Concepto de Campo

Un campo es toda magnitud física definida en una cierta región del espacio y para un cierto intervalo temporal.

El concepto de campo se introdujo en el estudio de la electricidad para explicar la idea de acción a distancia

- La temperatura de una habitación durante cierto período de tiempo es un ejemplo de campo

$$\boxed{M = f(x, y, z, t)}$$

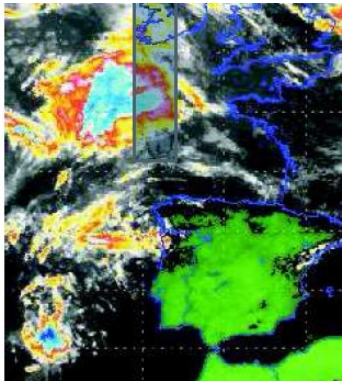
- El vector de posición de una partícula, por ejemplo, no es un campo, pues no está definido para cada punto del espacio. Se trata de un solo vector, que depende únicamente del tiempo, pero no del espacio.

Los campos pueden ser escalares y vectoriales

Los campos escalares están representados por una única función,

Los campos vectoriales están representados por tres funciones, una para cada componente

$$M_x = f_1(x, y, z, t)$$
$$M_y = f_2(x, y, z, t)$$
$$M_z = f_3(x, y, z, t)$$



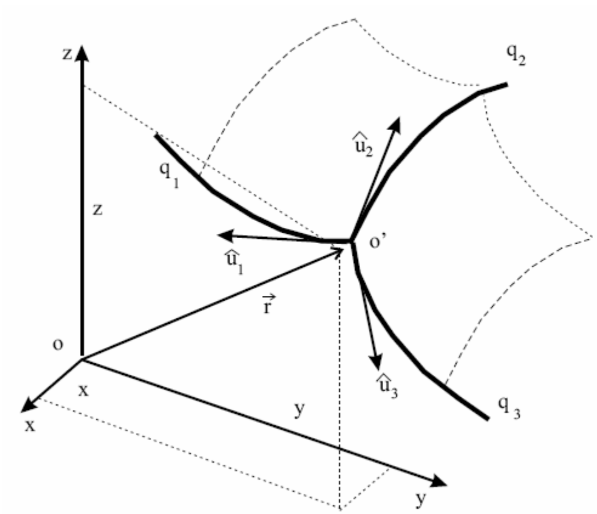
$$T = T(x, y, z)$$

Decimos que un campo es estacionario o constante cuando no depende del tiempo.

Se dice que un campo es uniforme cuando no depende de la posición

Cuando un campo necesita de la existencia de un medio material, diremos que dicho campo es un campo material

Coordenadas



A cada punto del espacio podemos asociar, de forma unívoca, un conjunto de tres números que denominamos coordenadas

En el sistema de coordenadas cartesianas O' $\longrightarrow$ (x,y,z)

Hay otros sistemas cuyos ejes no tienen porqué ser rectas $\longrightarrow$ **Sistemas Curvilíneos**

P $\longrightarrow$ $q_1,\ q_2,\ q_3$

O' (origen para el sistema curvilíneo) $\longrightarrow$ $q_1,\ q_2,\ q_3$

Para definir tales coordenadas curvilíneas establecemos una correspondencia biunívoca entre ellas y las coordenadas cartesianas

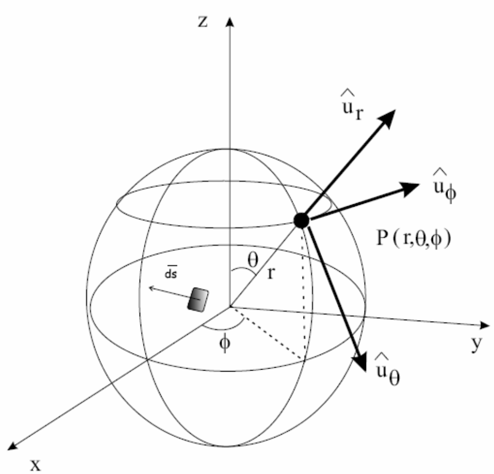
$$\left\{\begin{aligned} x &= x\,(q_1,\ q_2,\ q_3) \\ y &= y\,(q_1,\ q_2,\ q_3) \\ z &= z\,(q_1,\ q_2,\ q_3) \end{aligned}\right.$$

Coordenadas esféricas

$q_1,\ q_2,\ q_3 \longrightarrow (r,\theta,\phi)$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,\sin\theta\,\cos\phi \\ y &= r\,sin\theta\,\sin\phi \\ x &= r\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

$0 \le \theta \le \pi$ y $0 \le \phi \le 2\pi.$



Coordenadas cilíndricas

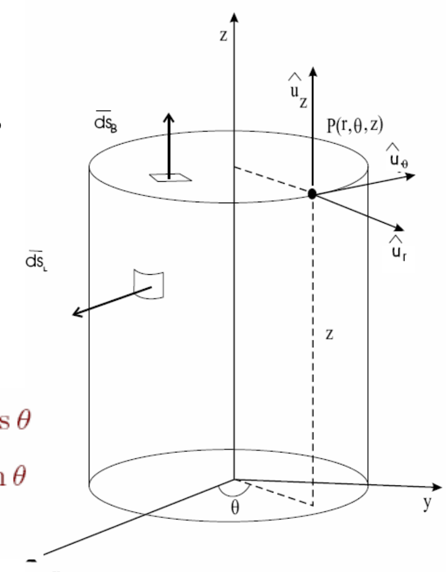
$q_1,\ q_2,\ q_3$

$(r,\theta,z) \longrightarrow$

$x = r\,\cos\theta$

$y = r\,\sin\theta$

$z = z$



Vectores unitarios

Cartesianos $\longrightarrow$ $\hat{\imath}\quad \hat{\jmath}\quad \hat{k}$

Cilíndricos $\longrightarrow$ $\hat{r}\quad \hat{\theta}\quad \hat{z}$

Esféricos $\longrightarrow$ $\hat{r}\quad \hat{\theta}\quad \hat{\phi}$

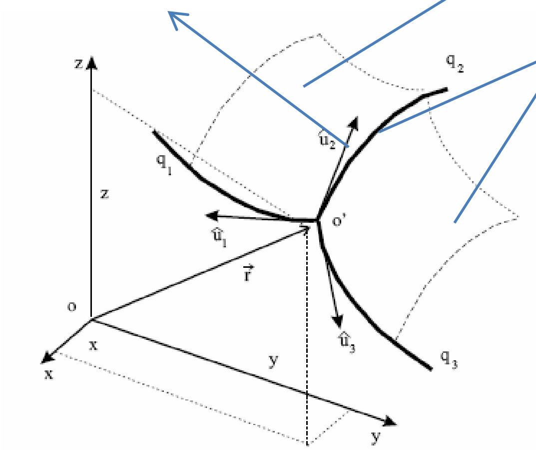
Los vectores unitarios son los vectores tangentes unitarios a las líneas coordenadas

Las líneas coordenadas se corresponden con la intersección dos a dos de las superficies que definen el triedro

Intersección de superficies forma

Línea coordenada

Vector unitario



$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} = x(q_i)\,\hat{\imath} + y(q_i)\,\hat{\jmath} + z(q_i)\,\hat{k}$$

los vectores tangentes a las líneas son

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\hat{k}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\hat{k}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial x}{\partial q_3}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\hat{k}$$

El vector unitario lo determinamos

$$\hat{u}_t = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

Factor de escala

Aplicación-. Determina el factor de escala según la dirección radial en coordenadas cilíndricas

El vector de posición de un punto p en coordenadas cilíndricas

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} + z\hat{z}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

Propuesto.- Determina todos los factores de escala en coordenadas cilíndricas y esféricas

Elemento de arco, área y volumen

El elemento de arco corresponde al análisis de la variación de $\vec{r}$ con respecto a las coordenadas curvilíneas

$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) dq_1 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right) dq_2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right) dq_3$$

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{u}_1 + h_2 dq_2 \hat{u}_2 + h_3 dq_3 \hat{u}_3$$

Cilíndricas $\quad \vec{dl} = dr\,\hat{r} + r\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$

Esféricas $\quad \vec{dl} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\,\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$

Los elementos de área los obtenemos a partir del producto vectorial de las componentes curvilíneas del elemento de arco

dirección del unitario $\hat{u}_1$

$$\left\{\begin{aligned} d\hat{s}_1 &= h_2 dq_2 \hat{u}_2 \times h_3 dq_3 \hat{u}_3 \\ d\hat{s}_1 &= h_2 dq_2 h_3 dq_3 \hat{u}_1 \end{aligned}\right.$$

Si el vector del elemento de superficie lleva la misma dirección que el unitario $\hat{u}_2$

$$\left\{\begin{aligned} d\hat{s}_2 &= h_1 dq_1 \hat{u}_1 \times h_3 dq_3 \hat{u}_3 \\ d\hat{s}_2 &= h_1 dq_1 h_3 dq_3 \hat{u}_2 \end{aligned}\right.$$

si la dirección coincide con el unitario $\hat{u}_3$

$$\left\{\begin{aligned} d\hat{s}_3 &= h_1 dq_1 \hat{u}_1 \times h_2 dq_2 \hat{u}_2 \\ d\hat{s}_3 &= h_1 dq_1 h_2 dq_2 \hat{u}_3 \end{aligned}\right.$$

El elemento de volumen es el volumen determinado por las componentes del elemento de arco

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{u}_1 + h_2 dq_2 \hat{u}_2 + h_3 dq_3 \hat{u}_3$$

$$\begin{aligned} dv &= h_1 dq_1 \hat{u}_1 \cdot (h_2 dq_2 \hat{u}_2 \times \ h_3 dq_3 \hat{u}_3) = \\ &= h_1 dq_1 h_2 dq_2 h_3 dq_3 \hat{u}_1 \left(\hat{u}_1 \cdot (\hat{u}_2 \times \hat{u}_3)\right) = \\ &= h_1 dq_1 h_2 dq_2 h_3 dq_3 \end{aligned}$$

Aplicación.- Determina los elementos de arco, superficie y volumen para las coordenadas esféricas

	Arco	Superficie	Volumen
Esféricas	$\vec{dl} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\,\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$	$d\vec{s}_r = r^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$	$dv = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$
		$d\vec{s}_\theta, =, r\,\sin\theta\,dr\,d\phi$	
		$d\vec{s}_\phi = r\,dr\,d\theta$	

Ejercicio propuesto.- Determina elementos de arco, volumen y superficie para las coordenadas cilíndricas

➪ Dado un campo en coordenadas cartesianas, $\vec{A} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$. Determina su expresión en coordenadas cilíndricas.

➪ Dado un campo en coordenadas cartesianas, $\vec{A} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$. Determina su expresión en coordenadas cilíndricas.

La posición de un punto en el sistema de coordenadas cartesianas viene determinado por el vector $\longrightarrow$ $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$

Los vectores unitarios $\longrightarrow$ $\hat{u}_i = \dfrac{1}{h_i}\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \dfrac{1}{h_i}\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_i}\,\hat{\imath} + \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial y}{\partial q_i}\,\hat{\jmath} + \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\,\hat{k}\right)$

obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Si queremos expresar, como es el caso, los vectores unitarios i, j, k en función de los unitarios curvilíneos, tomamos la matriz inversa

$$\begin{pmatrix} cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

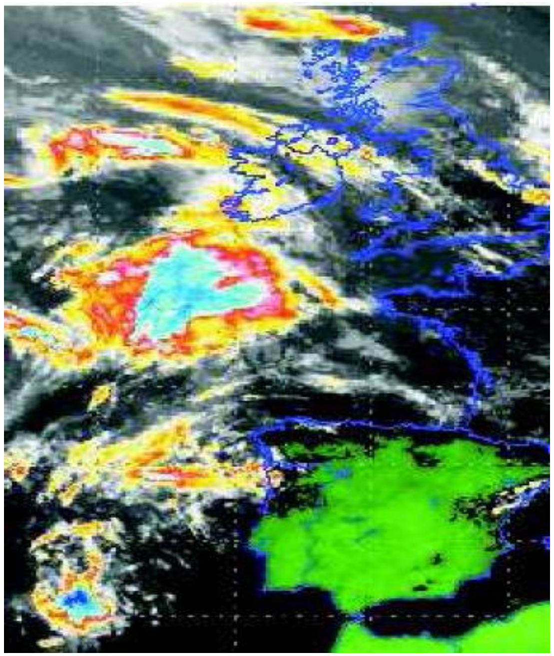
$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\imath} &= \hat{r}\,\cos\theta - \sin\theta\,\hat{\theta} \\ \hat{\jmath} &= \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta} \\ \hat{k} &= \hat{z} \end{aligned}}$$

$\longleftarrow$

$$\vec{A} = (r\,\cos\theta)\,(\hat{r}\,\cos\theta - \sin\theta\,\hat{\theta}) + (r\,\sin\theta)\,(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}) + z\,\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{A} = r\,\hat{r} + z\,\hat{z}}$$

CAMPO ESCALAR



En el espacio se pueden encontrar puntos donde el valor del campo, en este caso la temperatura, sea la misma. Estos puntos forman una superficie que llamamos de nivel o equiescalar, siendo su ecuación

$$T(x,y,z) = \text{cte}.$$

Si dibujamos dichas superficies obtenemos la representación gráfica del campo escalar.

Magnitudes que nos proporcionan información del campo

Gradiente

El gradiente nos va a informar sobre cómo desplazarnos en el seno de un campo escalar, para determinar puntualmente la máxima variación de éste.

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,z} \hat{\imath} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x,z} \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{x,y} \hat{k}}$$

➪ A partir del punto $P_0(-1,3,2)$, ¿hacia qué dirección hay que dirigirse para que aumente el campo $\phi = (x+y)^2 + z^2 - xy + 2z$ lo más rápidamente posible.

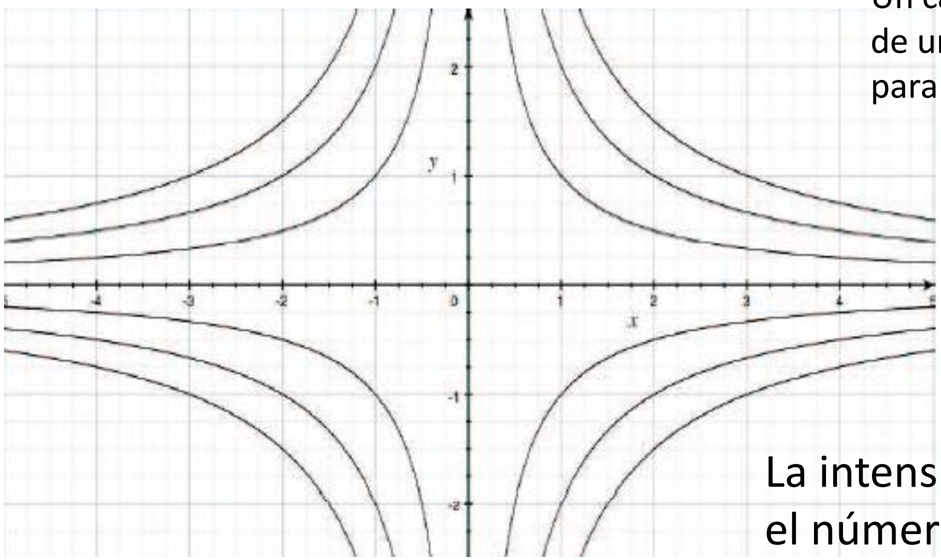
$$\left[\overrightarrow{grad}\,\phi\right]_{(-1,3,2)} = \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right]_{(-1,3,2)}$$

$$\left[\overrightarrow{grad}\,\phi\right]_{(-1,3,2)} = [(\,2(x+y) - y,\ 2(x+y) - x,\ 2z + 2\,)]_{(-1,3,2)}$$

$$\left[\overrightarrow{grad}\,\phi\right]_{(-1,3,2)} = (1,5,6)$$

Campo vectorial

Nuestro objetivo se centra en buscar magnitudes que nos permitan la visualización del campo, de forma análoga a la que realizamos con el campo escalar. Para ello la representación del campo la realizaremos mediante líneas de campo, líneas construidas de forma que sean tangentes en cada punto al vector campo y que estén dirigidas según el sentido de éste.



Un campo vectorial M , nos desplazamos un dr a lo largo de una línea de campo. Bajo esta situación el campo M es paralelo al desplazamiento dr

$$\frac{dx}{M_x} = \frac{dy}{M_y} = \frac{dz}{M_z}$$

La intensidad o módulo del campo está indicado por el número de líneas de campo que atraviesa una superficie normal a ellas

$$\frac{dn}{dS_n} = M$$

➪ Disponemos de un campo vectorial, $\vec{V} = -a \sin z\,\hat{\imath} + b \cos z\,\hat{\jmath} + a$, siendo a y b constantes. Determina las ecuaciones de las líneas de campo.

$$\frac{dx}{-a \sin z} = \frac{dy}{b \cos z} = \frac{dz}{a} \xrightarrow{\text{integramos}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dz} = -\sin z \quad \Rightarrow \quad x = \cos z + C \\ \dfrac{dy}{dz} = \left(\dfrac{a}{b}\right) \cos z \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{b}{a} \sin z \end{array} \right.$$

$$z = z$$

Ejercicio propuesto

➪ Sea el campo $\vec{V} = V_0\,(x\,\hat{\jmath} - y\,\hat{\imath})$. Determina la ecuación de las líneas de campo y trázalas.

Campo vectorial

Magnitudes

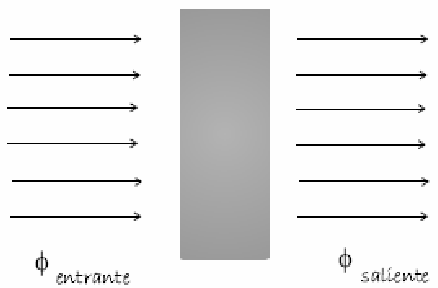
FLUJO

Definimos el flujo elemental de un campo vectorial $\vec{M}$, a través de una superficie elemental $d\vec{S}$ como

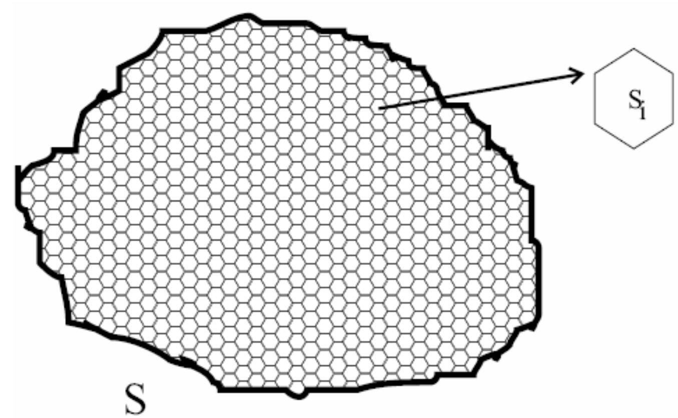
$$\boxed{d\phi = \vec{M} \cdot d\vec{S}}$$

El flujo nos informa del número de líneas que atraviesa una determinada superficie

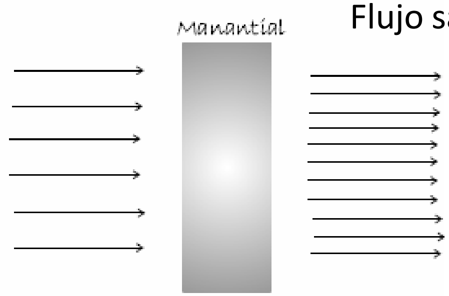
Flujo saliente = Flujo entrante



Superficie carece de fuentes

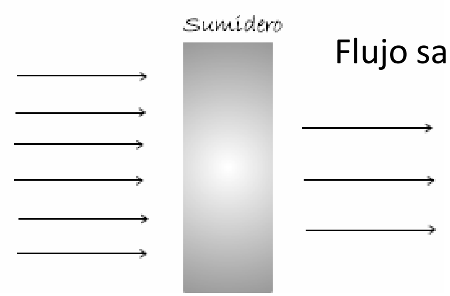


Flujo saliente mayor flujo entrante



La superficie encierra fuentes **Manantiales**

Flujo saliente menor Flujo entrante

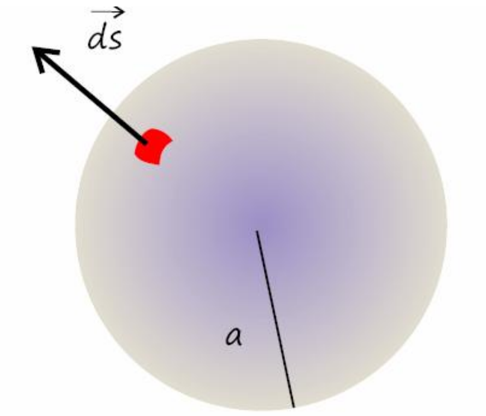


La superficie encierra fuentes **Sumideros**

$$\boxed{\phi = \int_s \vec{M} \cdot d\vec{s}}$$

El Flujo no es una magnitud que caracterice localmente al campo

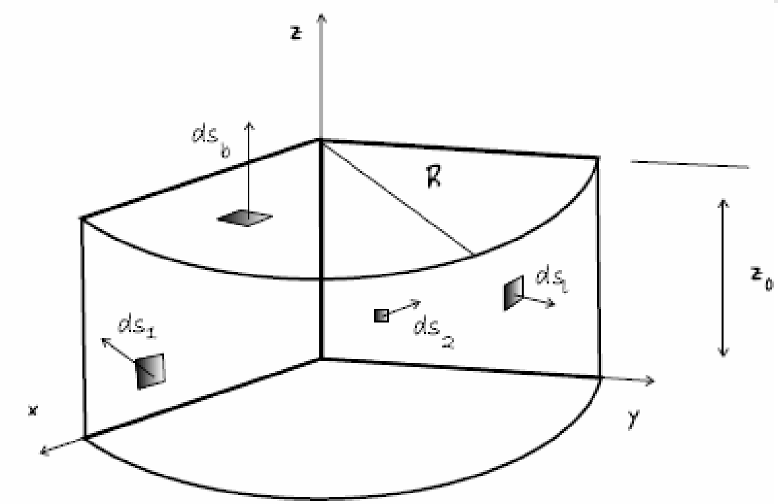
➪ Disponemos de un campo $\vec{V} = 2\,r^2\,\hat{r}$ en coordenadas esféricas. Determina el flujo de dicho campo a través de una esfera de radio R.



$$\vec{ds} = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}$$

$$\phi = \int_S \vec{V}\cdot\vec{ds} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} (2\,R^2)(R^2 \sin\theta\, d\theta = 8\,\pi\,R^4$$

➪ Disponemos de un campo vectorial $\vec{V} = z\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} - 3y^2 z\,\hat{k}$ y queremos hallar el flujo a través de la superficie indicada en la figura.



Ejercicio propuesto

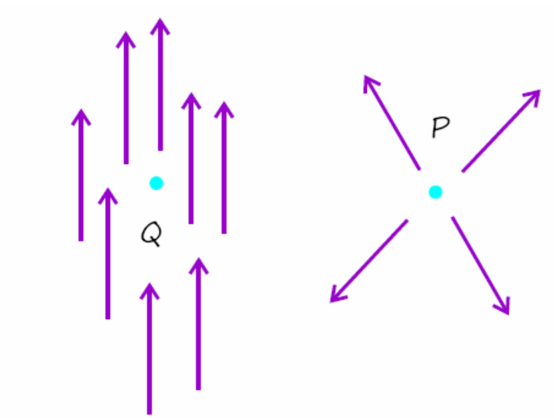
Campo vectorial

Magnitudes

FLUJO → No caracteriza localmente al campo

Introducimos una magnitud nueva → DIVERGENCIA

Nos informa de lo mismo que el flujo y además caracteriza localmente al campo



$$div\vec{M} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\phi_i}{\delta v}$$

Flujo saliente a través de una superficie

que envuelve a este volumen

Observamos como en el punto P existe divergencia, mientras que en el punto Q la divergencia es nula

Expresión en coordenadas cartesianas

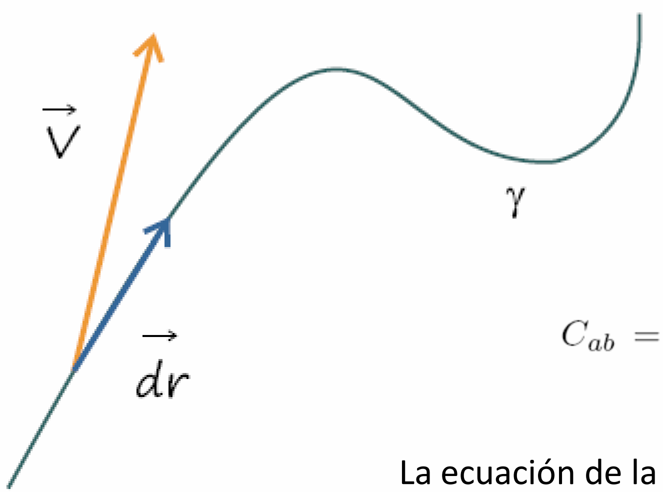
$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Campo vectorial

Magnitudes

- FLUJO
- DIVERGENCIA
- CIRCULACIÓN

Dado un campo vectorial $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$, definimos la *circulación elemental* de este campo a lo largo de una curva γ, a la proyección del campo sobre el desplazamiento elemental a lo largo de dicha curva, tal y como se muestra en la figura adjunta,



$$dc = \vec{V} \cdot \vec{dr}$$

$$C_{ab} = \int_a^b \vec{V} \cdot \vec{dr}$$

$$C_{ab} = \int_a^b (V_x, V_y, V_z) \cdot (dx, dy, dz) = \int_a^b V_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz$$

La ecuación de la curva para expresar todas las variables en función de un solo aparato

➪ Dado el campo vectorial $\vec{A} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y la curva γ de ecuaciones

$$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad z = 3t$$

Determina la circulación del campo al desplazarse a lo largo de la curva adjunta desde el punto $P(1,0,0)$ al $Q(0,1,3\pi/2)$.

$$C_{PQ} = \int_P^Q \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int_P^Q (x,y,z)\cdot(dx,dy,dz) = \int_P^Q xdx + ydy + zdz$$

$$x = \cos t \;\Rightarrow\; dx = -\sin t\,dt$$

$$y = \sin t \;\Rightarrow\; dy = \cos t\,dt$$

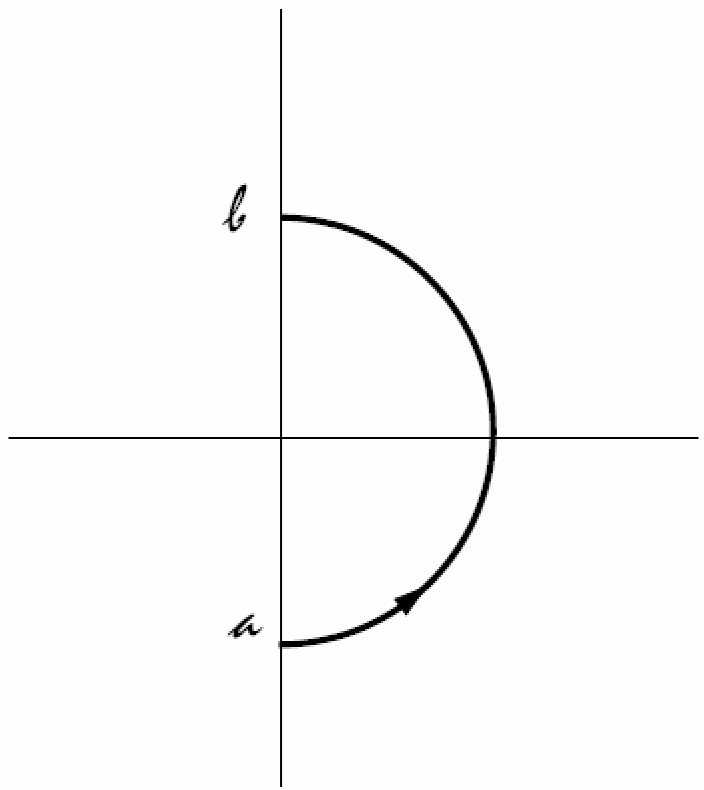
Los puntos P y Q corresponden $t = 0$ y $t = \pi/2$

$$z = 3t \;\Rightarrow\; dz = 3\,dt$$

$$C_{PQ} = \int_0^{\pi/2} -\cos t\,\sin t\,dt + \cos t\,\sin t\,dt + 9tdt = \int_0^{\pi/2} 9tdt = \frac{9\,\pi^2}{8}$$

Ejercicio propuesto

➪ Determina la circulación del campo $\vec{V} = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath}$ a lo largo de la semicircunferencia de radio unidad de la figura 1.5.4 entre los puntos a y b.



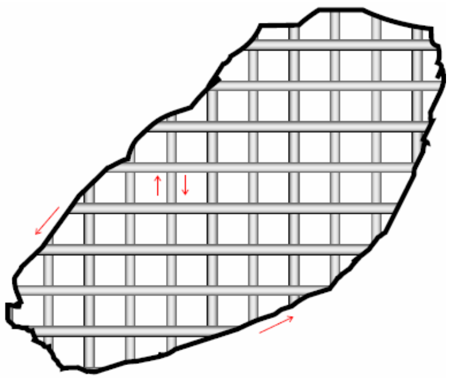
Campo vectorial

Magnitudes

CIRCULACIÓN

No caracteriza localmente al camp

Rotacional



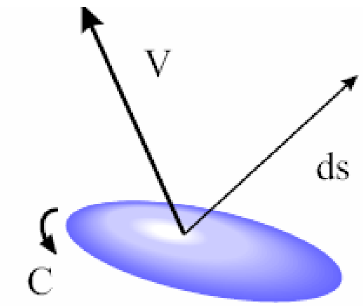
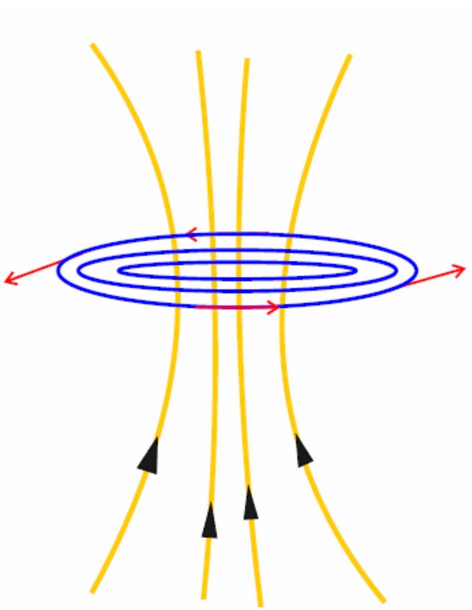


Figura 1.14: El flujo del rotacional a través de la superficie $\vec{ds}$ es la circulación del campo alrededor del contorno de dicha superficie.

$$|\overrightarrow{Rot\vec{V}}| = \lim_{s \to 0} \frac{\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{dl}}{s}$$



$$\overrightarrow{Rot\vec{V}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

PROPIEDADES

* Puede suceder que dado un campo vectorial V , exista un campo escalar asociado, de forma que el campo de gradientes coincida con el campo vectorial en cuestión. Cuando esto ocurre, decimos que el campo vectorial deriva de un campo escalar que denominamos ***potencial escalar***

* De igual forma dado un campo vectorial V , es posible encontrar un campo vectorial A, de forma que el campo de rotores coincida con el campo en cuestión. Al campo A le denominamos ***potencial vector*** .

* Si el campo deriva de un potencial escalar, entonces la circulación del campo a lo largo de cierta curva que una dos puntos depende sólo de éstos y no del camino seguido

$$\int_{a_\gamma}^{b} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{a_\gamma}^{b} \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{dl} = \int_{a_\gamma}^{b} d\Psi = \Psi(b) - \Psi(a)$$

* La circulación del campo que deriva de un potencial escalar a lo largo de un contorno cerrado es nula.

*Sabemos que el rotacional del gradiente de un campo escalar es siempre nulo, por tanto si un campo V deriva de un potencial escalar , entonces dicho campo V no tendrá un campo de rotores asociado, es decir el campo será un campo ***irrotacional o conservativo***

*Los recíprocos son ciertos. Es decir, si la circulación de un campo a lo largo de un contorno o camino cerrado es nula, entonces el campo es conservativo. Si un campo es irrotacional, el campo es conservativo.

➪ Sea un campo vectorial $(2x+z)\,\hat{\imath} + e^{y}\,\hat{\jmath} + x\,\hat{k}$ irrotacional, determina el campo o potencial escalar asociado.