MEDIDAS

$$\frac{(A)}{(A)_0} = n$$

(A) → Cantidad de la magnitud A

n → Número, **MEDIDA**

$(A)_0$ → Cantidad de la magnitud A tomada como referencia. **UNIDAD**

- Las mediciones no son perfectas. Llevan asociadas un determinado error, una incertidumbre.
- Los motivos son variados

Imperfecciones de nuestros sentidos → **Error accidental**

Imperfecciones de los aparatos → **Error Sistemático**

Error.- La desviación existente entre el resultado de la medición de una magnitud y el verdadero valor de ésta

Al medir una magnitud física, nuestro objetivo radica en escribir

Valor aceptado

Verdadero valor de la magnitud $\longleftarrow$ $$X_V = X^* \pm \epsilon$$ $\longrightarrow$ Estimación del error cometido

Suponemos que el verdadero valor se encuentra en el intervalo

$$X_V \in (X^* - \epsilon, X^* + \epsilon)$$

Cuando escribamos estos resultados debemos tener en cuenta:

- La última cifra significativa (aquella distinta de cero, en el caso de ser cero ha de estar situado entre dígitos no nulos, o estar situado detrás de dígitos no nulos y a la derecha de la coma. Si se tratara de cifras enteras, si está situado detrás de dígitos no nulos) del valor esperado y la última del error han de ser del mismo orden decimal.
- El error ha de tener una única cifra significativa. Se acepta que si la primera cifra significativa del error es un ‘1’, se incluya otra cifra.
- Los resultados se expresarán en notación científica.
- El resultado debe ir acompañado por las unidades

Como hemos comentado, para medir debemos comparar con un **patrón**

Nº patrones elevado

Muchas magnitudes están relacionadas

Se reduce el número de patrones a un mínimo

Conforma un Sistema de Unidades. En nuestro caso el **S.I.**

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	Bujía	cd
Cantidad de materia	Mol	mol

Leyes fundamentales → Dispuestas en una serie de ecuaciones en las que intervienen magnitudes y constantes

Formamos un sistema de magnitudes fundamentales establecidas a partir de la diferencia entre las magnitudes que intervienen en las leyes fundamentales y el número de ecuaciones → **Base dimensional**

$$(x_1,\, x_2 \ldots x_m)$$

La fórmula dimensional de la magnitud x_r en la base anterior es

$$[x_r] \;=\; [x_1]^{c_1} \ldots [x_m]^{c_m}$$

Los exponentes forman lo que denominamos dimensión de la magnitud en la base dada

Ecuación de dimensiones de la Fuerza

$$[F] = [m]\,[a]$$

$$[F] = M\,LT^{-2}$$

$$[m] = M$$

$$[v] = LT^{-1}$$

$$[a] = LT^{-2}$$

Dimensión en la base (m, l, t)

$$(1, 1, -2)$$

"Todas las fórmulas físicas han de ser dimensionalmente homogéneas"

Principio de homogeneidad

Sus términos han de tener idénticas dimensiones

En un momento determinado, un estudiante duda acerca de la fórmula del período del péndulo compuesto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Utiliza el principio de homogeneidad para resolver la cuestión

---

Primer miembro, dimensiones $[T] = T$ (0, 0, 1)

Segundo miembro Opción 1 $$\left[2\pi\sqrt{\frac{mgd}{I}}\right] = \sqrt{\frac{M(LT^{-2})L}{ML^2}} = T^{-1}$$ (0, 0, -1)

Segundo miembro Opción 2 $$\left[2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\right] = \sqrt{\frac{ML^2}{MLT-2L}} = T$$ (0, 0, 1)

Medidas directas $\longrightarrow$ Aquella que se obtiene por lectura directa en un cierto apartado

Precisión del aparato $\longrightarrow$ La mínima desviación medible en la escala graduada del instrumento

Determinación del valor esperado

El valor esperado se identifica con la media aritmética de los valores medidos $$X^* = x = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$$

Una medida de la dispersión de los datos es la desviación cuadrática media $$s^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x)^2$$

La raíz cuadrada de la desviación cuadrática es la desviación típica

$\Downarrow$

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x)^2}$$

Cuando N es pequeño

$$\longrightarrow s(X) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x)^2}$$

¿Por qué N-1 y no N?

De forma cualitativa, si sólo disponemos de un dato

N -1 $\longrightarrow$ 0 y la sumatoria también $\Rightarrow$ Indeterminación

N $\longrightarrow$ 1 La sumatoria $\longrightarrow$ 0 $\Rightarrow$ S(X) $\longrightarrow$ 0

Absurdo

Conocida la desviación típica de los datos, interesa saber la desviación típica de la media

$$s(x) = \frac{s(X)}{\sqrt{N}}$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^{N-1} (x_j - x)^2}$$

Estimación del error absoluto

La estimación que se haga del error absoluto dependerá del número N de medidas realizadas

- Establecemos el límite de error instrumental

LEI es el asociado a la propia precisión del aparato

- Tomamos medidas del orden de tres y obtenemos las desviaciones con respecto a su promedio

- Establecemos el límite de error estadístico como ⇒ LEE = 2 S(x)

- Si el LEE es inferior al LEI no es necesario aumentar el tamaño de la muestra

$$\boxed{x = \bar{x} \pm (L.E.I.)}$$

- Si el LEE es superior al LEI se aumentará el número de medidas hasta alcanzar la condición anterior

$$\boxed{x = \bar{x} \pm (L.E.I. + L.E.E)}$$

Número de Medidas

En muchos casos puede surgir la duda en la determinación directa de una magnitud física sobre el número de medidas que se han de realizar

Establecemos la dispersión de los datos

$$D_m = \frac{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}}{2}$$

Definimos una dispersión d en tanto por ciento

$$d = \frac{D_m}{x} \times 100$$

Donde x es como siempre la media de los valores medidos de la magnitud X

Se efectúan tres medidas de la magnitud X y calculamos d.

- Si $d < 2\,\%$ estas tres medidas son suficientes.
- Si $2\,\% < d < 8\,\%$ seis medidas serían suficientes.
- Si $8\,\% < d < 15\,\%$ quince medidas serían suficientes.
- Si $d > 15\,\%$ hay que realizar un gran número de medidas ($N \simeq 50$).

Medidas indirectas

Si medimos una magnitud que está ligada mediante cierta función matemática con otras magnitudes, realizamos en tal caso una medida indirecta de dicha magnitud.

$$A = f(x, y, z, \ldots)$$

Las medidas de las magnitudes x, y, z son

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_o \pm \Delta x \\ y &= y_o \pm \Delta y \\ z &= z_o \pm \Delta z \end{aligned} \right.$$

Nuestro objetivo se centra en determinar el valor de A

$$\boxed{A = (A_o \pm \Delta A)}$$

El valor de A_o es $\longrightarrow$ $$A_o = \frac{y_o \sqrt{x_o}}{z_o}$$

El error lo determinamos utilizando el cálculo diferencial

$$dA = \left|\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{y,z}\right| dx + \left|\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x,z}\right| dy + \left|\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{x,y}\right| dz$$

$$\left|\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{y,z}\right| = \frac{y}{2z\sqrt{x}} \qquad \left|\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x,z}\right| = \frac{\sqrt{x}}{z} \qquad \left|\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{x,y}\right| = \frac{y\sqrt{x}}{z^2}$$

Introducimos estos valores y en buena aproximación sustituimos los diferenciales por incrementos, para tratar a estos como errores

$$\Delta A = \frac{y}{2z\sqrt{x}}\Delta x + \frac{\sqrt{x}}{z}\Delta y + \frac{y\sqrt{x}}{z^2}\Delta z$$

para su cálculo

$$\Delta A = \frac{y_o}{2z_o\sqrt{x_o}}\Delta x + \frac{\sqrt{x_o}}{z_o}\Delta y + \frac{y_o\sqrt{x_o}}{z_o^2}\Delta z$$

GRÁFICAS

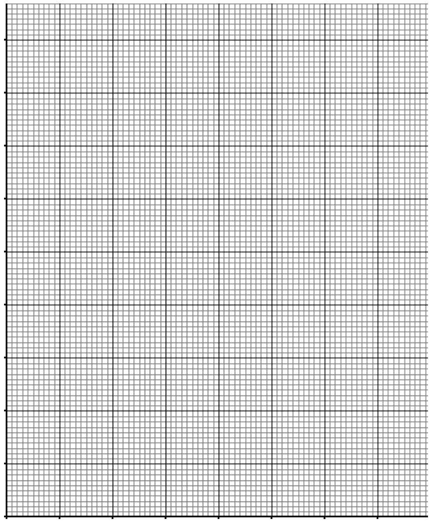
En muchos casos, el objetivo de alguna práctica o medición es encontrar cierta relación entre dos magnitudes físicas

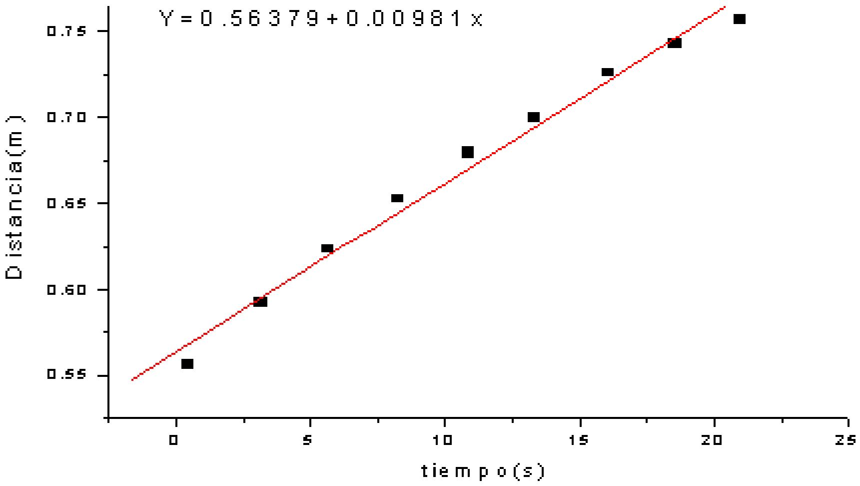
En esta situación es conveniente emplear una gráfica en la que se representen las parejas de valores (x_j, y_j) cuyo análisis facilitará el estudio de la mencionada relación.

Tipos de Representaciones gráficas.

Lineal:

En una gráfica lineal, distancias iguales tomadas sobre ambos ejes representan intervalos iguales, siendo este el tipo de representación gráfica usada habitualmente.

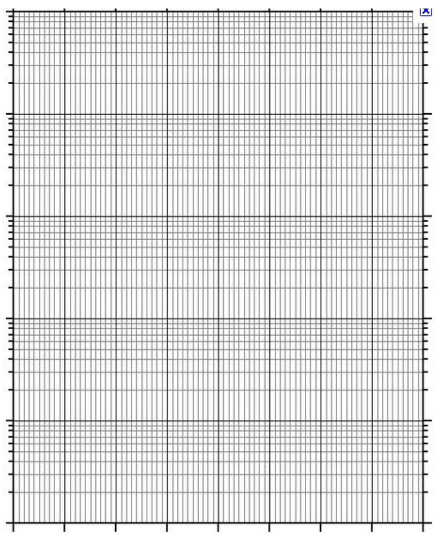




Logarítmica:

En este caso, las escalas horizontales y verticales no son lineales, sino logarítmicas: así distancias iguales no representan intervalos iguales. En la gráfica se representa no el par ordenado (x_j, y_j) sino $(\log_{10} x_j, \log_{10} y_j)$

Usamos papel como el indicado en la figura. Es papel adecuado (papel logarítmico), el cual ya está preparado para no tener que efectuar ninguna operación intermedia. Las gráficas logarítmicas son útiles a la hora de representar relaciones del tipo



$$Y = \alpha X^q$$

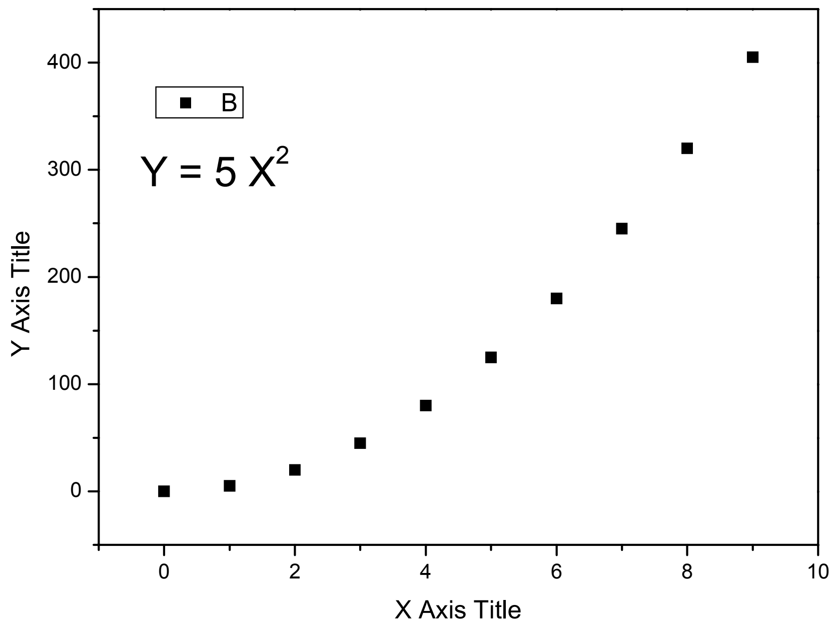
$$Y = \log_{10} \alpha + q \log_{10} X$$

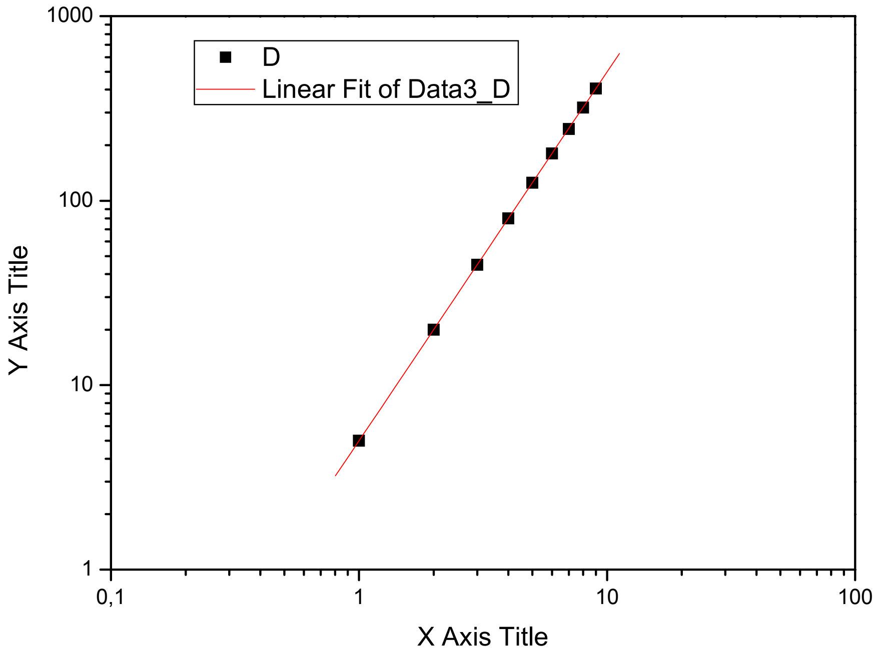
y así la gráfica sería una recta de pendiente q

Logarítmica $(\log_{10} X_i, \log_{10} Y_i)$

Útiles para expresar relaciones $Y = a X^q$

$$\log_{10} Y = \log_{10} a + q \log_{10} X$$



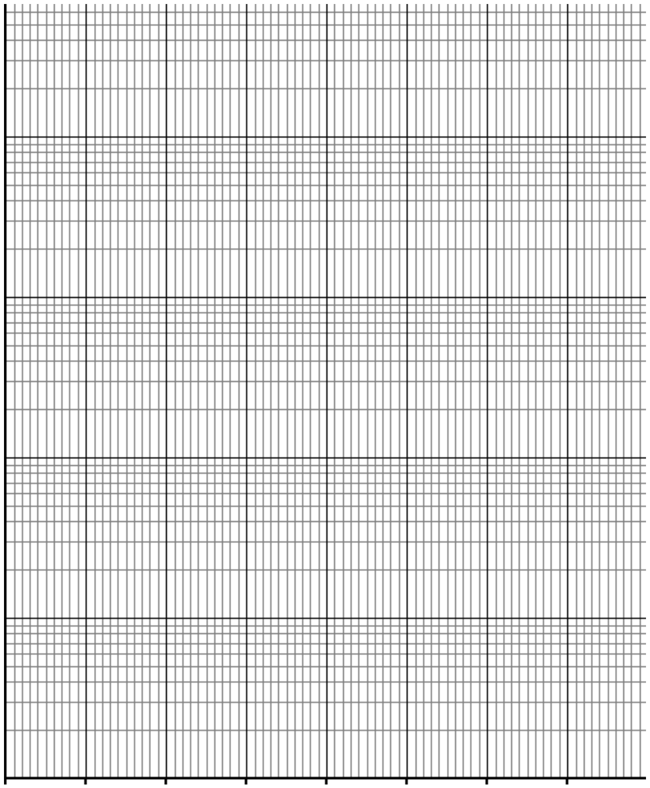


$$\log_{10} Y = \log_{10} 5 + 2 \log_{10} X$$

Semilogarítmica:

Una de las escalas es lineal y la otra es logarítmica. De esta manera (suponiendo que el eje lineal es el de abcisas) representamos los puntos $(x_j, \log_{10} y_j)$

Al igual que existe un papel logarítmico, se tiene papel semilogarítmico preparado a este efecto



Las gráficas semilogarítmicas son útiles a la hora de representar dependencias exponenciales del tipo

$$Y = A\beta^X$$

$$Y = \log_{10} A + (\log_{10} \beta)\, X$$

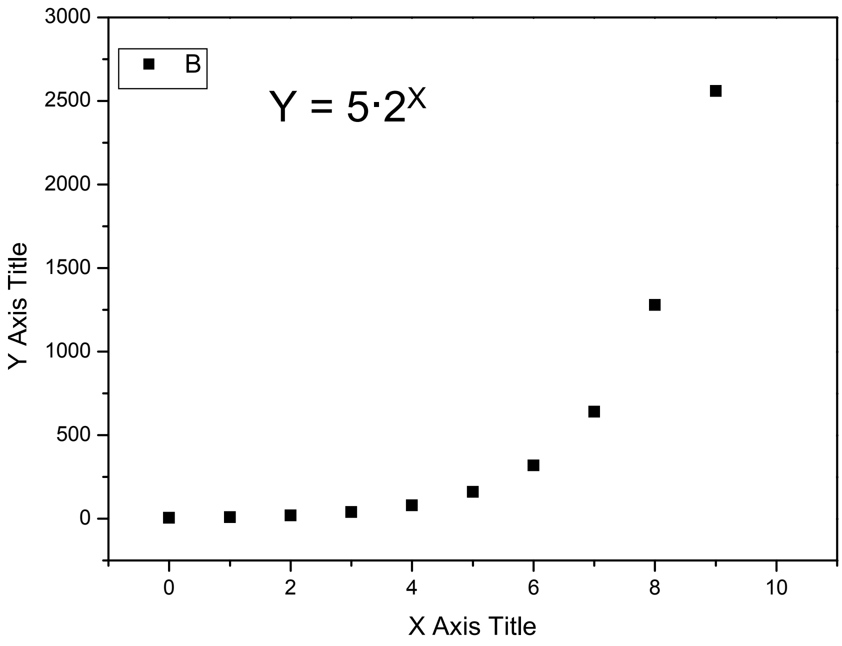
y así la gráfica será una recta de pendiente

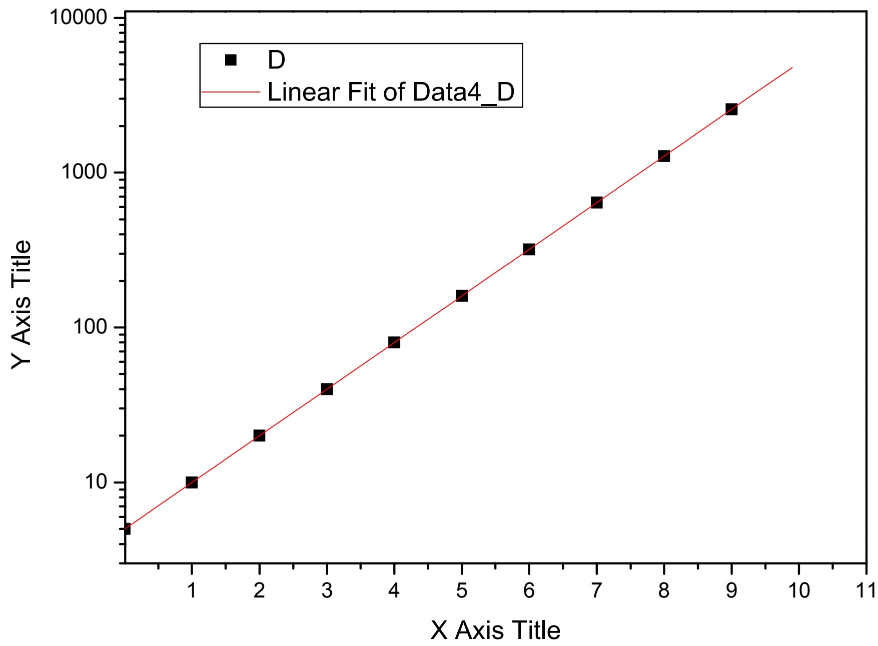
$$\log_{10} \beta$$

Semilogarítmica $(X_i, \log_{10} Y_i)$

Útiles para expresar relaciones $Y = a\,B^X$

$Y = \log_{10} a + (\log_{10} q)\, X$



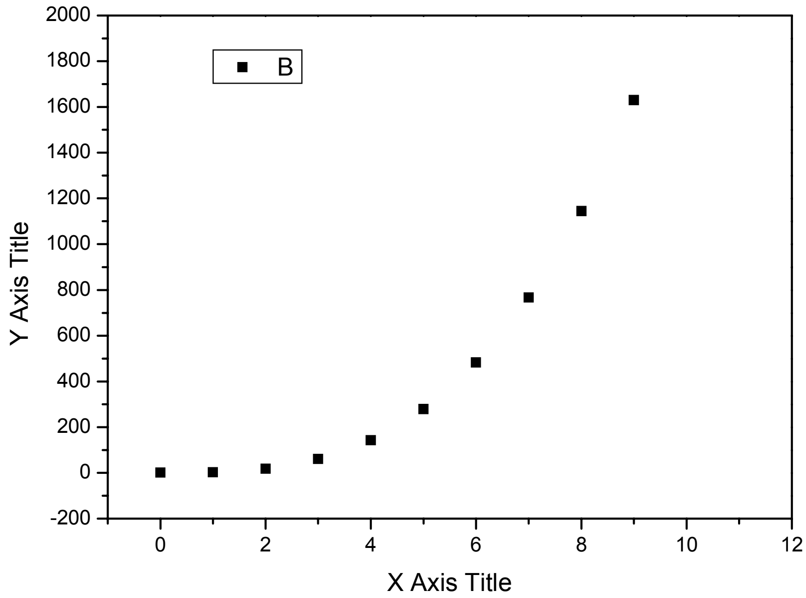


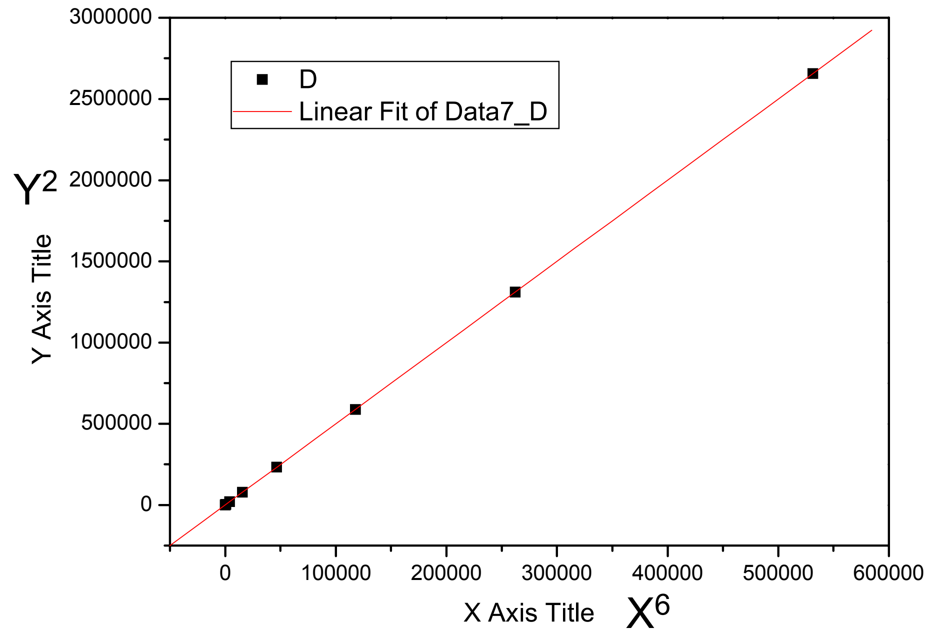
$Y = \log_{10} 5 + (\log_{10} 2)\, X$

Otros tipos de dependencia

$Y = (A + B X^4)^{1/2}$ $\longrightarrow$ representamos Y^2 frente a X^4

$Y = (2 + 5X^6)^{1/2}$





Representaciones Graficas:

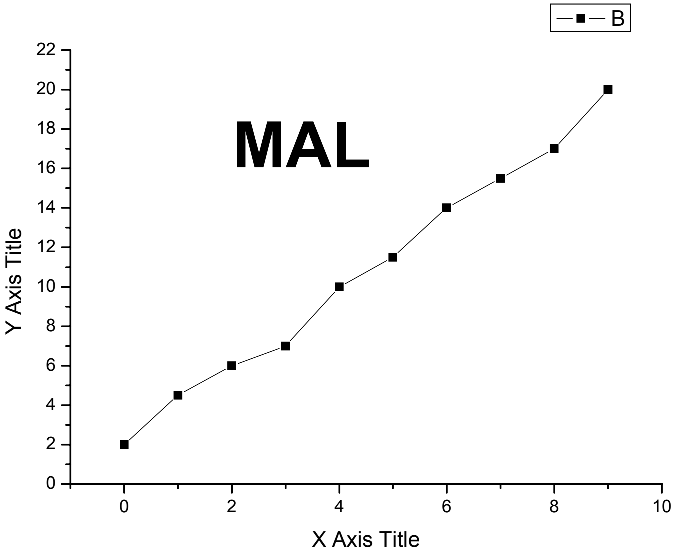
- Marcar claramente los puntos experimentalmente obtenidos

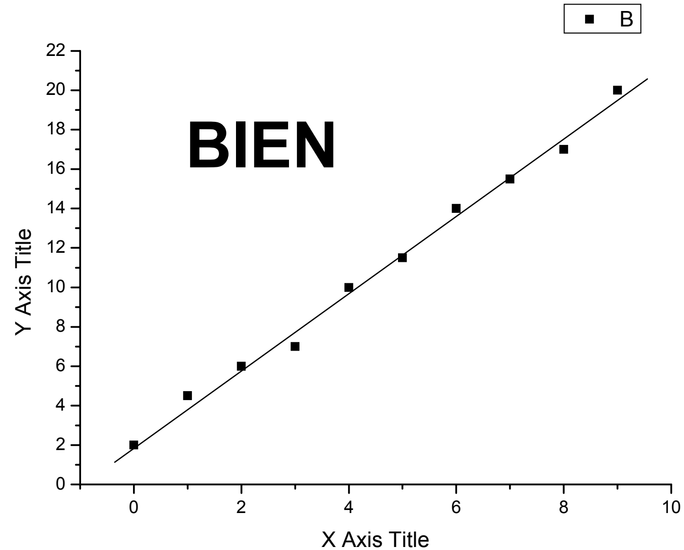
- Escoger una escala adecuada, los ejes NO tienen porque empezar en el punto (0,0)

- Los puntos experimentales se “unirán”, si es posible, mediante una curva Teórica que siempre deberá estar menos remarcada que dichos puntos experimentales

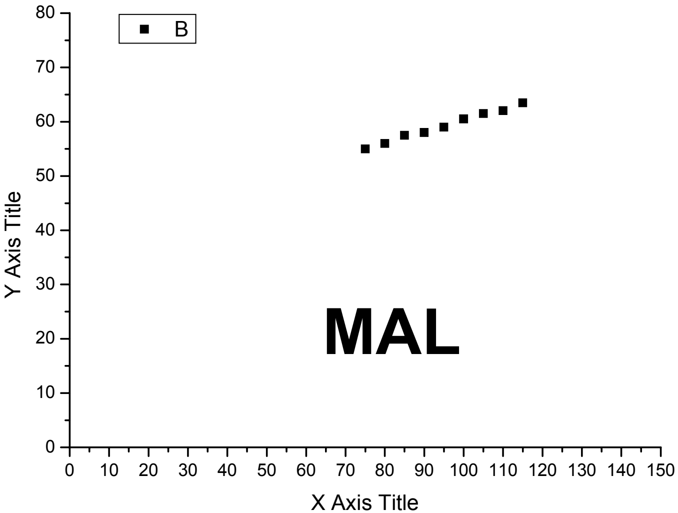
- **Importante:** los puntos experimentales están afectados por su error por lo que es lógico que **no coincidan** con la curva teórica

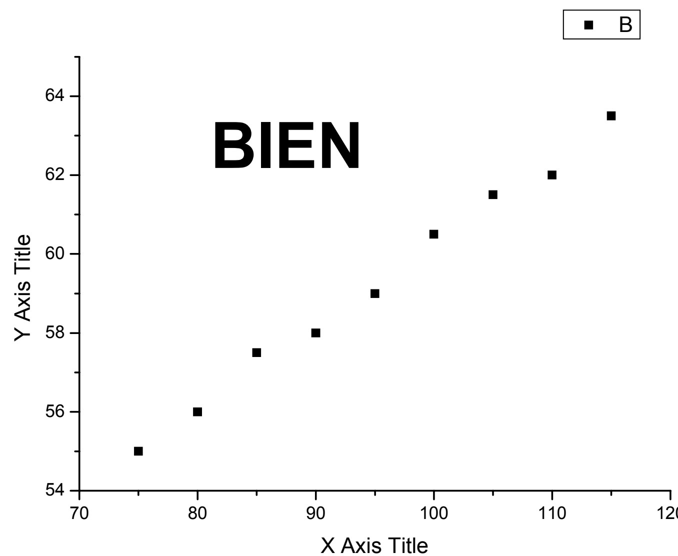
¿Cómo se "unen" los puntos?





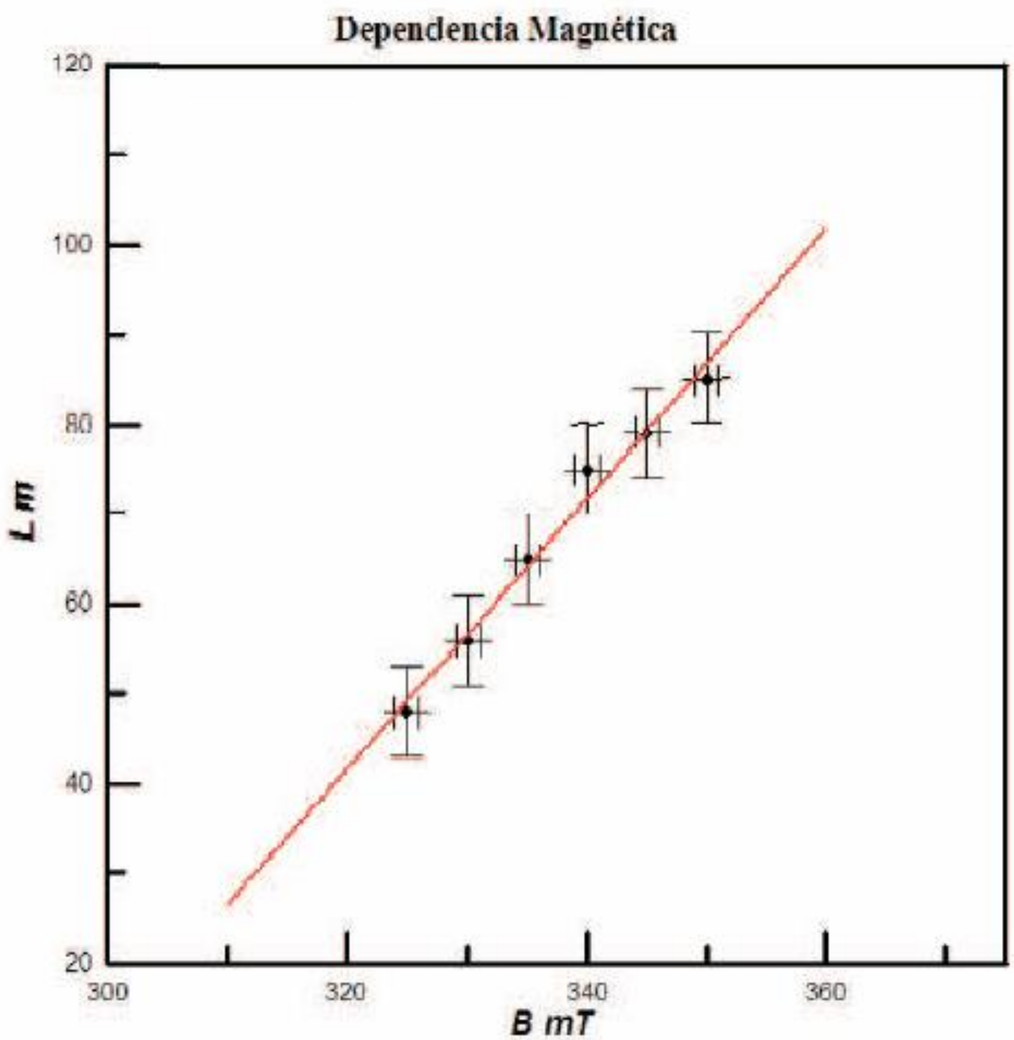
Cuestión de escala





Para la realización de gráficas hay que seguir ciertas recomendaciones:

- Todas las gráficas deben poseer un título en la parte superior, y además las divisiones de los ejes han de ser pocas e internas a ellos



- Las magnitudes se expresarán en la parte externa y central a los ejes, en itálica, y han de elegirse las escalas apropiadas para que aparezcan uniformemente distribuidos todos los datos

- Los puntos experimentales se representarán con sus respectivos errores en abscisas y ordenadas

Regresión y correlación.

Buscamos un modelo de curva de regresión que mejor ajuste a los datos experimentales. Este es el motivo por el que deben representarse gráficamente dichos puntos. A tal gráfica le llamaremos diagrama de dispersión.

Buscamos una función matemática que describa tal relación

Consideremos un conjunto de N medidas de una pareja de magnitudes físicas X e Y de las cuales sospechamos que se encuentran relacionadas mediante una función lineal del tipo

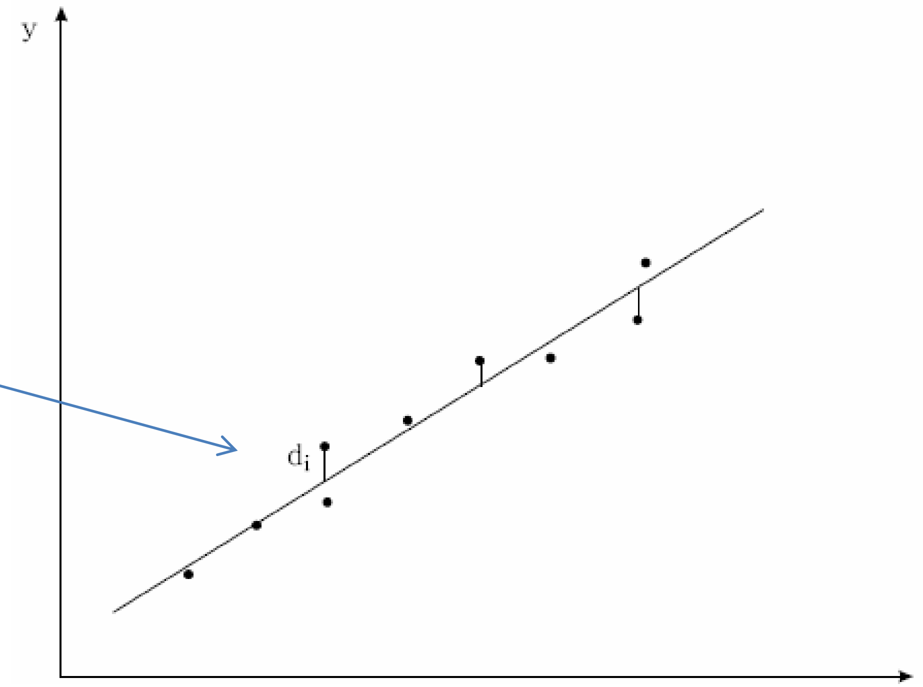
$$y = a + bx$$

Nuestro objetivo el encontrar la pareja de valores **a y b**

Consideraremos la mejor recta como aquella para la cual la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de los puntos respecto de la recta sea mínima

Establecemos las distancias o diferencias

$$d_i = y_i - (a + b\,x_i)$$



representadas como las distancias verticales entre los puntos experimentales y la recta de regresión

El método de determinación de dicha recta consiste en establecer que la suma de los cuadrados de tales distancias sea mínima

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\,x_i)^2 \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\,x_i)\,(-1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\,x_i)\,(-x_i)$$

Es decir

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} y_i = n\,a + b\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

y los errores de estas estimaciones son

$$\sigma_b = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n^2\bar{x}^2}}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_y\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n^2\bar{x}^2}}$$

donde el valor de σ_y es

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}}$$

Para analizar si el ajuste es sucifientemente bueno, utilizamos el coeficiente de correlación lineal

$$r = \frac{n\sum_{i=1} n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

- Si $r = \pm 1$ la correlación es máxima y el ajuste perfecto.
- Si $r > 0$, entonces Y crece con X y la correlación se denomina positiva.
- Si $r < 0$, entonces Y decrece con X y la correlación se denomina negativa.
- Si $r = 0$, no hay correlación y X e Y son independientes.

Un ejemplo:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	$(n+mx_i-y_i)^2$
1	1	1.5	1.5	1.0	2.25	0.042
2	2	2.0	4.0	4.0	4.00	0.052
3	3	4.0	12.0	9.0	16.00	0.699
4	5	4.6	23.0	25.0	21.16	0.187
5	6	4.7	28.2	36.0	22.09	1.606
6	8	8.5	68.0	64.0	72.25	0.440
7	9	8.8	79.2	81.0	77.44	0.000
8	10	9.9	99.0	100.0	98.01	0.037
N=8	S_x=44	S_y=44	S_{xy}=314.9	S_{xx}=320	S_{yy}=313.2	χ^2=3.066

PARÁMETROS DEL AJUSTE :

$$m = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{NS_{xx} - S_x S_x} = 0.935 \qquad \varepsilon(m) = \sqrt{\frac{N}{NS_{xx} - S_x S_x}\,\frac{\chi^2(n,m)}{N-2}} = 0.081$$

$$n = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{NS_{xx} - S_x S_x} = 0.36 \qquad \varepsilon(n) = \sqrt{\frac{S_{xx}}{NS_{xx} - S_x S_x}\,\frac{\chi^2(n,m)}{N-2}} = 0.512$$

$$r = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{NS_{xx} - S_x S_x}\sqrt{NS_{yy} - S_y S_y}} = 0.978$$