CORRIENTE ELÉCTRICA

Movimiento de cargas → Corriente eléctrica

Conducción

Arrastre de cargas en un medio eléctricamente neutro

Movimiento de electrones en un hilo conductor

Convección

Un transporte de masa
Implica un trasporte de carga

Una nube de tormenta

Desplazamiento

Corrientes que surgen de variaciones temporales de ciertos campos

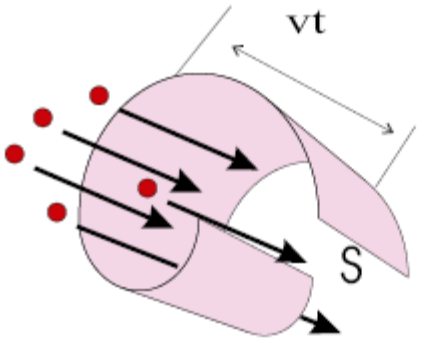
Cambios en el desplazamiento eléctrico producen las llamadas corrientes de desplazamiento

Las corrientes quedan caracterizadas → **Intensidad eléctrica**

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Cantidad de carga que atraviesa cierta Superficie por unidad de tiempo

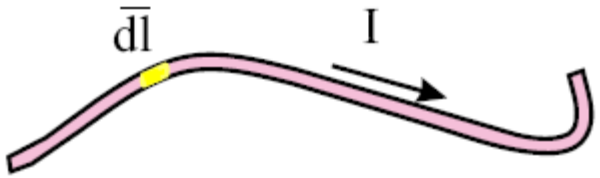
En el sistema internacional, la medida es el *Amperio* (A), aunque a veces se utilizan los microamperios ($\mu A = 10^{-6}A$) y miliamperios ($mA = 10^{-3}A$).



Tomamos un elemento del conductor.
Deseamos conocer la carga que circula a través de dicho elemento

n → El número de cargas por unidad de volumen

$Qn\vec{S}\hat{u}_n \cdot \vec{v}\Delta t$ → La carga que atraviesa la sección S



La intensidad del hilo es la carga que fluye por unidad de tiempo

$$I = nQ\vec{v} \cdot \hat{u}_n S$$

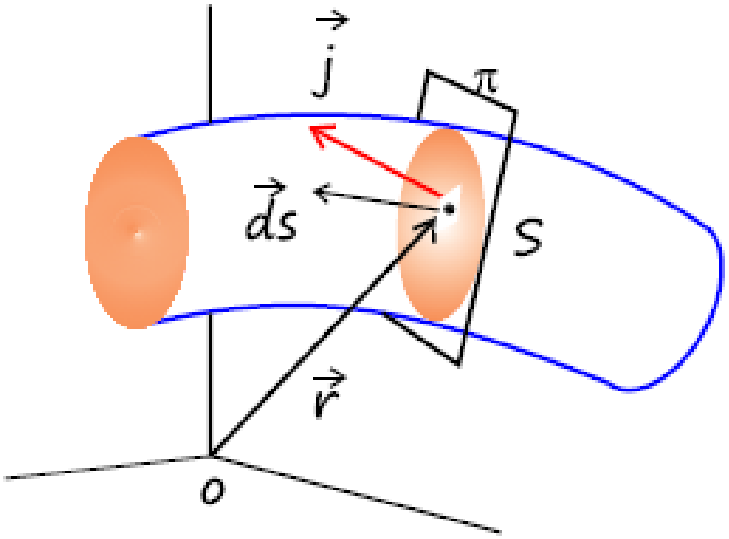
Esta intensidad de corriente nos informa sobre el movimiento de las cargas a través de cierta superficie, pero no nos indica cómo se mueven en cada punto. Para tal fin es necesario introducir una nueva magnitud, ésta es la densidad de corriente.

Densidad de corriente

Volumétrica

$$\vec{j} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{n}$$

De esta forma tenemos una magnitud nueva definida con carácter local. Esta nueva magnitud nos informa de la corriente por unidad de área a través de una superficie normal a este flujo; o sea carga por unidad de tiempo y área.



La corriente neta que atraviesa la superficie S es determinada a partir de la componente normal a dicha superficie de la densidad de corriente

$$I = \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{ds}$$

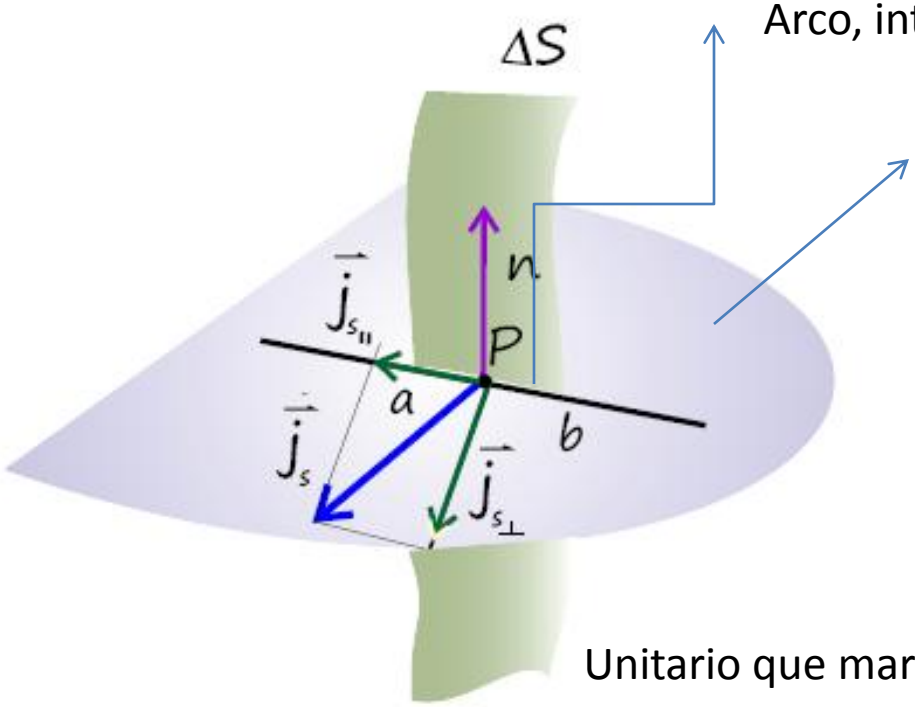
Relacionamos la densidad de corriente con la velocidad media de las partículas.

Por un lado $\longrightarrow$ $dI = n\,q\,\vec{v}\cdot\vec{ds}$

Por otro lado $\longrightarrow$ $dI = \vec{j}\cdot\vec{ds}$

Deducimos por tanto $n\,q\,\vec{v}\cdot\vec{ds} = \vec{j}\cdot\vec{ds} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = n\,q\,\vec{v}}$

Superficial



Arco, intersección de ambas superficies

Superficie conductora

Definimos $\vec{J}_S(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}\,\hat{u}_t$

Tiene carácter local

$\Delta S \to 0 \longrightarrow$ P

Unitario que marca la dirección tangencial a la superficie

La componente normal → Explica el movimiento de carga a lo largo del arco

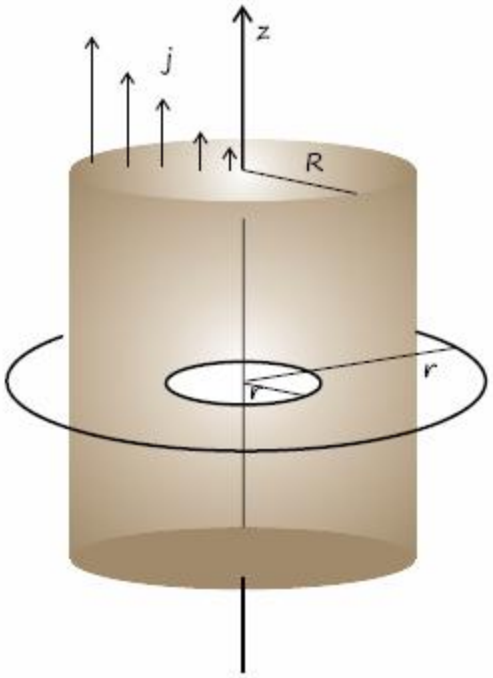
La componente tangencial → Es la responsable de la conducción a lo largo de la superficie

$$I = \int_a^b j_{S_\perp} \, dl$$

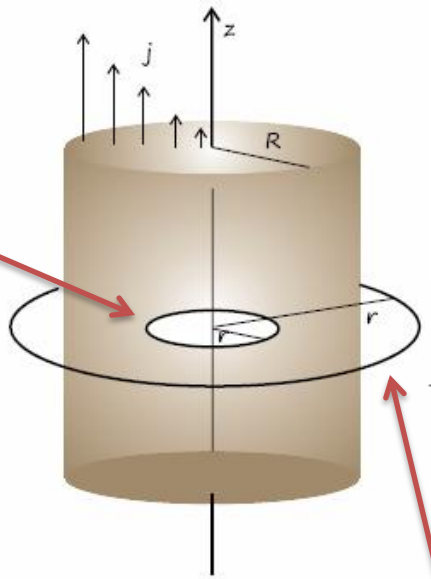
- Disponemos de un cilindro largo por el que circula una densidad de corri

$$\vec{j}(r) = \frac{A}{R} e^{\alpha r} \hat{z}$$

donde A y α son constantes y R es el radio del cilindro. Determin
intensidad en puntos internos y externos al cilindro.



En puntos internos



$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{A}{R} e^{\alpha r} \, r \, d\theta \, dr$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (a x - 1)$$ → Integral tabulada

$$I = \frac{A}{R} 2\pi \left[\frac{e^{\alpha r}}{\alpha^2} (\alpha r - 1) \right]_0^r = \frac{A 2\pi}{R \alpha^2} \left[e^{\alpha r} (\alpha r - 1) + 1 \right]$$

Para puntos externos

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{A}{R} e^{\alpha r} \, r \, d\theta \, dr$$

$$I = \frac{A}{R} 2\pi \left[\frac{e^{\alpha r}}{\alpha^2} (\alpha r - 1) \right]_0^R = \frac{A 2\pi}{R \alpha^2} \left[e^{\alpha R} (\alpha R - 1) + 1 \right]$$

Ley de Ohm

$$\vec{v} = -\mu_e \vec{E}$$

Los electrones se mueven de forma continua y aleatoria entre sucesivas colisiones entre ellos y con átomos de impurezas. Para conseguir que estas cargas se muevan es necesario empujarlas, es decir establecer una diferencia de potencial mediante la aplicación de un campo eléctrico que los acelere y que dé lugar a una velocidad de deriva

$$\vec{v} = \mu \vec{E}$$

Para cualquier otra partícula cargada

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

Debido a la aplicación del campo eléctrico, se genera una diferencia de potencial que genera una densidad de corriente

$$\vec{j} = \rho \mu \vec{E}$$

Dependencia entre la densidad de corriente y el campo aplicado

Conductividad → $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

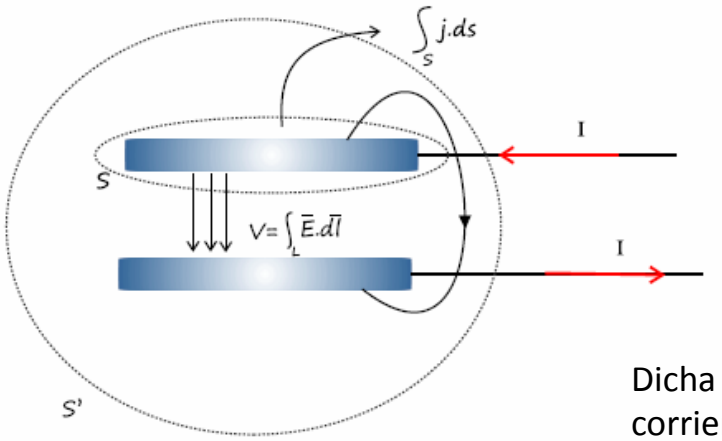
Ley de Ohm.

Si consideramos un conductor de sección transversal constante, A, por el que fluye una corriente uniforme, I. Para cualquier superficie que seccione al cable conductor, dicha intensidad es

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

$$I = \int_s \sigma \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sigma \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Resistencia



Si tomamos una superficie S que encierre a un conductor, la corriente que entra en él debe ser exactamente igual a la corriente que sale de este conductor

Dicha corriente viaja al otro electrodo y sale por el hilo conductor, corriente –I. A la relación que existe entre el voltaje y la corriente de los electrodos le llamamos resistencia, R.

$$R = \frac{\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\int_S \vec{j} \cdot \vec{ds}} = \frac{\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\int_S \sigma \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

donde S es la superficie que rodea al conductor, y L es cualquier trayectoria que une a los conductores

•R sólo dependerá de la geometría, de la conductividad del material, y no del valor del campo eléctrico

Unidad

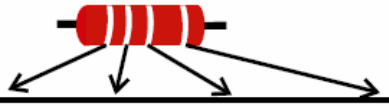
$kg\,m^2 / s^3\,A^2 \longrightarrow \Omega)$

Sería la resistencia entre dos puntos que requiere una diferencia de potencial de un voltio para generar un amperio de corriente

Si el medio es tal que la conductividad no dependa de la geometría

$$R = \frac{\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\int_S \sigma \vec{E} \cdot \vec{ds}} = \frac{\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\sigma \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

$1/\sigma \rightarrow$ Resistividad ρ



Colores	1ª Cifra	2ª Cifra	Multiplicador	Tolerancia
Negro		0	0	
Marrón	1	1	x10	1%
Rojo	2	2	$x10^2$	2%
Naranja	3	3	$x10^3$	
Amarillo	4	4	$x10^4$	
Verde	5	5	$x10^5$	0.5%
Azul	6	6	$x10^6$	
Violeta	7	7	$x10^7$	
Gris	8	8	$x10^8$	
Blanco	9	9	$x10^9$	
Oro			$x10^{-1}$	5%
Plata			$x10^{-2}$	10%
Sin color				20%

Códigos:

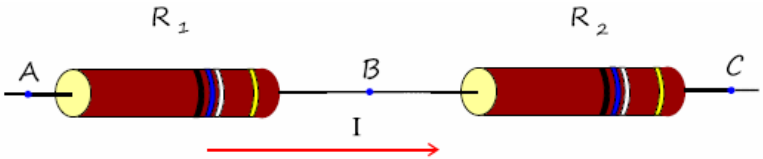
Marrón	Negro	Rojo	Oro
1	0	$x10^2$	5%

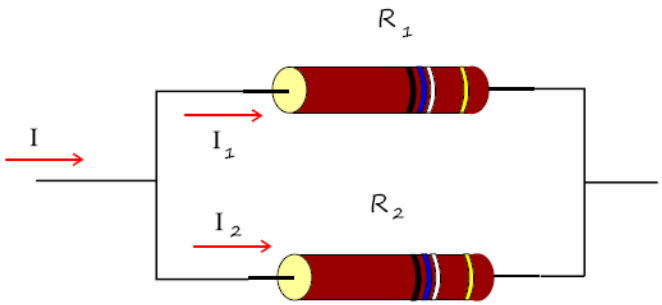
Valor de la resistencia: $(1000 \pm 50)\ \Omega$

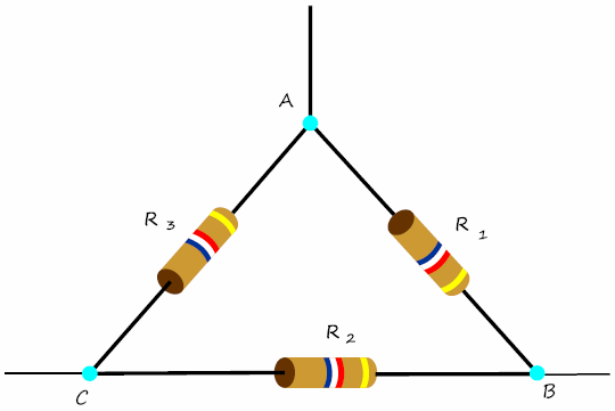
Un conductor cilíndrico de sección A y longitud L está fabricado con un material de conductividad σ. El potencial en sus extremos es constante, y la diferencia entre ellos es V_0. Determina que el campo eléctrico creado sea uniforme, así como la intensidad que fluye. Establece la resistencia.

$$R = \frac{\int_0^L \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\int_S \vec{j} \cdot \vec{ds}} = \frac{V_0}{I}$$

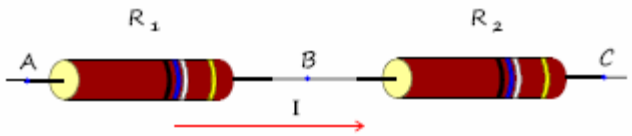
Asociación de resistencias







Asociación en serie



La diferencia de potencial entre los bornes de cada resistor es distinta

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC}$$

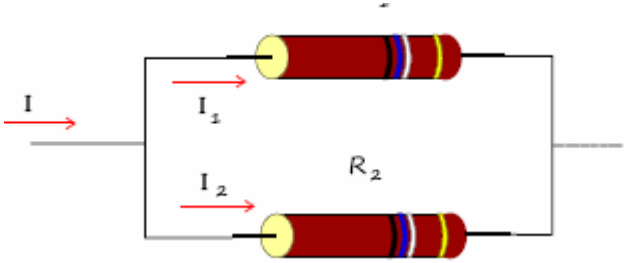
Para cada resistor aplicamos la ley de Ohm

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = I\,R_1 + I\,R_2 = I\,(R_1 + R_2)$$

Esta ecuación corresponde a la diferencia de potencial entre los terminales de un único resistor con un valor de su resistencia de $R_1 + R_2$

$$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

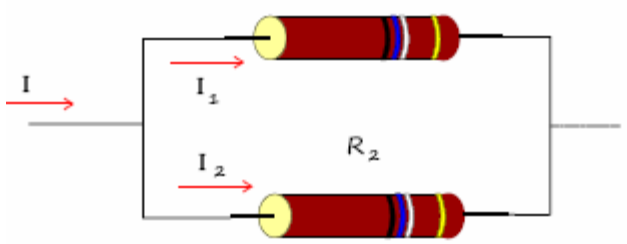
Asociación en paralelo



La característica en esta asociación es que la diferencia de potencial entre sus terminales es la misma

La intensidad al llegar al nodo o punto de unión de esas ramas se diversifica

$$I = I_1 + I_2$$

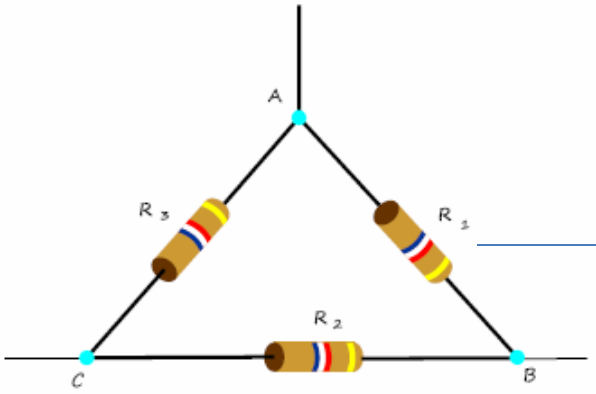


$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} \qquad I_2 = \frac{\Delta V}{R_2}$$

Es la diferencia de potencial entre los extremos de cada resistor

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_e} = \sum_i^n \frac{1}{R_i}}$$

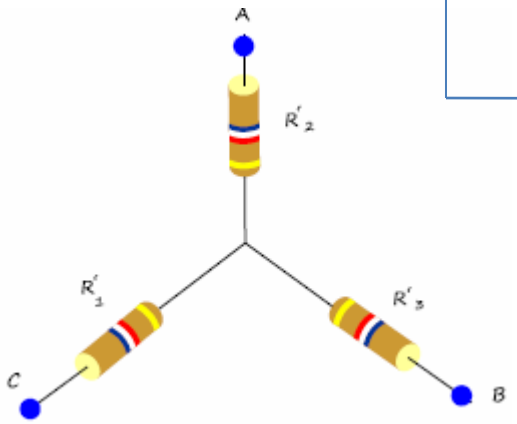
Asociación en estrella



El teorema de ***Kennely*** nos dice que si disponemos de una malla triangular como la de la figura, formada por las resistencias R1, R2 y R3. Dicha malla es equivalente a otra en forma de estrella en cuyo centro convergen las resistencias

R_1', R_2' y R_3'

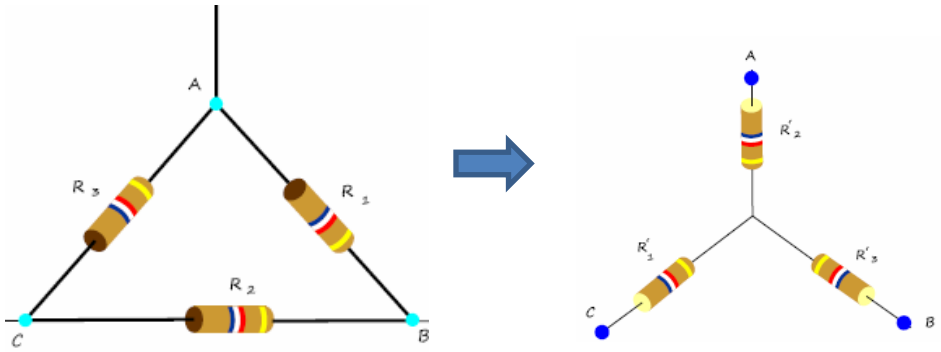
Los valores de estas resistencias los determinamos gracias a que entre dos nudos consecutivos, la resistencia es la misma en ambas estructuras



Está en paralelo con la resistencia equivalente de la asociación en serie de las resistencias R2 y R3

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_2} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 (R_2 + R_3)}$$

Para la estructura de estrella $R_e = R_2' + R_3'$



Donde Re representa la resistencia equivalente en ambas estructuras

Por tanto debe verificarse

$$\frac{1}{R_2' + R_3'} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 (R_2 + R_3)}$$

Para los nodos B y C, se cumplirá

$$\frac{1}{R_1' + R_3'} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2 (R_1 + R_3)}$$

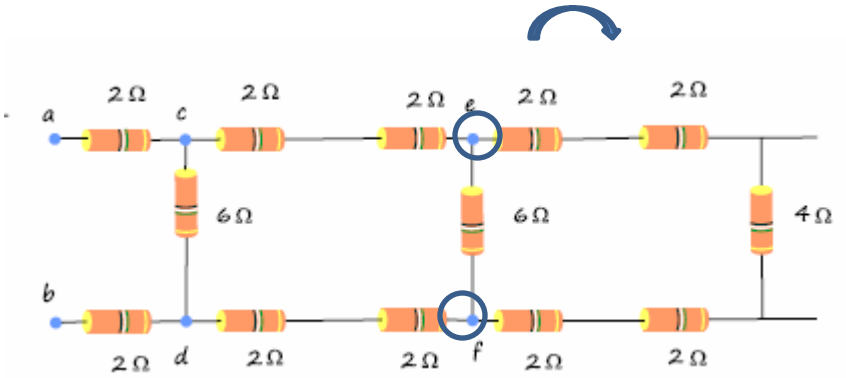
De estas ecuaciones deducimos los valores de dichas resistencias

$$R_2' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_1' = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_3' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

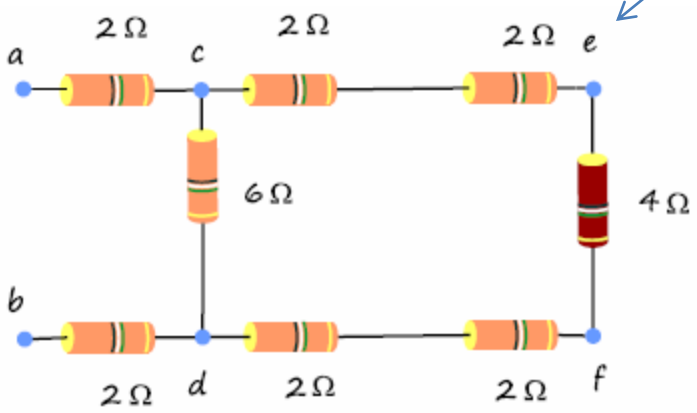
↦ Determina la resistencia equivalente entre los puntos a y b del circuito de la figura 6.15.



$$\text{Serie} \rightarrow 2 + 2 + 4 + 2 + 2 = 12\,\Omega$$

$$\text{Paralelo} \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{R_{e_1}} = \frac{3}{12}$$

$$R_{e_1} = \frac{12}{3} = 4\,\Omega$$



$$\text{Serie} \rightarrow 2 + 2 + 4 + 2 + 2 = 12\,\Omega$$

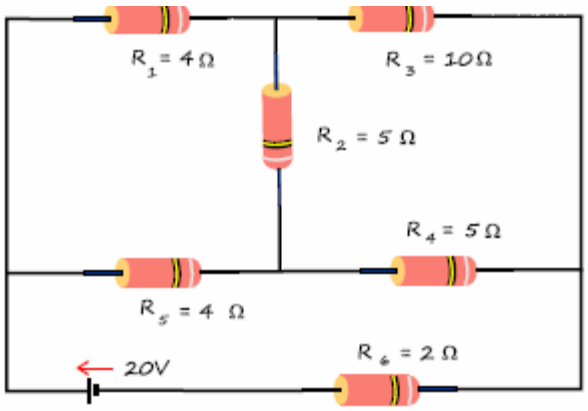
$$\text{Paralelo} \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{R_{e_1}} = \frac{3}{12}$$

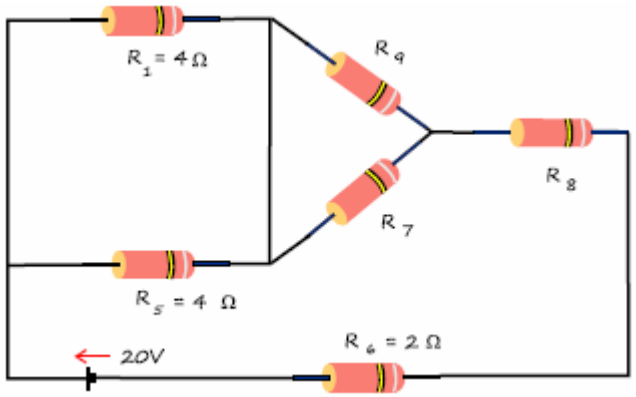
$$R_{e_1} = \frac{12}{3} = 4\,\Omega$$

Serie 2, 4,2. Por tanto la resistencia equivalente es

$8\,\Omega$.

➪ Encuentra el valor de la resistencia equivalente en el circuito de la figura





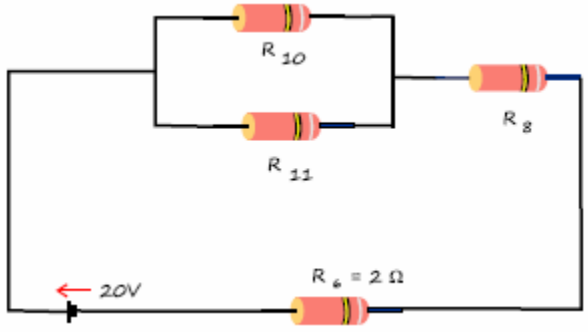
$$R_7 = \frac{R_4\,R_2}{R_2 + R_4 + R_3} = \frac{20}{20} = 1\,\Omega$$

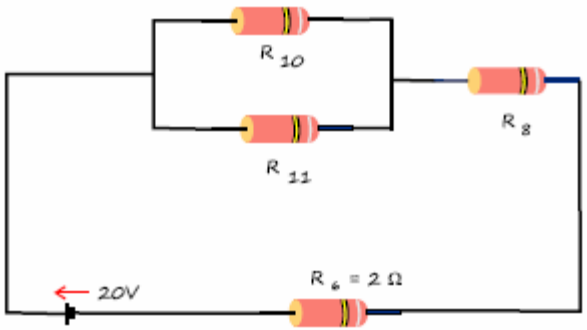
$$R_8 = \frac{R_4\,R_3}{R_2 + R_4 + R_3} = \frac{5}{2}\,\Omega$$

$$R_9 = \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_4 + R_3} = \frac{5}{2}\,\Omega$$

$$R_{10} = R_1 + R_9 = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}\,\Omega$$

$$R_{11} = R_5 + R_7 = 4 + 1 = 5\,\Omega$$





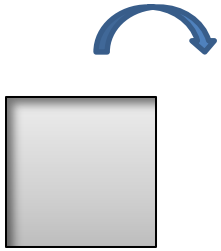
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}} = \frac{23}{65}$$

$$R_e = \frac{65}{23}\,\Omega$$

$$R_T = R_e + R_8 + R_6 = \frac{65}{23} + \frac{5}{2} + 2 = \frac{337}{46}\,\Omega$$

Fuerza electromotriz

Debe mantenerse una diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor para que fluya por él una corriente



Dispositivo que
Proporciona dicha ddp

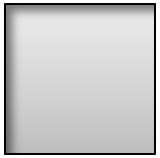
El movimiento de cargas ⇐ Energía

Procede de algún campo eléctrico

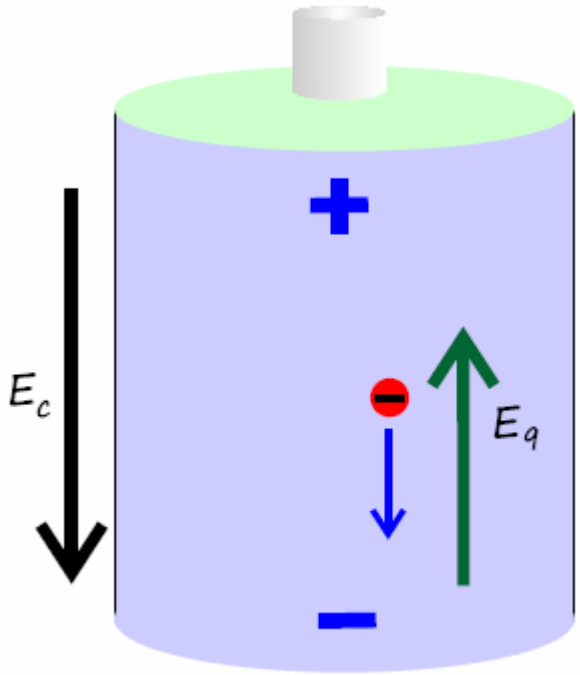
$$W = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Si dicho campo fuera electrostático, se trataría por tanto de un campo irrotacional, este trabajo entre los puntos A y B sería la diferencia de potencial eléctrico que existe entre ambos puntos

⇒ Si construimos un camino cerrado, es decir, los puntos A y B coinciden, entonces esa energía sería nula y en consecuencia no podría mantenerse el movimiento de la carga



Necesitamos por tanto de un dispositivo capaz de crear un campo eléctrico de naturaleza no electrostática



Batería

Al dispositivo capaz de crear este campo

le llamamos generador eléctrico o generador de fuerza electromotriz

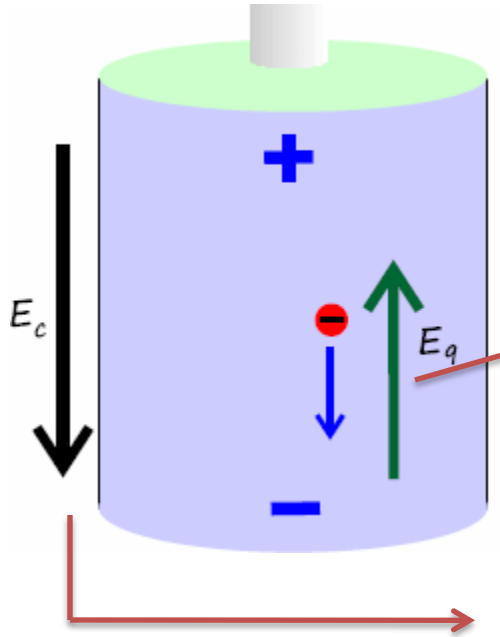
$\vec{E}_c$ (Electrostático) $W = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ (No transporte)

$\vec{E}_q$, (No electrostático) $W = \oint \vec{E}_q \cdot \vec{dl} \neq 0$

Fuerza electromotriz ϵ

$$\epsilon = \oint \vec{E}_q \cdot \vec{dl}$$

Las pilas y baterías producen este campo mediante un proceso electroquímico. Una dinamo, mediante una energía de rotación, en presencia de un campo magnético; células solares, mediante el efecto fotovoltáico



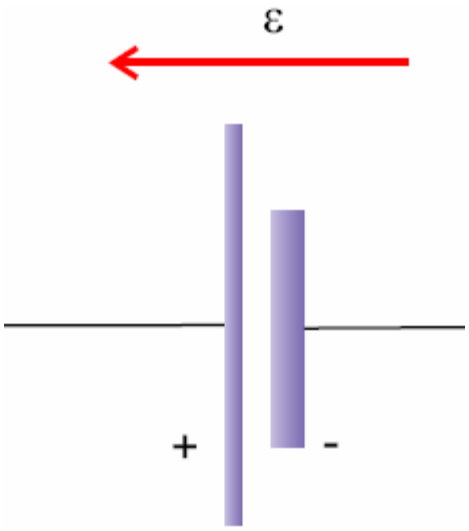
Este campo generado se localiza en el interior de la pila, y lleva a la partícula cargada desde un terminal (positivo) al otro (negativo).

Se crea una acumulación de carga en los extremos que da lugar a un campo conservativo

El campo total es $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_c$

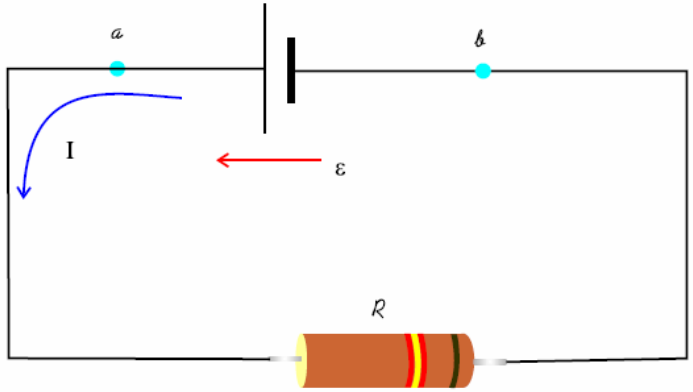
el valor de la fuerza electromotriz es

$$V_0 = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \oint (\vec{E}_q + \vec{E}_c) \cdot \vec{dl} = \oint \vec{E}_q \cdot \vec{dl} + \oint \vec{E}_c \cdot \vec{dl} = \oint \vec{E}_q \cdot \vec{dl} = \epsilon$$



Un generador lo representamos mediante una línea fina y larga situada en frente de otra más gruesa y corta. La línea fina y larga corresponde al polo positivo, y la línea corta, al negativo. La fuerza electromotriz se especifica mediante un vector con dirección y sentido coincidente con el campo no conservativo

Cerramos el conductor y creamos un circuito



la diferencia de potencial entre los bornes de la fuente ya no es la fuerza electromotriz

el campo no conservativo, el creado por la fuente, siempre se mantiene constante y el campo creado electrostático disminuye

Este efecto puede interpretarse como si existiera una resistencia interna en la fuente

aplicamos la ley de Ohm al conductor

$$\vec{j} = \sigma\,(\vec{E}_c + \vec{E}_q)$$

integramos a lo largo de un camino cerrado

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \vec{dl} = \oint \vec{E}_c \cdot \vec{dl} + \oint \vec{E}_q \cdot \vec{dl}$$

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \vec{dl} = \epsilon$$

multiplicamos y dividimos por la superficie S del conductor

$$\oint \frac{\vec{j}\,S}{\sigma\,S} \cdot \vec{dl} = \epsilon = I \oint \frac{dl}{\sigma\,S} = I\,R_T \qquad R_T = R + r$$

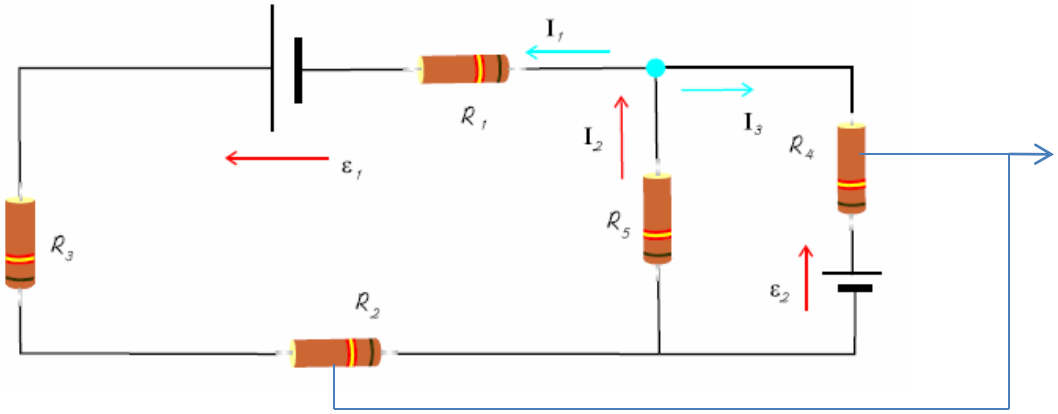
Establecemos esta ley de Ohm para un circuito cerrado

$$I\,(R + r) = \epsilon$$

La diferencia de potencial entre los puntos a y b en el circuito es I R

$$(V_a - V_b) + I\,r = \epsilon$$

Leyes de Kirchhoff

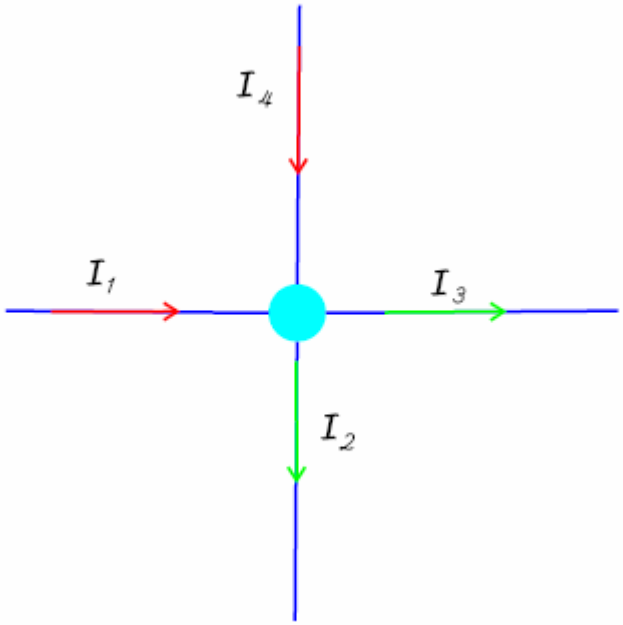


Ambas resistencias no están conectadas en paralelo (Su ddp no es la misma)

Necesitamos unas reglas que nos permitan encontrar una relación entre la señal de entrada y la de salida

Terminología

- Elemento de un circuito . Un componente del mismo
- Parámetro. Representación simbólica de los elementos R, C,…
- Rama. Los elementos se unen mediante conductores ideales, formando un dispositivo de dos terminales.
- Malla. Las ramas pueden unirse y formar un circuito cerrado.
- Nudos. Las ramas se unen, los puntos de unión se denominan Nudos.
- Circuito o red. Las mallas a su vez se unen y forman un circuito.
- Ramas activas. Si en ellas figuran elementos activos como las fuentes.
- Ramas pasivas. Si no se encuentra ningun elemento activo



Si no tenemos fuentes o sumideros de carga, se verificará la ecuación de continuidad y por tanto

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0$$

la corriente que entra en el espacio que rodea S es igual a la corriente que sale

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

En un nudo, la suma de corrientes que entran y salen es nula, o bien, la suma de las corrientes que entran en un nudo es igual a las que salen de él.

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3$$

La integral a lo largo del circuito de la densidad de corriente, podemos estudiarla desglosada en dos términos. Una primera parte para el interior de la batería, A- B, y una segunda, para el conductor externo B - C - A

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \vec{dl} = \int_A^B \frac{\vec{j}_q}{\sigma_q} \cdot \vec{dl} + \int_{B-C}^A \frac{\vec{j}_c}{\sigma_c} \cdot \vec{dl}$$

$$\int_A^B \frac{\vec{j}_q}{\sigma_q} \cdot \vec{dl} = \int_A^B \frac{\sigma_q \vec{E}_q}{\sigma_q} \cdot \vec{dl} = \int_A^B \vec{E}_q \cdot \vec{dl} = I\, r$$

donde r es la resistencia interna en la batería

$$\int_{B-C}^A \frac{\vec{j}_c}{\sigma_c} \cdot \vec{dl} = \int_{B-C}^A \frac{\sigma_c \vec{E}_c}{\sigma_c} \cdot \vec{dl} = \int_{B-C}^A \vec{E}_c \cdot \vec{dl} \neq 0$$

$$\int_{B-C}^A \frac{\vec{j}_c}{\sigma_c} \cdot \vec{dl} = \int_{B-C}^A \vec{E}_c \cdot \vec{dl} = I\, R$$

$$\epsilon = I\, r + I\, R$$

donde R es la resistencia externa en el circuito.

$$\epsilon = I\,(r + R)$$

Si existieran k generadores asociados en serie, y N resistencias, la ecuación anterior la generalizamos

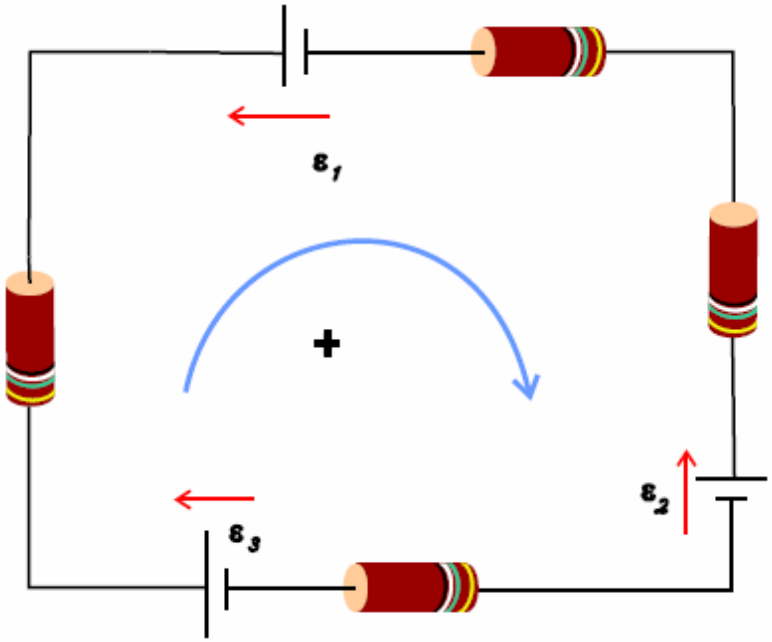
$$\sum_{j=1}^{k} \epsilon_j = \sum_{j=1}^{N} I\, R_j$$

Esta expresión constituye la segunda ley de Kirchhoff

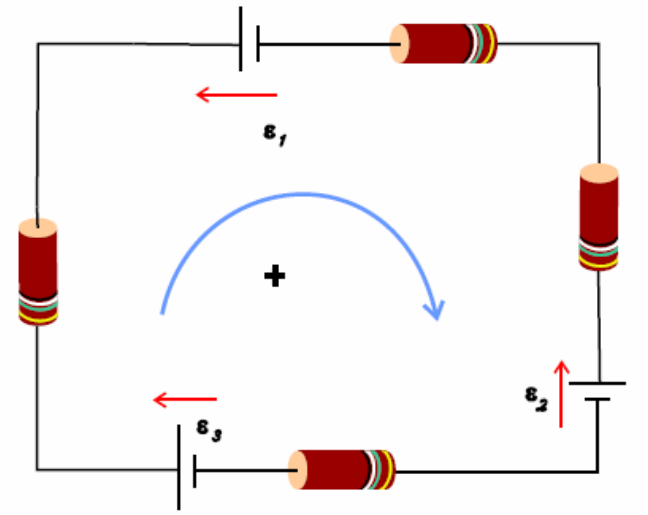
La suma de fuerzas electromotrices en un circuito cerrado es igual a la suma de las diferencias de potencial en cada elemento del circuito.

Para aplicar las leyes de Kirchhoff y establecer las ecuaciones independientes, es necesario seguir ciertas indicaciones:

• **Establece un sentido de circulación**. En la malla que estamos trabajando definimos un sentido de circulación, reflejado en el circuito mediante una flecha que indica el sentido horario o bien antihorario.



• **Signos para las fuerzas electromotrices**. Al recorrer la malla en el sentido definido anteriormente, puede ocurrir que nos encontremos con fuentes, y que el sentido de las fuerzas electromotrices coincida con el sentido de circulación en la malla, en este caso tomamos como positivas dichas fuerzas electromotrices. En caso contrario, cuando el sentido del recorrido de la malla sea contrario a la fuerza electromotriz, tomamos ésta como negativa.



$$\sum_i \epsilon_i = \epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2$$

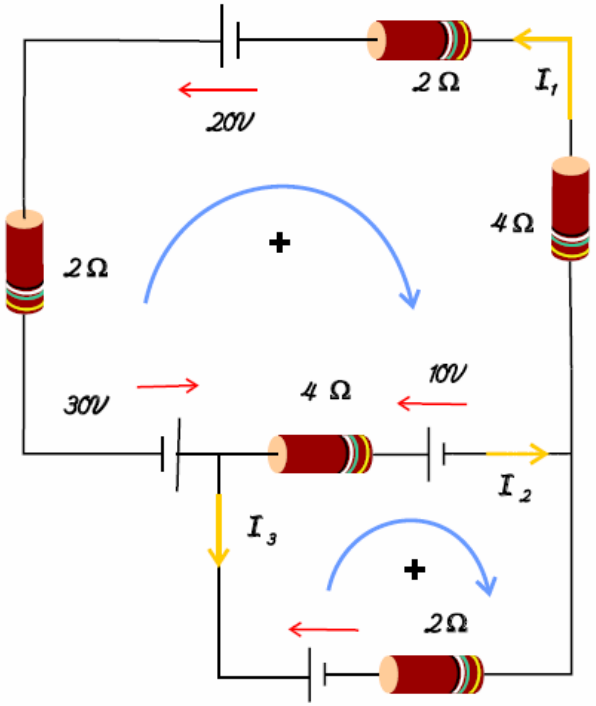
• De forma análoga los signos positivos para las intensidades definidas en las ramas de una malla corresponden a la coincidencia en el sentido de recorrido de dicha malla, con la intensidad definida en la rama. La intensidad será negativa si el sentido de recorrido de la malla no coincide con el prefijado para la intensidad.

• Si deseamos determinar la diferencia de potencial entre dos puntos en un circuito, aplicamos la segunda ley de Kirchhoff, y su expresión será

$$V_A - V_B = \sum_i I_i R_i - \sum_i \epsilon_i$$

• Si vamos desde un punto del circuito hasta otro, tenemos que fijarnos si las intensidades que nos encontramos tienen el mismo sentido, en cuyo caso el producto I R será positivo. Si la corriente fuera en sentido contrario a nuestro desplazamiento, dicho producto será negativo. También seguimos el mismo criterio con las fuerzas electromotrices; positivas si coinciden su sentido con el del desplazamiento, y negativas en caso contrario.

➪ Aplica las leyes de Kirchhoff y establece los valores de las intensidades



Malla 1

$$\sum_i \epsilon_i = (10 - 20 - 30)\,V$$

Aplicamos la segunda ley de Kirchho

$$\sum_i \epsilon_i = (10 - 20 - 30)\,V = \sum I_i\,R_i = -I_1\,(4 + 2 + 2) - I_2\,(4)$$

$$-40 = -8\,I_1 - 4\,I_2 \;\Rightarrow\; 10 = 2\,I_1 + I_2$$

Malla 2

$$\sum_i \epsilon_i = (-10 + 2)\,V$$

$$\sum_i I_i\,R_i = 4\,I_2 - 2\,I_3$$

Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff

$$(-10 + 2) = 4\,I_2 - 2\,I_3 \;\Rightarrow\; 4 = I_3 - 2\,I_2$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que necesitamos otra ecuación más.
Tomamos un nudo, por ejemplo el nudo A y aplicamos la primera ley de Kirchhoff

$$I_2 + I_3 = I_1$$

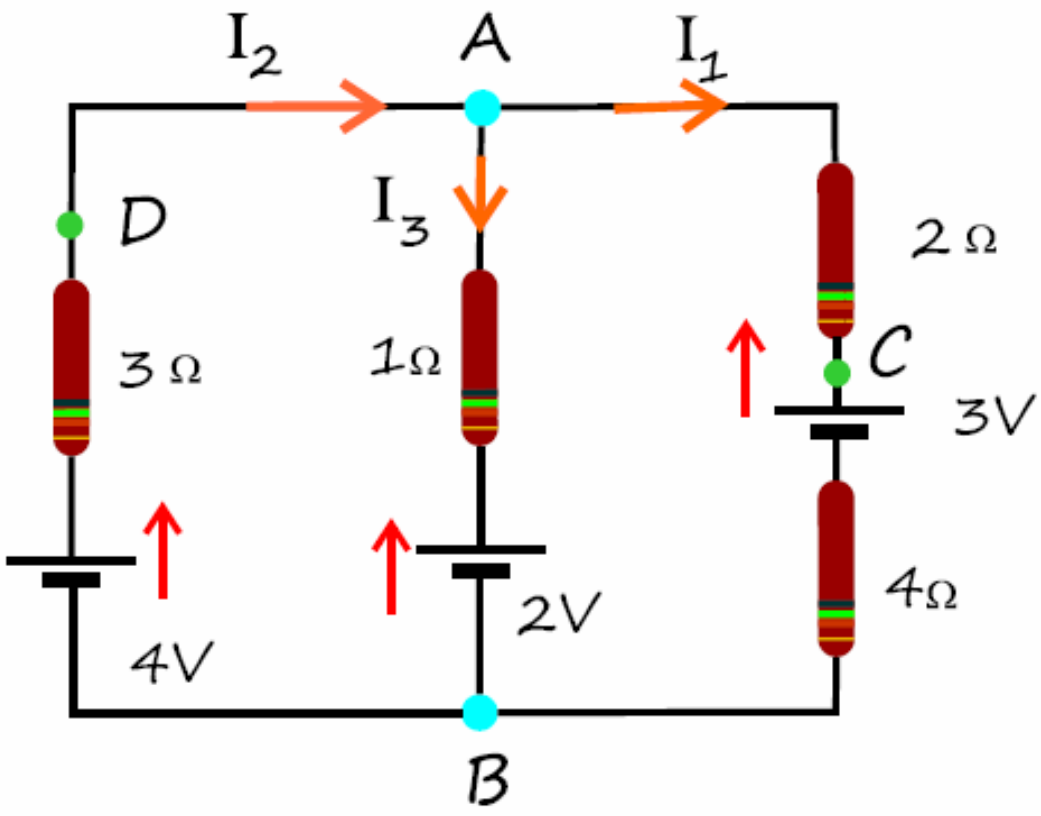
$$\left.\begin{array}{c} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - 2\,I_2 = 4 \\ 2\,I_1 + I_2 = 10 \end{array}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-34}{-7} = 4{,}85\,A$$

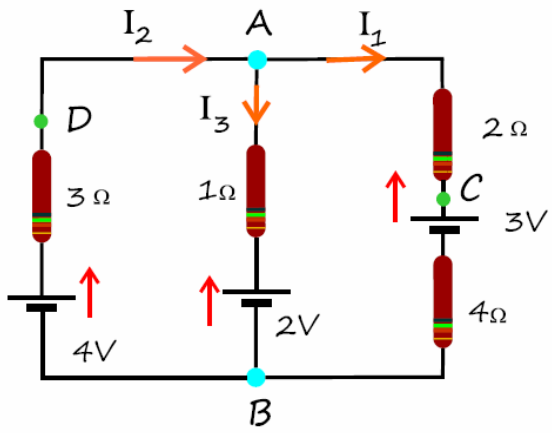
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-7} = 0{,}29\,A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-34}{-7} = 4{,}85\,A$$

➪ En el circuito de la figura 6.27, determina la diferencia de potencial entre los puntos A y B.



En el nudo A $$I_2 = I_1 + I_3$$



La ecuación para la malla ADB es $$-2 + 4 = I_3 + 3\,I_2$$

Para la otra malla, la ecuación es $$-3 + 2 = 6\,I_1 - I_3$$

$$\left.\begin{array}{c} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_3 + 3\,I_2 = 2 \\ 6\,I_1 - I_3 = -1 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = -0{,}074\,A$$

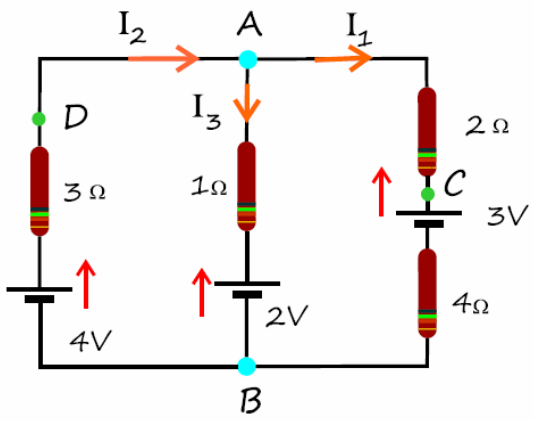
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = 0{,}481\,A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = 0{,}556\,A$$

La diferencia de potencial entre los puntos AB, vía rama central, es

$$V_A - V_B = \sum_i I_i R_i - \sum_i \epsilon_i$$

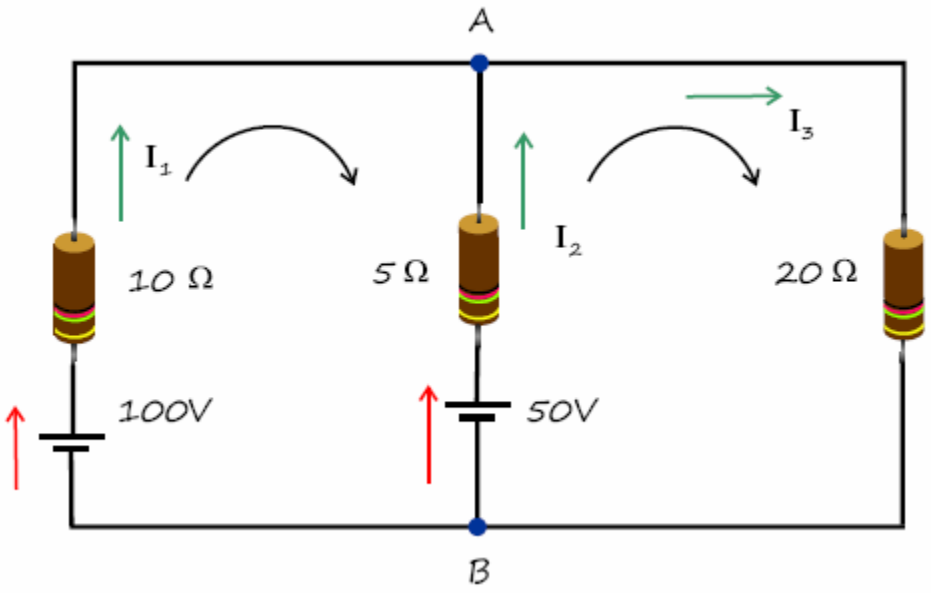
$$V_{AB} = I_3\,(1) - (-2) = I_3 + 2 = 2{,}56\,A$$



La diferencia de potencial entre los puntos AB, vía ADB, es

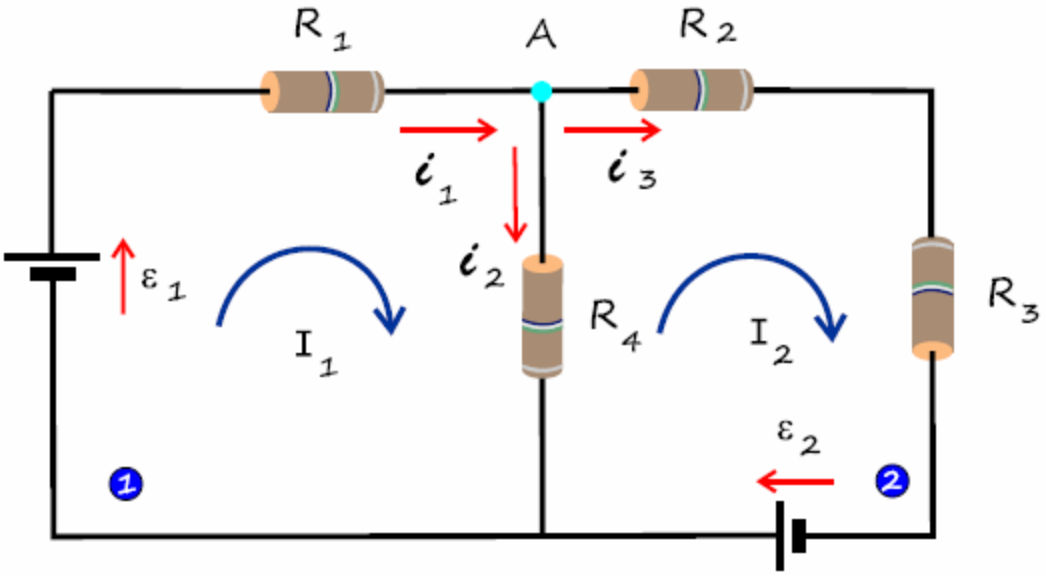
$$V_{AB} = -I_2\,(3) - (-4) = -3\,I_2 + 4 = 2{,}56\,A$$

➪ En el circuito de la figura 6.53, determina las corrientes así como la diferencia de potencial entre los puntos A y B.



Método de mallas

Este método consiste en elegir mallas cerradas y para cada una de ellas, establecemos una corriente que recorra todas las ramas que la forma

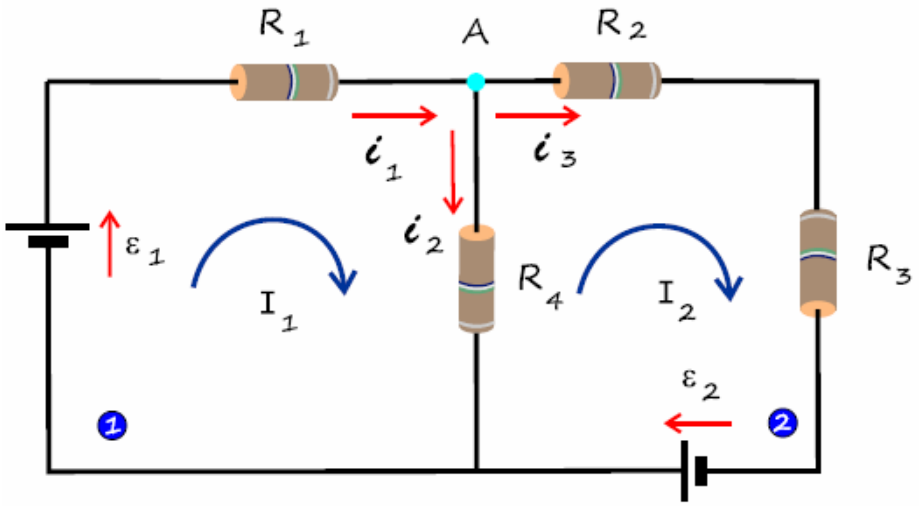


Aplicamos las leyes de Kirchhoff

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\epsilon_1 = i_1 R_1 + i_2 R_4$$

$$\epsilon_2 = i_3 (R_2 + R_3) - i_2 R_4$$



Definimos las corrientes de malla, que coinciden con el sentido de recorrido de ellas

$$i_1 = I_1 \qquad i_3 = I_2$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = I_1 - I_2$$

Introducimos estos valores en las ecuaciones de las mallas

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

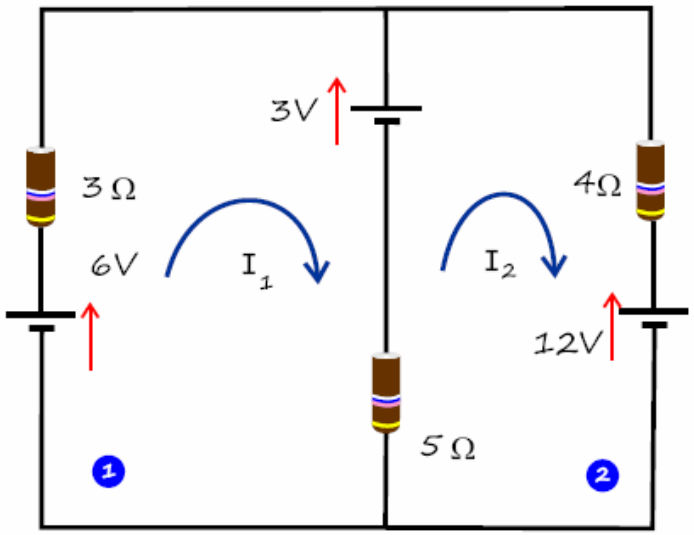
$$\begin{cases} \epsilon_1 = I_1 (R_1 + R_4) - I_2 R_4 \\ \epsilon_2 = I_2 (R_2 + R_3 + R_4) - I_1 R_4 \end{cases}$$

La suma de todas las resistencias presentes en la malla

La suma de resistencias en las ramas comunes a las mallas, con el signo correspondiente a la intensidad que en ella circula

$$\epsilon_i = \sum_j R_{ij} I_j$$

➪ En el circuito de la figura 6.31, formado por dos mallas, determina la intensidad que circula por la resistencia de 5Ω.



Ecuación para la malla 1

$$6 - 3 = I_1(3 + 5) - I_2(5)$$

Ecuación para la malla 2

$$-12 + 3 = I_2(4 + 5) - I_1(5)$$

Sistema en forma matricial

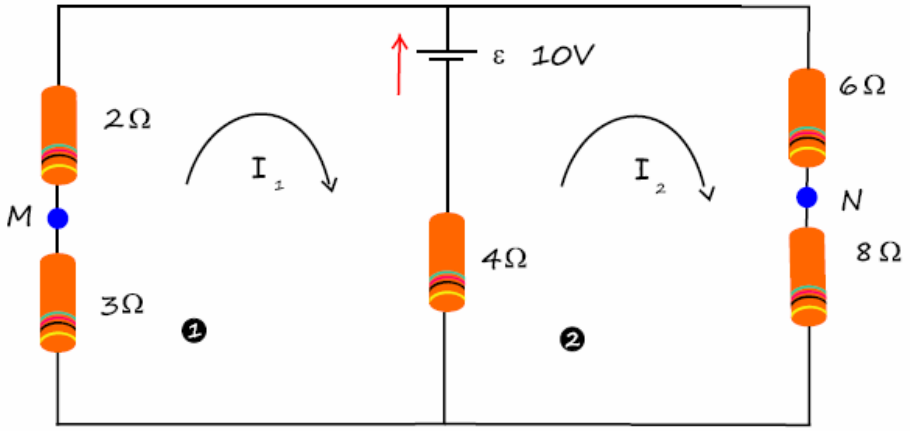
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = -0{,}38\,A \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -5 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = -1{,}2\,A$$

La corriente que circula por la resistencia de 5

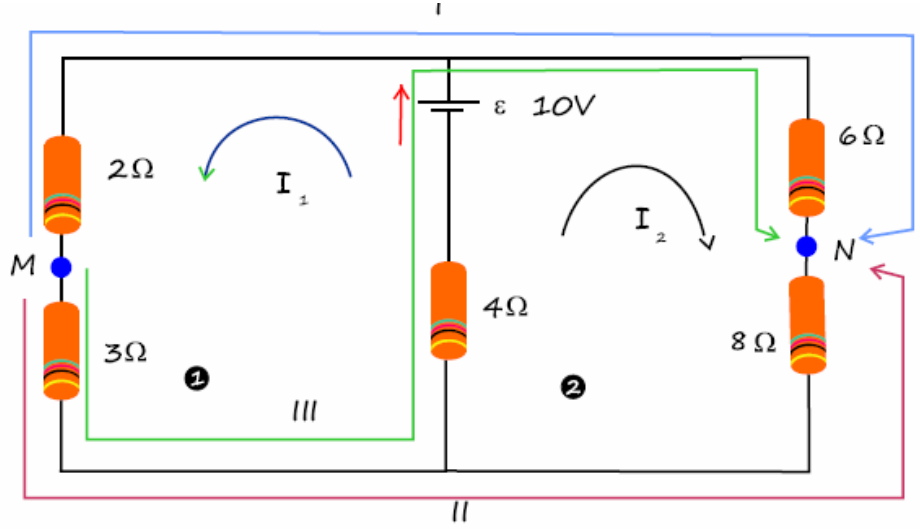
$$I_1 - I_2 = -0{,}38 + 1{,}2 = 0{,}82\,A$$

➪ En el circuito de la figura 6.60, determina la corriente que circula por la resistencia de 4Ω. Establece la diferencia de potencial entre los puntos M y N.



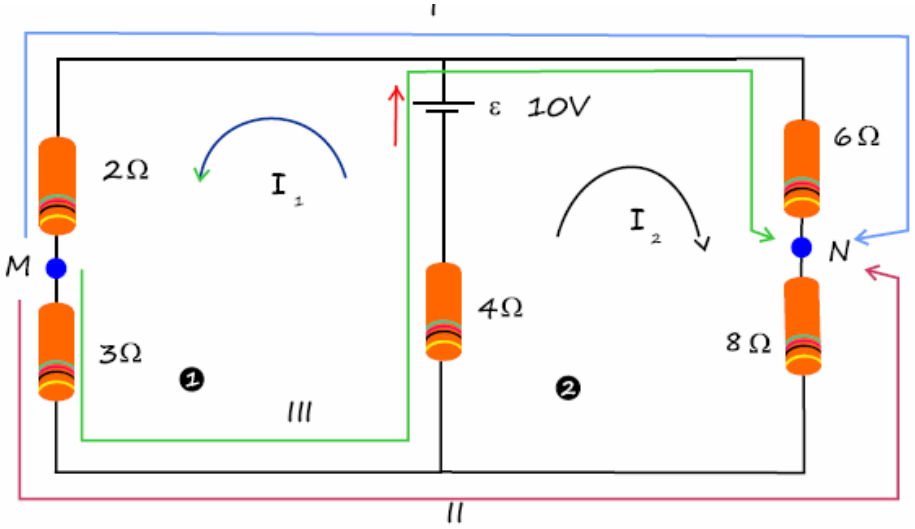
$$\left.\begin{aligned} -10 &= I_1\,(4+23) - 4\,I_2 \\ 10 &= -4\,I_1 + I_2\,(6+8+4) \end{aligned}\right\}$$

$$I_1 = -0{,}96\,A \qquad I_2 = 0{,}34\,A$$



Observamos que la corriente de la malla 1 es negativa, por tanto la situación de las corrientes es como la indicada en la figura

Para determinar la diferencia de potencial entre los puntos M y N del circuito, podemos optar por tres caminos



Camino III

$$V_{MN} + 10 = 3\,I_1 + 4\,(I_1 + I_2) + 6\,I_2$$

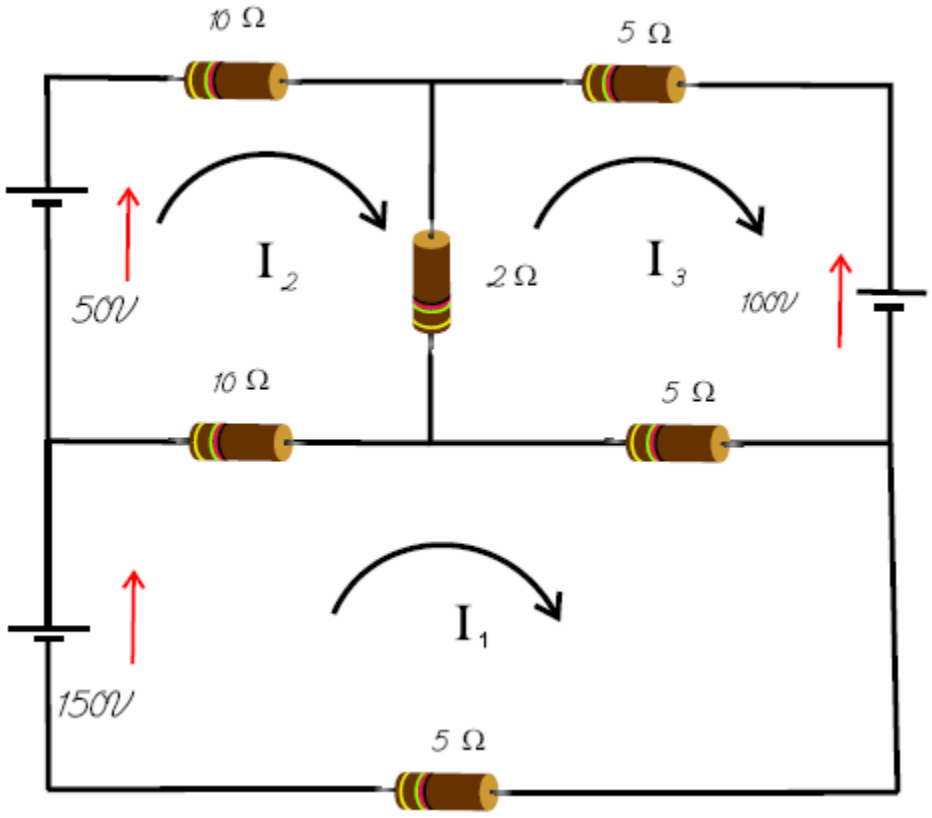
$$V_{MN} = 0{,}12\,V$$

Camino I

$$V_{MN} = -2\,I_1 + 6\,I_2 = 0{,}12\,V$$

Camino II

➪ En el siguiente circuito determina la corriente que circula por cada resistencia en las distintas ramas comunes.



$$50 = I_2\,(10 + 2 + 10) - I_3(2) - I_1(10)$$

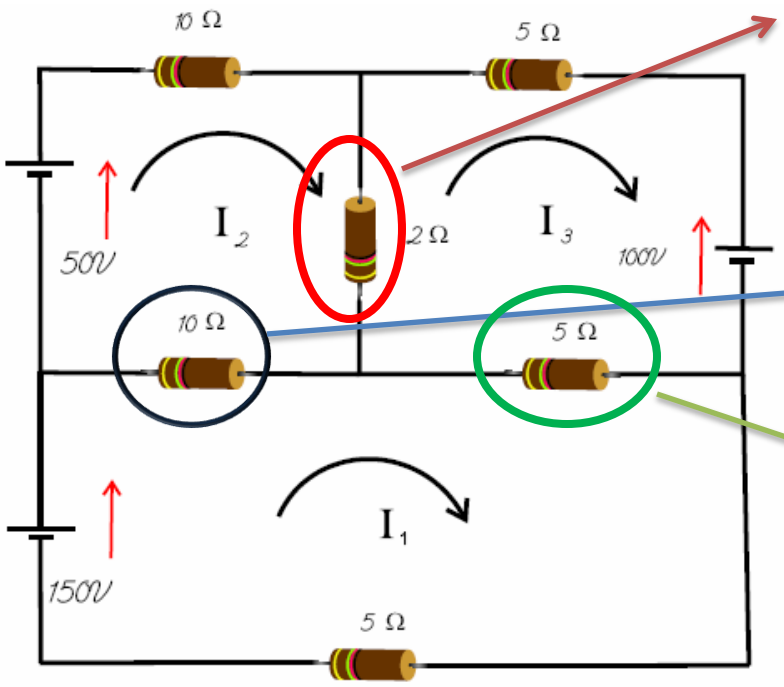
$$-100 = I_3\,(2 + 5 + 5) - I_2\,(2) - I_1\,(5)$$

$$150 = I_1\,(5 + 10 + 5) - 10\,I_2 - I_3\,(5)$$

$$\left.\begin{aligned} 50 &= 22\,I_2 - 2\,I_3 - 10\,I_1 \\ -100 &= 12\,I_3 - 2\,I_2 - 5\,I_1 \\ 150 &= 20\,I_1 - 10\,I_2 - 5\,I_3 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 22 & -2 \\ -5 & -2 & 12 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & 22 & -2 & 50 \\ -5 & -2 & 12 & -100 \\ 20 & -10 & -5 & 150 \end{array}\right)$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 22 & -2 \\ -100 & -2 & 12 \\ 150 & -10 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 22 & -2 \\ -5 & -2 & 12 \\ 20 & -10 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{32500}{3250} = 10. \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 50 & -2 \\ -5 & -100 & 12 \\ 20 & 150 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 22 & -2 \\ -5 & -2 & 12 \\ 20 & -10 & -5 \end{vmatrix}} = 6{,}54\,A \qquad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 22 & 50 \\ -5 & -2 & -100 \\ 20 & -10 & 150 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 22 & -2 \\ -5 & -2 & 12 \\ 20 & -10 & -5 \end{vmatrix}} = -3{,}07\,A$$

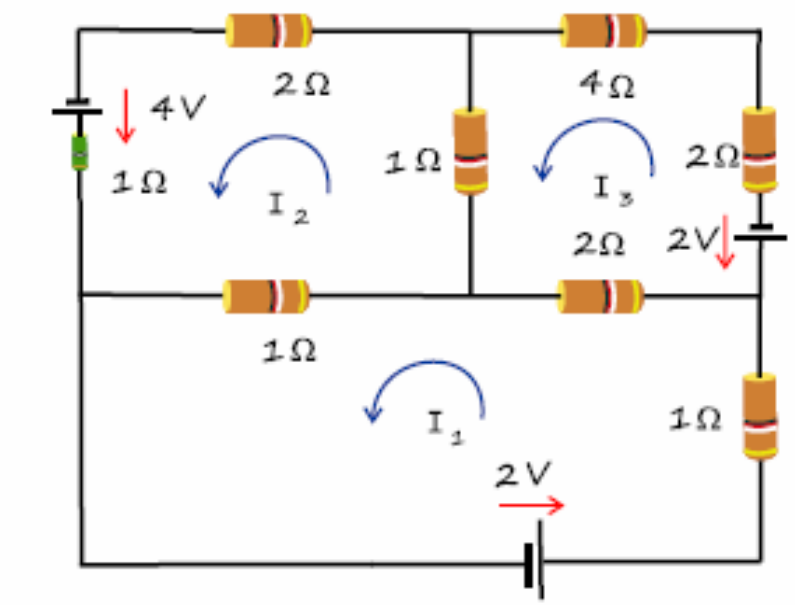


$$I_2 - I_3 = 9{,}62\,A$$

$$I_2 - I_1 = -3{,}46\,A$$

$$I_1 - I_3 = 13{,}08A$$

➪ En el circuito de la figura 6.66, determina las intensidades que circulan por cada malla. Utiliza el método de mallas y comprueba el resultado aplicando el teorema de superposición.



$$\left.\begin{array}{r} 5\,I_2 - I_3 - I_1 = 4 \\ -2\,I_1 + 9\,I_3 - I_2 = -2 \\ 4\,I_1 - I_2 - I_3 = 2 \end{array}\right\}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{116}{154} = 0{,}753\,A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 9 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{148}{154} = 0{,}961\,A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{154} = 0{,}052\,A$$

Régimen transitorio

Cambiamos tensión, o se modifica algún elemento

↓

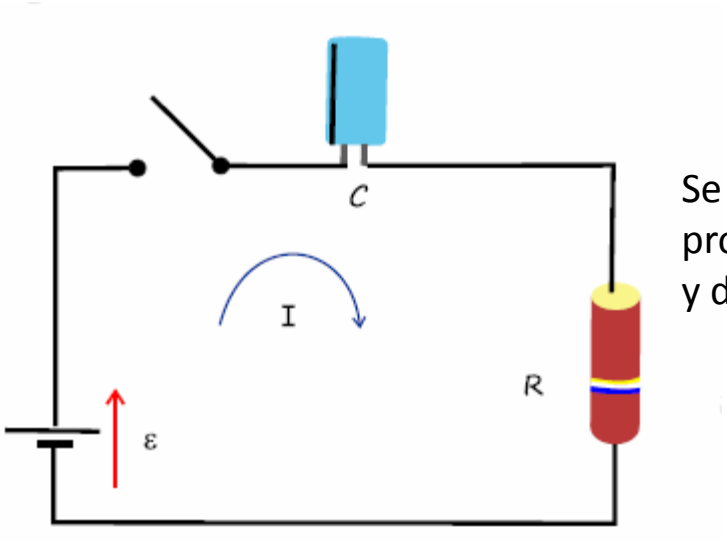
Existe una variación: valor inicial hasta el valor final

El tiempo empleado → **Período de transición**

Decimos que el circuito está en régimen transitorio si se encuentra en la evolución desde el estado inicial en que se encuentre hasta el estado permanente

Para el estudio de este régimen transitorio, aplicaremos las leyes de Kirchhoff al circuito y obtendremos una ecuación diferencial que caracteriza su evolución temporal

Circuito *RC*



En un principio el interruptor está abierto

Se cierra y se aplica al circuito una fuerza electromotriz que produce las caídas de tensión en los bornes de la resistencia y del condensador

Estudiamos el régimen transitorio

$$\epsilon = V_R + V_C$$

La caída de tensión en la resistencia es **RI**

$$C = \frac{Q}{V_c} \qquad I = \frac{dQ}{dt} \qquad dQ = I\,dt \Rightarrow q = \int I\,dt$$

Por tanto la caída de tensión en el condensador es

$$V_C = \frac{Q}{V_c} = \frac{1}{C}\int I\,dt$$

y la ecuación diferencial que caracteriza al circuito es

$$\epsilon = R\,I + \frac{1}{C}\int I\,dt$$

$$\epsilon = R\,I + \frac{1}{C}\int I\,dt$$

Derivamos esta ecuación y dividimos por R

$$0 = \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}\,I$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal de primer grado

La solución estará formada por la solución de la ecuación homogénea y la particular

$$\frac{d\xi}{dx} - E\,\xi = A$$

E y A son constantes.

La solución a esta ecuación es del tipo $\xi = \xi_h + \xi_p = B\,e^{E\,x} + e^{E\,x}\int A\,e^{-E\,x}\,dx$

La ecuación es homogénea, y de la solución general, desechamos la solución particular

$$I = B\,e^{-t/RC}$$

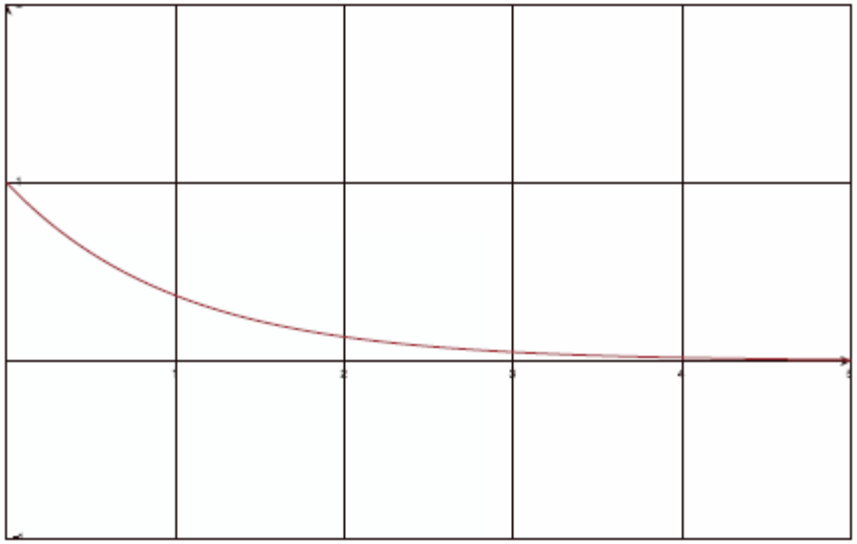
Para determinar el valor de la constante B, recurrimos a los valores iniciales

para t = 0, la intensidad inicial es

$$\epsilon = R\,I + \frac{1}{C}\int I\,dt \quad \longrightarrow \quad R\,I_0 = \epsilon \;\Rightarrow\; I_0 = \frac{\epsilon}{R}$$

$$I = B\,e^{-t/RC} \quad \longrightarrow \quad I_0 = B\,e^{0} = B$$

$$\boxed{I = I_0\,e^{-\,t/RC} = \frac{\epsilon}{R}\,e^{-\,t/RC}}$$



el valor máximo es ϵ/R

Y a partir de él, observamos una caída exponencial

Definimos la ***constante de tiempo*** τ,

como el tiempo para el cual el exponente es la unidad

$$\tau = R\,C$$

Para este valor la intensidad se reduce en un factor

$$e^{-1} = 0{,}368$$

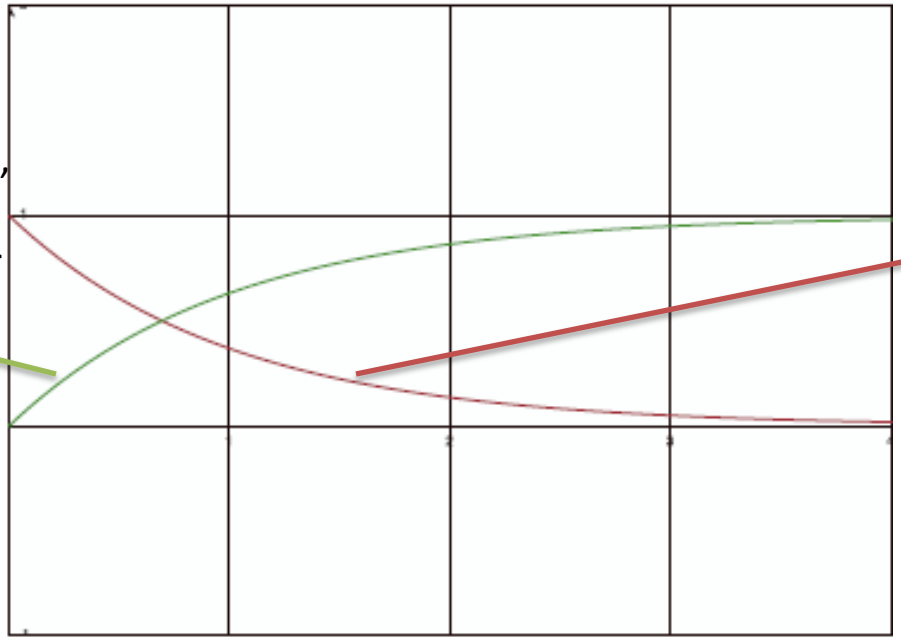
valores por encima de 5τ, acabado el régimen transitorio

Las tensiones en la resistencia y en el condensador, en régimen transitorio, son

$$V_R = R\,I = R\,\frac{\epsilon}{R}\,e^{-\,t/RC} = \epsilon\,e^{-\,t/RC}$$

$$V_C = \frac{1}{C}\int I\,dt = \frac{1}{C\,R}\int \epsilon\,e^{-\,t/RC}\,dt = \epsilon\,(1 - e^{-\,t/RC})$$

La tensión en los bornes del condensador crecerá de forma exponencial, desde un valor nulo hasta el máximo valor que es ϵ.



La diferencia de potencial en la resistencia decae exponencialmente desde el valor inicial .

En un circuito RC, la carga del condensador pasará también por un régimen transitorio, lo único que haremos será expresar la ecuación diferencial del circuito, en términos de la carga

$$\epsilon = R\,I + \frac{1}{C}\int I\,dt = R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

dividimos por R

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\epsilon}{R}$$

La solución a esta ecuación diferencial estará formada por la solución de la ecuación homogénea, más la solución de la particular

$$\xi = \xi_h + \xi_p = B\,e^{E\,x} + e^{E\,x}\int A\,e^{-E\,x}\,dx$$

$$Q = B\,e^{-t/RC} + e^{-t/RC}\int \frac{\epsilon}{R}\,e^{t/RC}\,dt$$

Determinamos la integral

$$\int \frac{\epsilon}{R}\,e^{t/RC}\,dt = \frac{\epsilon}{R}\int R\,C\,e^{s}\,ds = \epsilon\,C\,e^{s} = \epsilon\,C\,e^{t/RC}$$

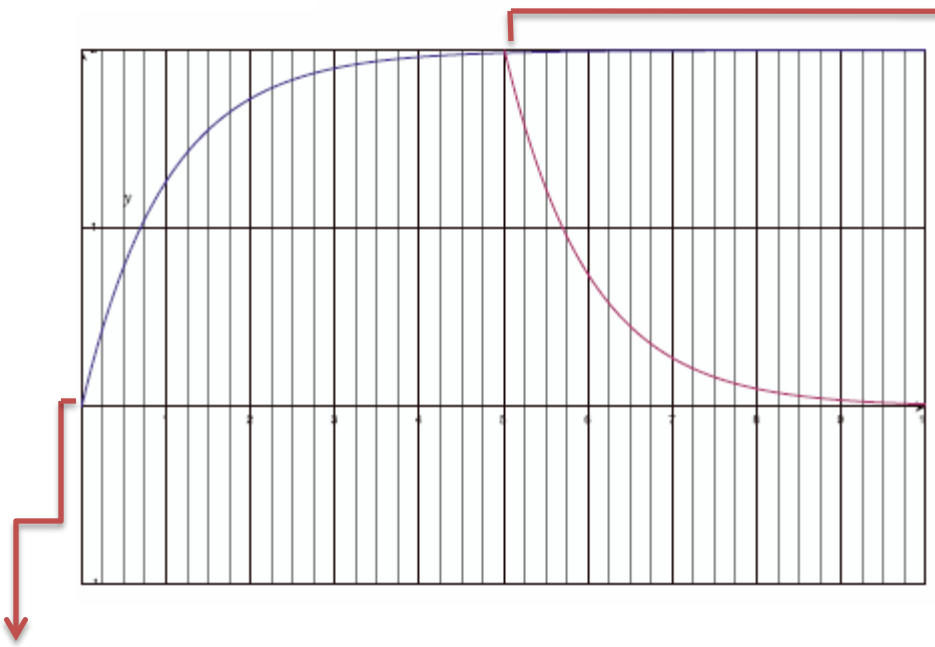
La solución es por tanto

$$Q = B\,e^{-t/RC} + \epsilon\,C$$

Para determinar la constante B, utilizamos las condiciones iniciales, de forma que para t = 0, el condensador está descargado. En este caso

$$0 = B + \epsilon, C \;\Rightarrow\; B = -\epsilon\,C$$

$$Q = -\epsilon\,C\,e^{-t/RC} + \epsilon\,C = \epsilon\,C\,(1 - e^{-t/RC})$$



El condensador se cargará hasta un valor $C\,\epsilon$

En este punto se ha alcanzado el régimen permanente

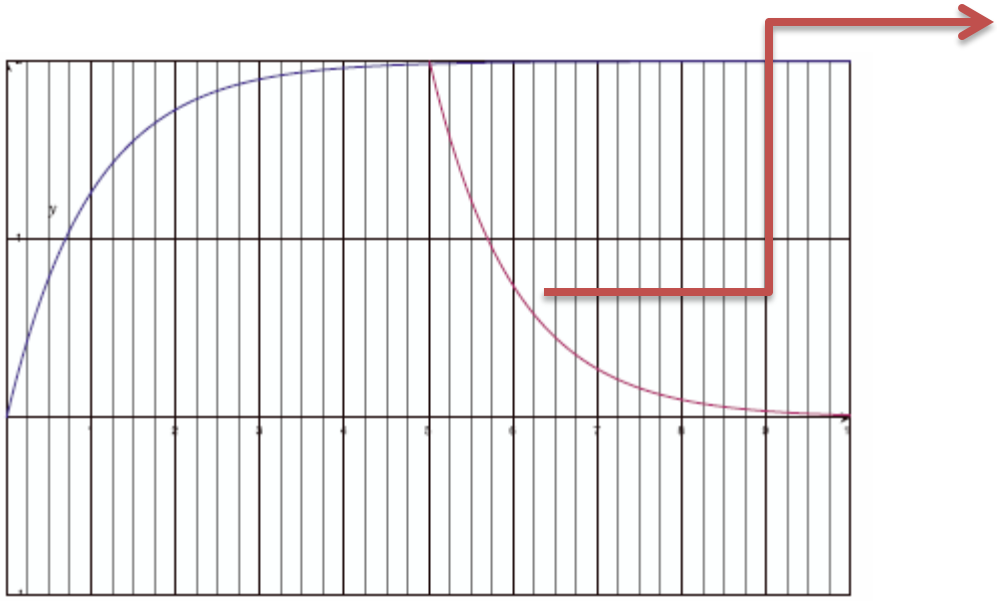
Ahora abrimos el interruptor, el condensador irá **descargándose**

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$

Valor inicial de la carga del condensador es cero

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = B\, e^{-t/RC}$$

Determinamos el valor de la constante B, para ello utilizamos condiciones iniciales; es decir, para origen de tiempos, el condensador está al máximo de carga $C\epsilon$

$$C\epsilon = B$$

$$Q = C\epsilon\, e^{-t/RC}$$