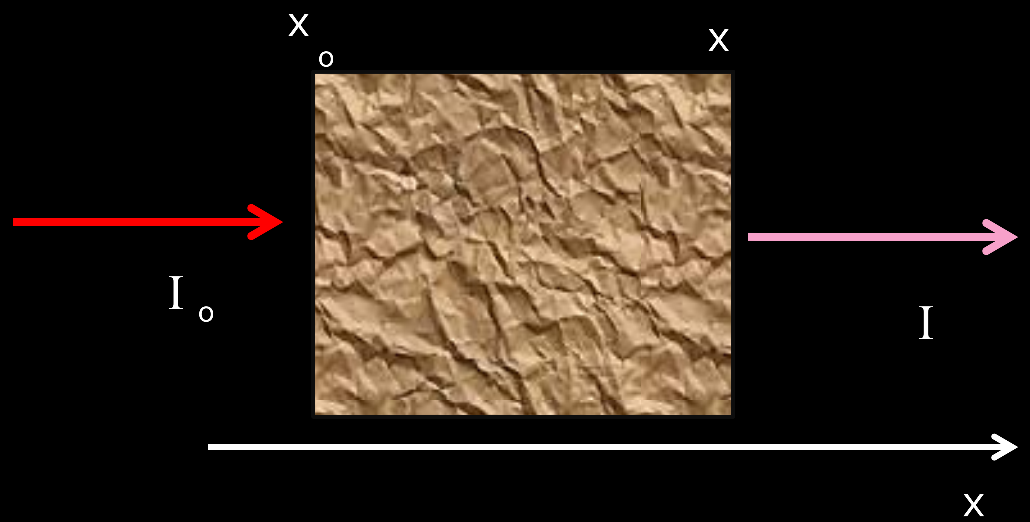
Crecimiento de hojas ______________________________ 10 db
Conversación ______________________________________ 50 db
Discoteca /actual) _________________________________ ? ?
Superficie portaaviones (despegando) ________________ 150 db

Fenómeno de absorción

Una onda con cierta intensidad
atraviesa un medio con la
consiguiente pérdida de intensidad

$$\boxed{I = I(x)}$$

$$\boxed{dI = \left(\frac{I}{\partial x}\right) dx}$$



Introducimos el coeficiente de absorción. indica
la cantidad de sonido_que absorbe
una superficie en relación con la incidente.

$$\boxed{\beta = -\frac{1}{I}\left(\frac{I}{\partial x}\right)}$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right) = -\beta I \rightarrow \frac{dI}{I} = -\beta\, dx \rightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\beta \int_{x_0}^{x} dx$$

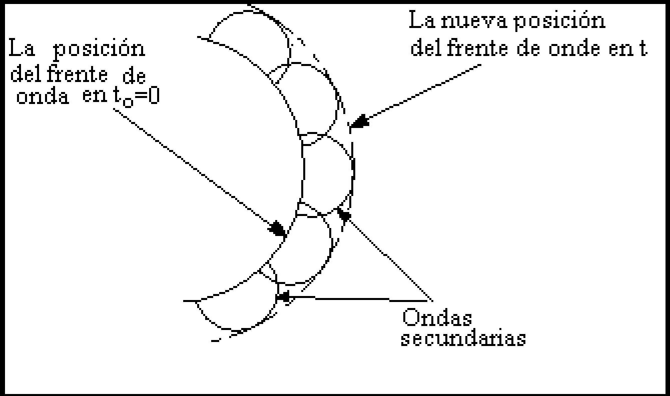
$$\ln \frac{I}{I_0} = -\beta\,(x - x_0)$$

$$\boxed{I = I_0\, e^{-\beta(x - x_0)}}$$

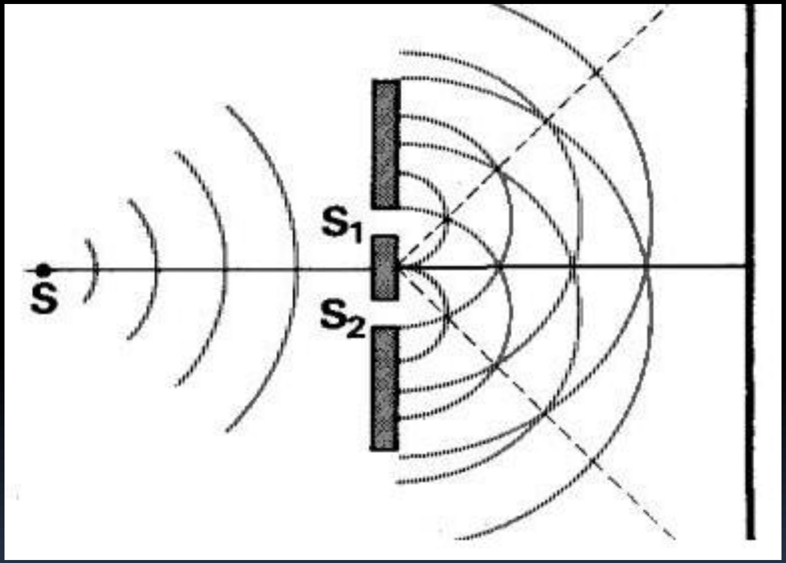
Una onda plana reduce su intensidad en un 30% al atravesar 5 cm de un determinado material. Determina la distancia que tendrá que recorrer la onda en dicho material para que su intensidad se reduzca a la mitad

Una onda plana reduce su intensidad al 10% al atravesar dos capas aislantes. La primera de ellas, que tiene un coeficiente de absorción de 230 (1/m), reduce a la mitad la intensidad incidente; si la segunda tiene un coeficiente de absorción de 170 (1/m), calcula el espesor total de las capas aislantes.

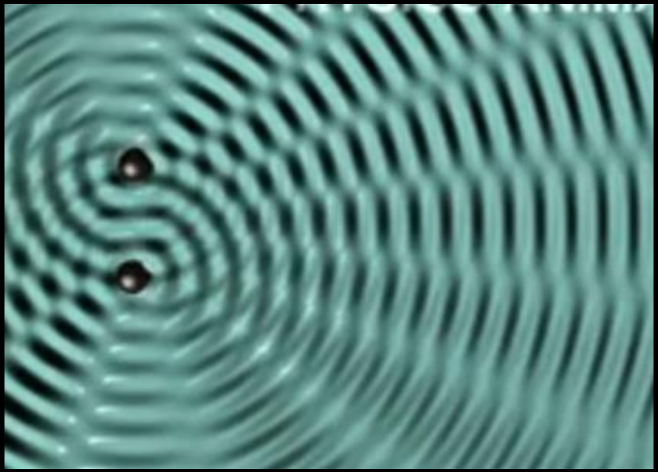
Principio de Huygens



Un frente de onda progresa como si cada uno de sus puntos emitiera ondas elementales, siendo la posición del nuevo frente de onda, al cabo de un cierto intervalo de tiempo, la envolvente de dichas ondas elementales.



Interferencias



Tratamos en este punto el efecto combinado de dos o más ondas que viajan en el mismo medio

Dos ondas planas de amplitudes A_1 y A_2 de la misma frecuencia y que se propagan en una misma dirección

$$\xi_1 = A_1\, e^{i(\omega t+\phi_1)} \qquad \xi_2 = A_2\, e^{i(\omega t+\phi_2)}$$

El **principio de superposición** de ondas establece que la magnitud del desplazamiento ondulatorio en cualquier punto del medio es igual a la suma de los desplazamientos en ese mismo punto de todas las ondas presentes. Esto es consecuencia de que la Ecuación de onda es lineal, y por tanto si existen dos o más soluciones, cualquier combinación lineal de ellas será también solución.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1\, e^{i(\omega t+\phi_1)} + A_2\, e^{i(\omega t+\phi_2)} = A\, e^{i(\omega t+\phi)}$$

Multiplicamos por sus expresiones conjugadas

$$A\,e^{i\phi}\,A\,e^{-i\phi} \;=\; A_1^2 \;+\; A_2^2 \;+\; 2\,A_1\,A_2\left[e^{-i(\phi_2-\phi_1)} \;+\; e^{i(\phi_2-\phi_1}\right]$$

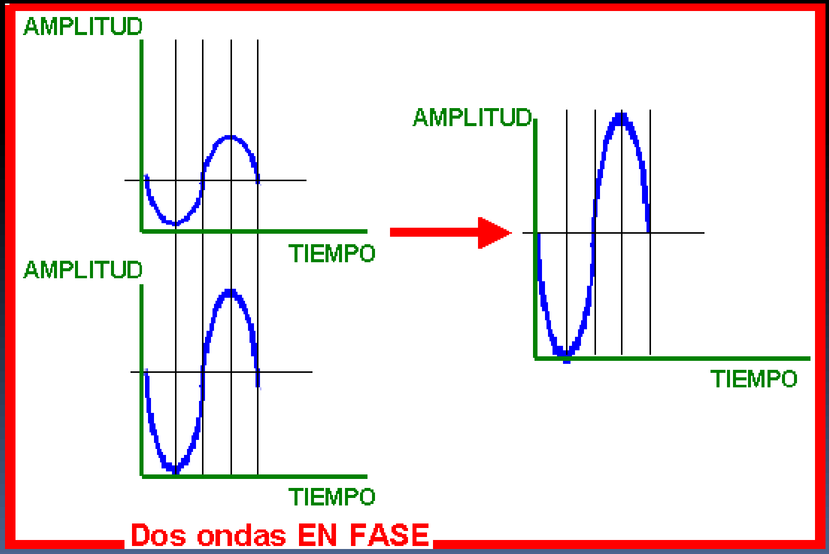
$$A^2 \;=\; A_1^2 \;+\; A_2^2 \;+\; 2\,A_1\,A_2\,\cos\delta$$

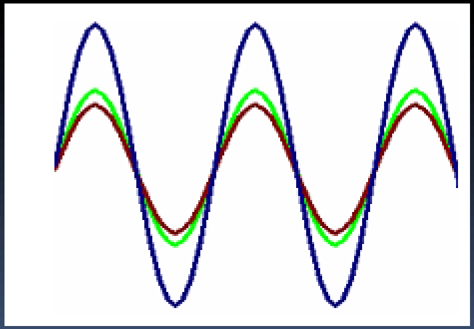
Donde
Es la diferencia de fase

$$\delta \;=\; \phi_2 - \phi_1$$

* No hay desfase

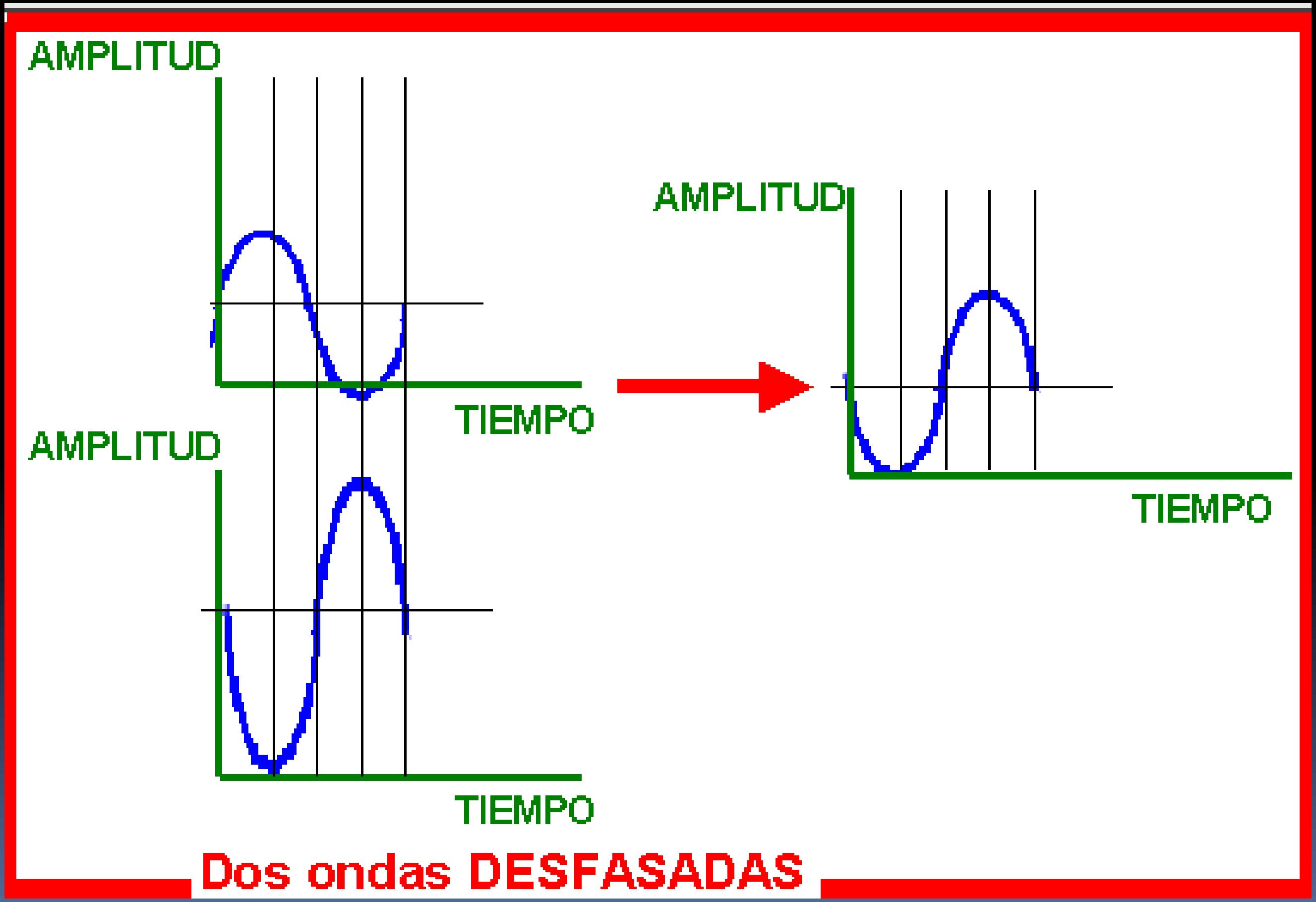
$$A^2 \;=\; A_1^2 \;+\; A_2^2 \;+\; 2\,A_1\,A_2 \;=\; (A_1 \;+\; A_2)^2$$



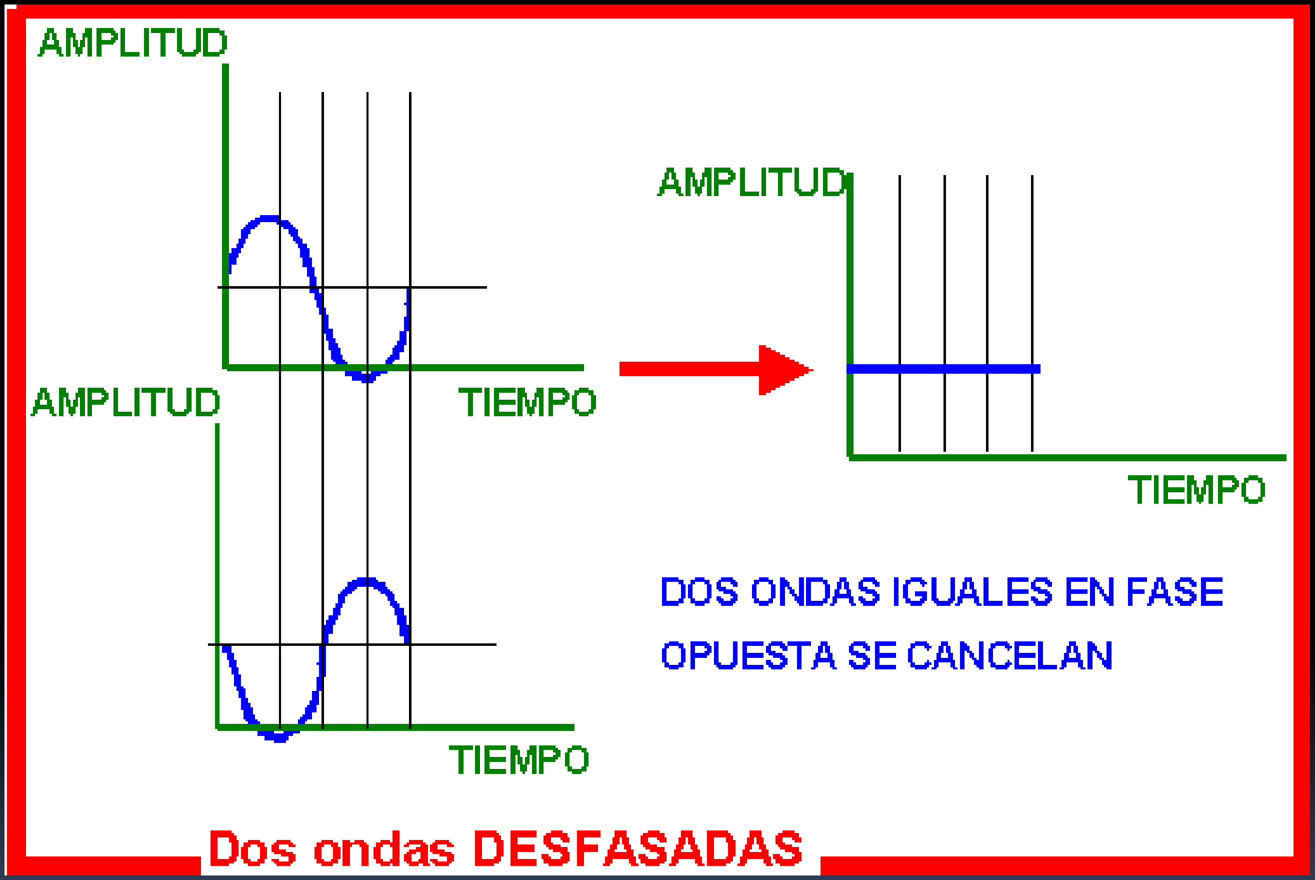


Supongamos un desfase π

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2\,A_1\,A_2 = (A_1 - A_2)^2$$



Si las amplitudes son iguales



Interferencia de ondas con frecuencias distintas

$$\xi_1 = A \sin(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$\xi_2 = A \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\xi = \xi_1 + x_2 = A \left[\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x)\right]$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$k_p = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$\xi = 2A \cos(\omega_m t - k_m x) sin(\omega_p t - k_p x)$$

$$\xi = 2A \cos(\omega_m t - k_m x)\, sin(\omega_p t - k_p x)$$

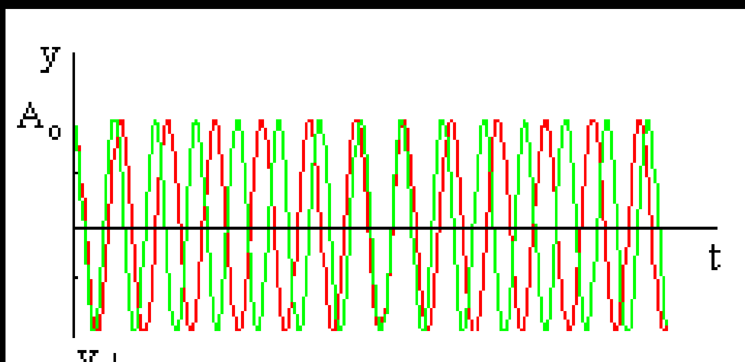
Velocidad de fase

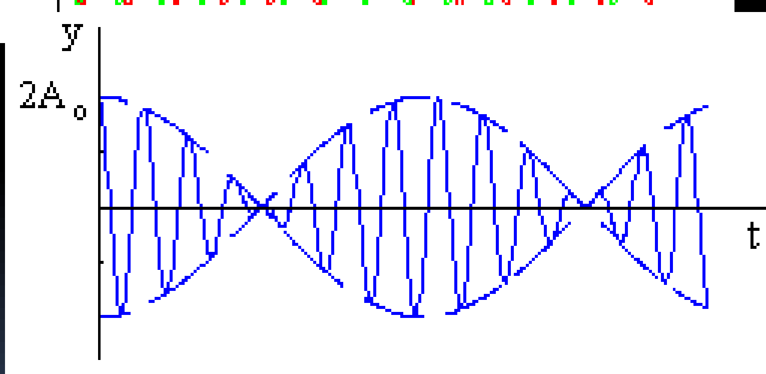
$$v_f = \frac{\omega_p}{k_p}$$

la onda moduladora viaja con una velocidad dada por

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m}$$

Velocidad de grupo





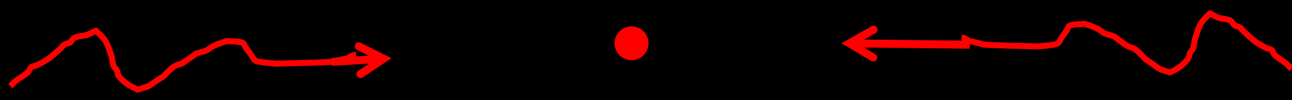
Interfieren dos ondas cuyas ecuaciones son

$$\xi_1 = 6\, sin(157t - 45)$$

$$\xi_2 = 10\, sin(157t - 30)$$

Determina la amplitud resultante , la fase del movimiento resultante y el valor de la elongación para t=0.01 s

Ondas estacionarias



Ondas iguales salvo el sentido de propagación

Se produce una interferencia

$$\xi_1 = A\, e^{i(\omega t - kx)}$$

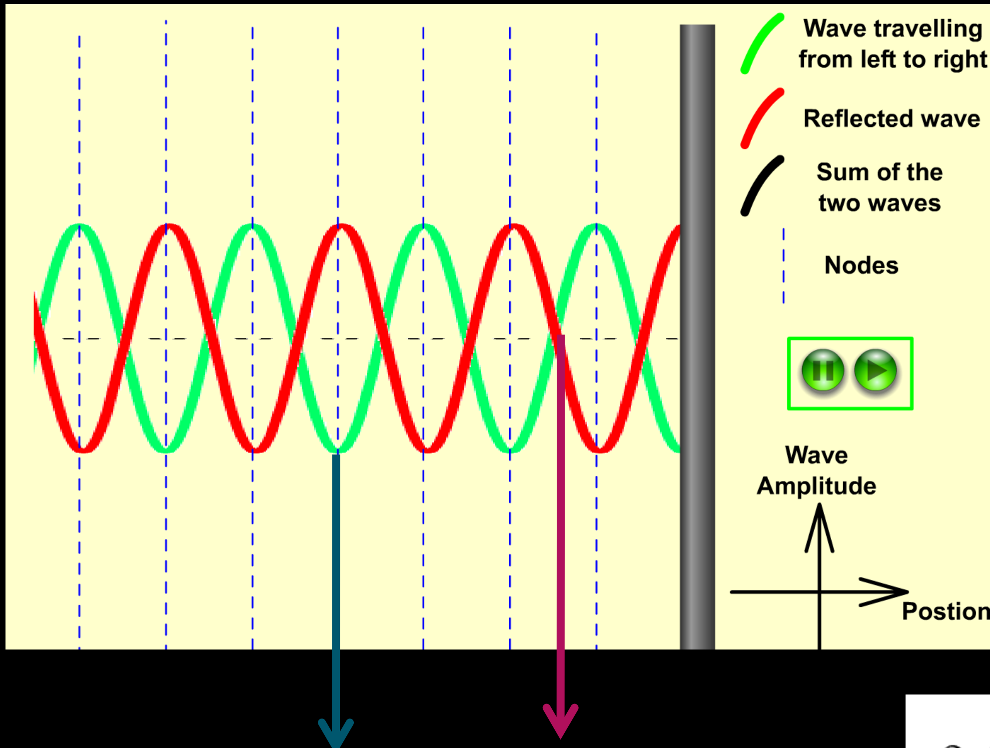
$$\xi_2 = A\, e^{i(\omega t + kx)}$$

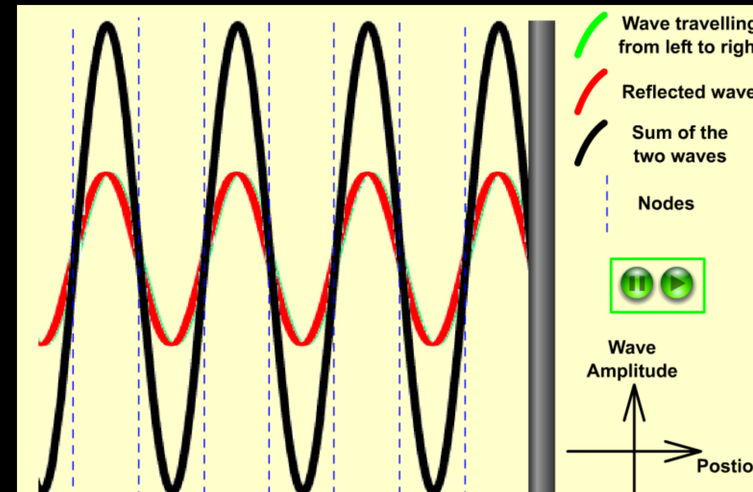
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\, e^{i(\omega t - kx)} + A\, e^{i(\omega t + kx)}$$

$$\xi = A\, e^{i\omega t}\left[e^{-ikx} + e^{ikx}\right]$$

Aplicamos teorema de Euler

$$\xi = 2\, A\, \cos kx\, e^{i\omega t}$$





Antinodos Nodos

$$2A\cos kx = 0 \Rightarrow \cos kx = 0$$

$$k\,x = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$x = \frac{2n+1}{4}\lambda$$

$$x_1 = \frac{\lambda}{4}$$

$$x_2 = \frac{3\lambda}{4}$$

Separación entre nodos

$$x_2 - x_1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

Una onda estacionaria tiene por ecuación

$$y = 10 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos 10\pi t$$

X, y se miden en cm y t en segundos. Determina: a) La amplitud y velocidad de las ondas componentes b) Distancia entre dos nodos y entre un nodo y un antinodo c) La velocidad de una partícula situada en el punto x= 3 cm en cualquier instante

a)

$$y_1 = 5 \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = 5 \cos(\omega t + kx)$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi}{\pi/6} = 60\, cm/s$$

$$10\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{6}x = \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$n = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{2+1}{2}(6) = 9\,cm$$

$$n = 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{4+1}{2}(6) = 15\,cm$$

$$\Delta x = 15 - 9 = 6cm$$

$$v = \frac{d\xi}{dt} = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin 10\pi t\,(-10\pi)$$

$$x = 3 \;\Rightarrow\; v = 0$$

La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos es

$$y = 0{,}5 \sin 0{,}025x \cos 500t$$

X e y en cm y t en segundos. Halla la velocidad y la amplitud de las ondas móviles cuya combinación da como resultado la onda estacionaria. Determina la distancia entre nodos sucesivos en la cuerda

---

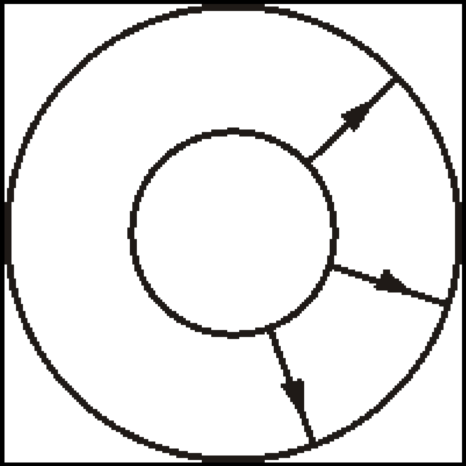
Una onda estacionaria tiene por ecuación

$$y = 10 \sin(\pi x/6) \cos 10\pi t$$

X,y en cm y t en segundos. Determina la distancia entre nodos y entre un nodo y antinodo. Determina la velocidad de una partícula situada en el punto x=3 cm en cualquier instante

Reflexión y refracción

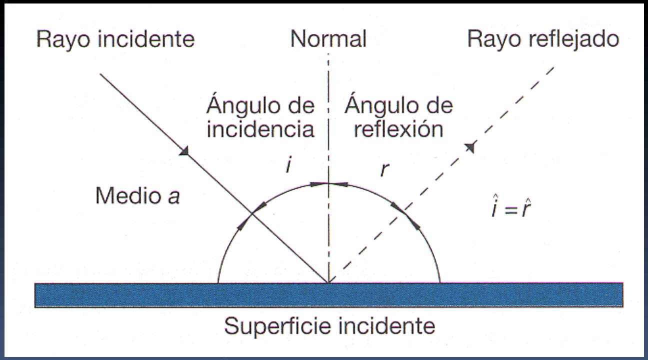
E. Malus , basándose en el principio de Huygens, establece :
Tracemos líneas perpendiculares a los frentes de onda (ellas corresponden a las líneas de propagación de la onda y que llamamos rayo. **El teorema de Malus nos dice:**



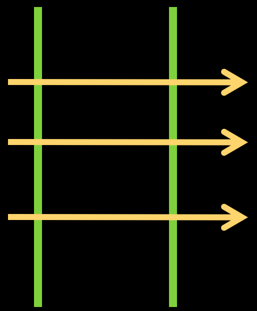
"El tiempo empleado entre dos frentes de onda por cada uno de los rayos que los unen es siempre el mismo"

Cuando una onda llega a una superficie de separación de dos medios, parte de ella se refleja y parte se refracta (pasa al otro medio)

Consideramos una onda plana incidiendo sobre una superficie plana

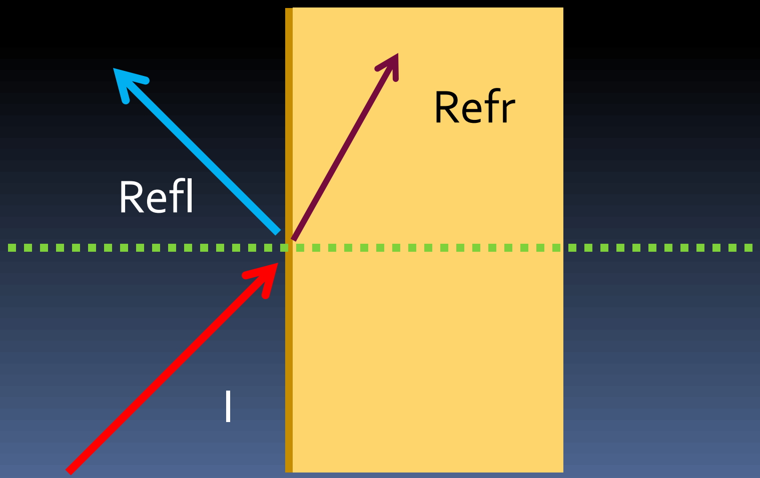


A una distancia grande del foco puntual , una parte del frente puede ser sustituido por un plano y los rayos son líneas paralelas



Una onda plana se propaga en línea recta en la dirección de los rayos

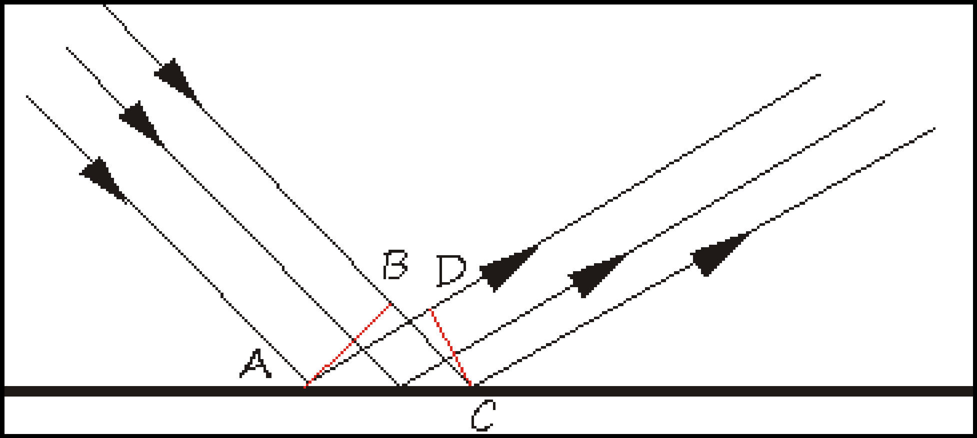
La onda incide sobre una superficie que separa dos medios, parte de la onda se refleja y parte se transmite



Rayo **reflejado** forma un ángulo con la normal a la superficie igual que el que forma el rayo incidente.

Rayo **refractado** se aleja o acerca a la normal dependiendo de la velocidad en el segundo medio

Reflexión



Consideramos los dos frentes de ondas **AB** y **CD** **así como los rayos presentados**

El tiempo empleado por dichos rayos entre el frente AB y CD ha de ser el mismo por el teorema de Malus

La velocidad de los rayos es la misma ya que se propagan en el mismo medio

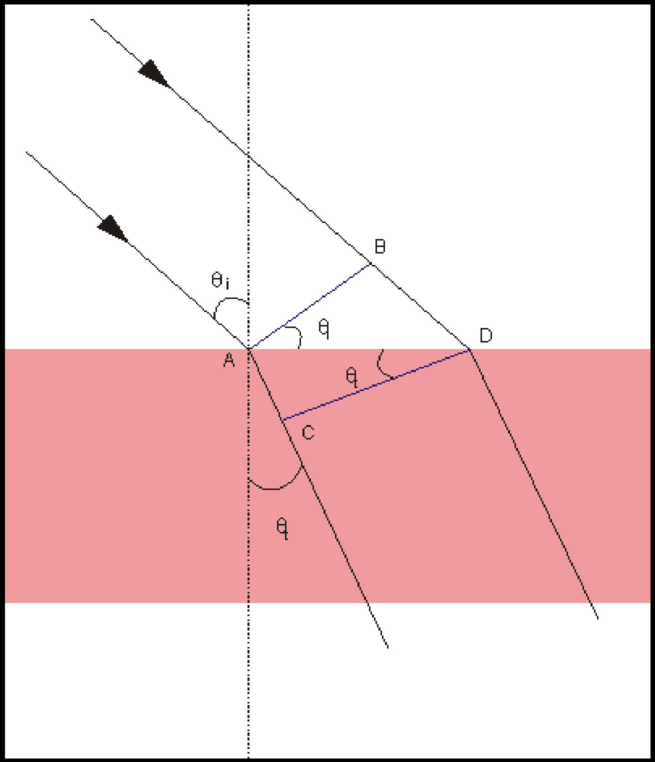
Por tanto la distancia recorrida ha de ser idéntica. Esto ocurre si **el ángulo de incidencia y el reflejado son idénticos**

Refracción

Los tiempos empleados por los rayos han de ser iguales, pero no la velocidad

Las distancias por tanto serán diferentes

$$t_1 = \frac{BD}{v_1} = t_2 = \frac{AC}{v_2}$$



$$\sin\theta_i = \frac{BD}{AD}$$

$$\sin\theta_t = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$v_1 = \frac{c}{n_1}$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2}$$

$$\boxed{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Resumiendo

- Los rayos incidente, reflejado y transmitido están en el mismo plano, perpendicular a la superficie de separación.

- Los ángulos incidente y reflejado son iguales.

$$\theta_i = \theta_r$$

- Los ángulos incidente y transmitido están relacionados por la ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$