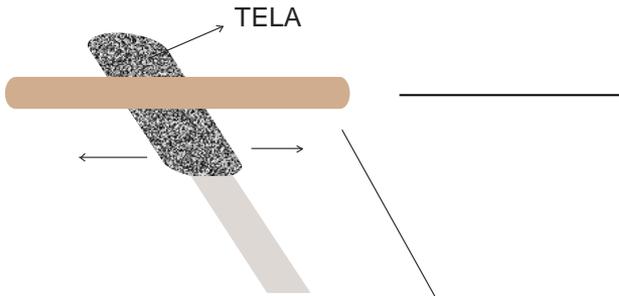


Electricidad → elektron → ámbar



Thales de Mileto

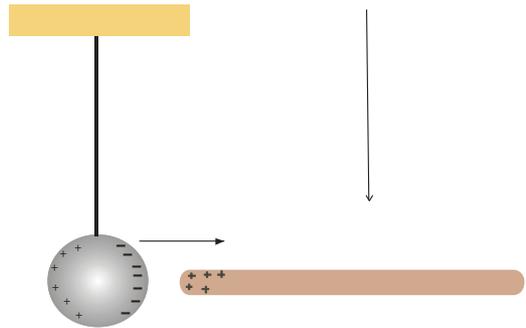


El poder del ámbar era algo natural

posteriormente El vidrio igual

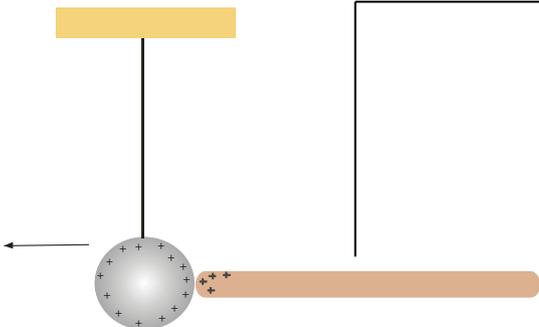
Frotamos una varilla de vidrio y la acercamos sin llegar a tocar, a una esfera metálica

La esfera se mueve hacia La varilla



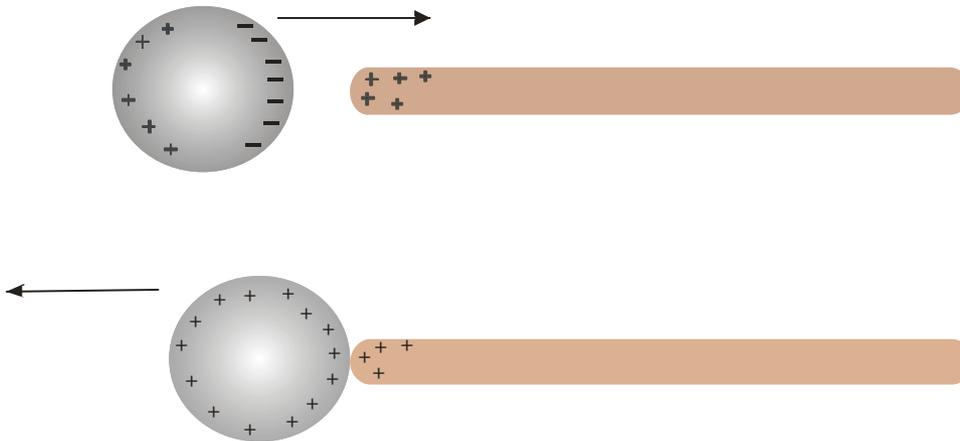
Frotamos una varilla de vidrio, la acercamos a una esfera metálica y la tocamos

La esfera se mueve hacia La varilla



Campo eléctrico

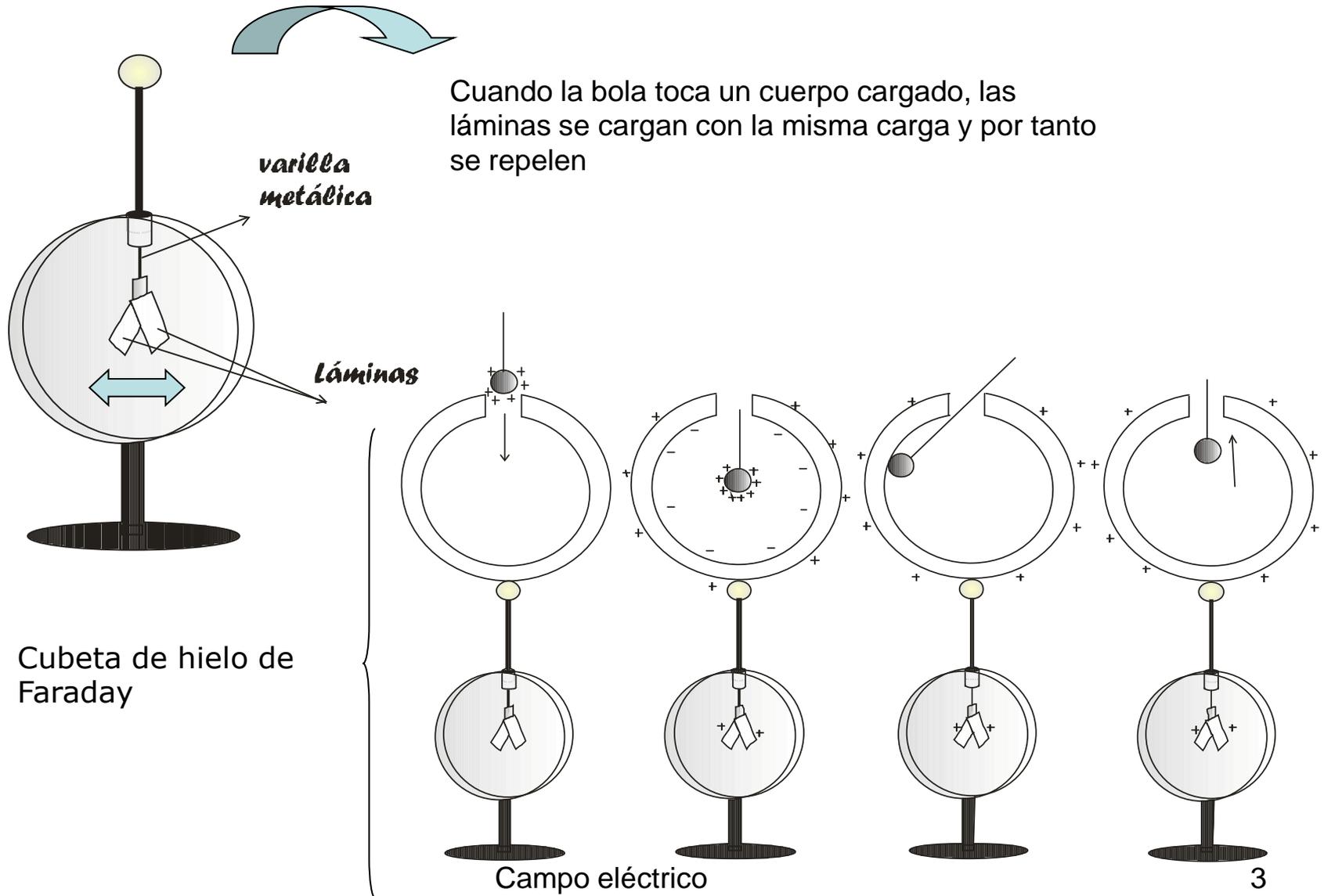
## DEDUCIMOS:



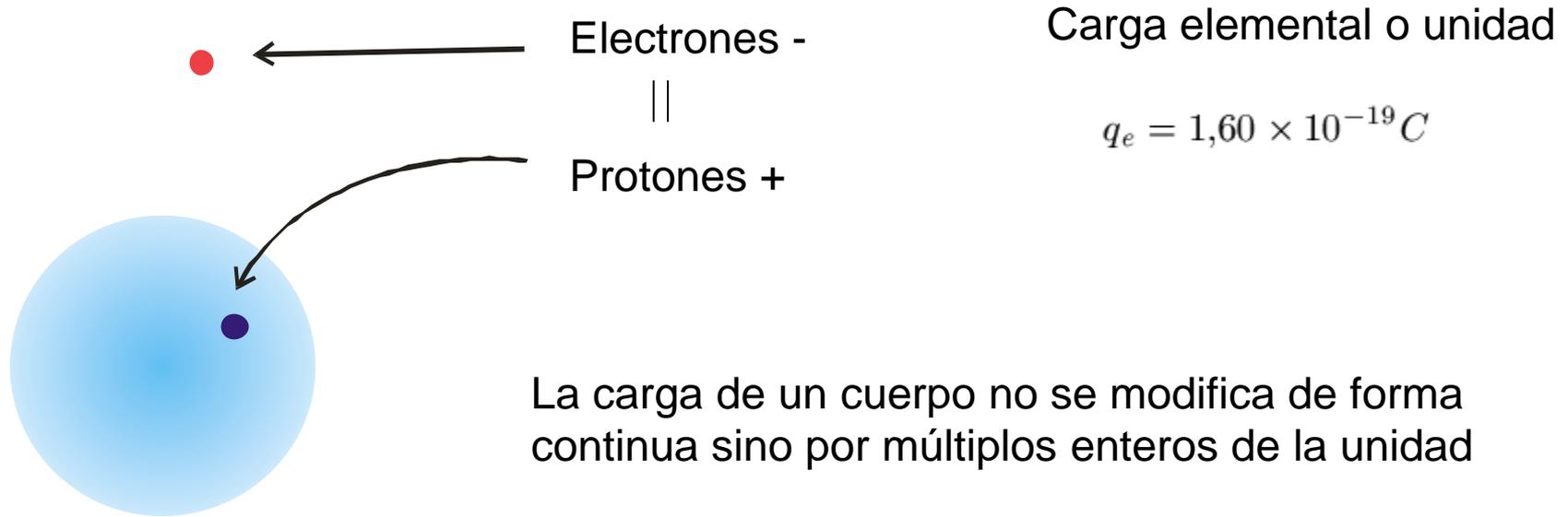
- Las barras se electrifican es decir, se cargan.
- Establecemos dos estados de electrización, uno '+' y otro '-'.
- Introducimos la carga '+', y la carga '-'.
- Al frotar la varilla, los electrones quedan en el paño, y por tanto la varilla con exceso de carga +.
- Al acercar la varilla, ésta carga atrae a los electrones de la esfera. (carga por inducción).
- Si tocamos la esfera, las cargas positivas neutralizan las negativas, y el sistema queda cargado positivamente (carga por conducción).

- Cuerpos con estado de electrización distinta se aproximan.
- Cuerpos con estado de electrización igual, se atraen.

Para averiguar si un cuerpo está cargado



Cuando la bola toca un cuerpo cargado, las láminas se cargan con la misma carga y por tanto se repelen

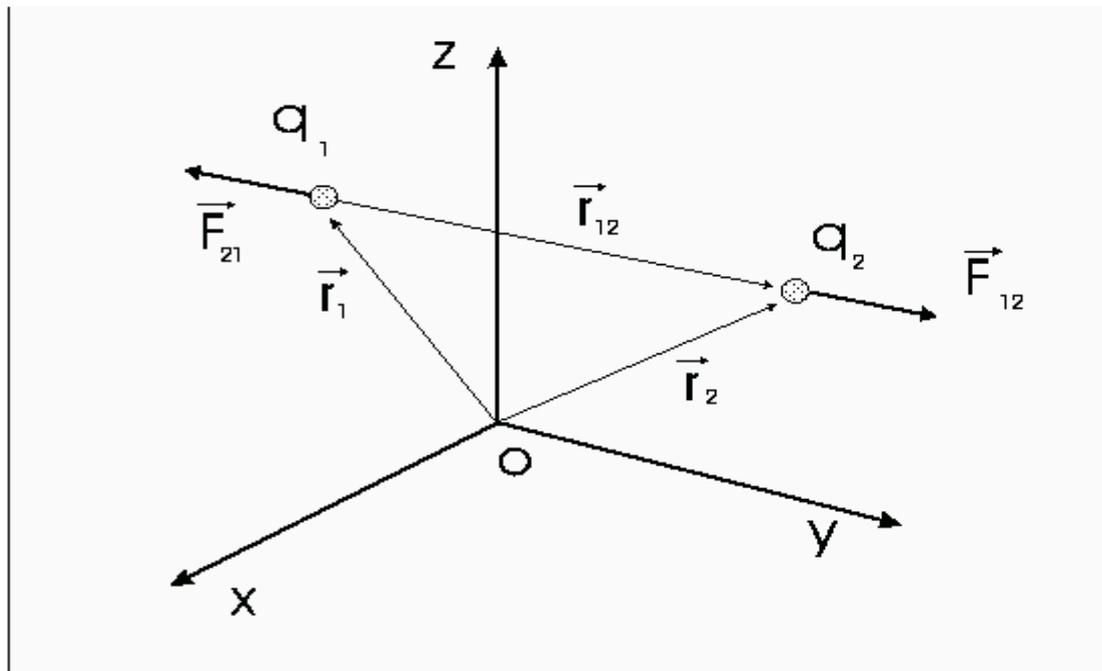


Cuantificamos las interacciones.



La ley de Coulomb

## LEY DE COULOMB



$$\vec{F}_{12} = C \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = C \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Campo Eléctrico

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_{12}$$

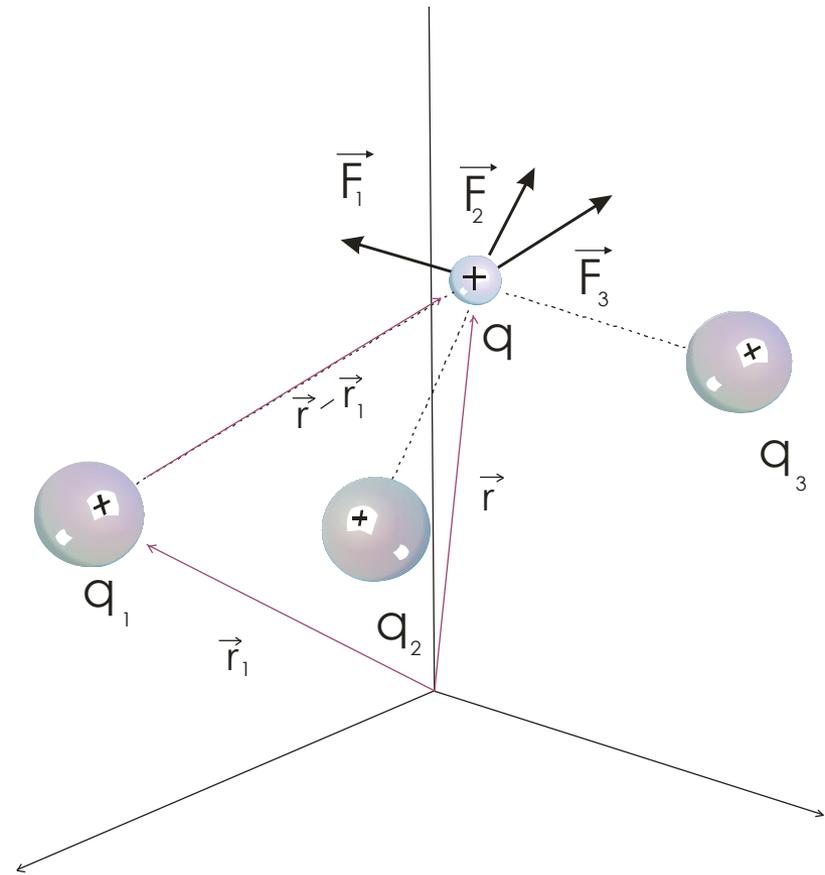
$$(F_{12}) \propto \frac{1}{(r_{12})^2}$$

$$(F_{12}) \propto (q_2)$$

$$(F_{21}) \propto (q_1)$$

$$(F_{12}) \propto (q_2)(q_1)$$

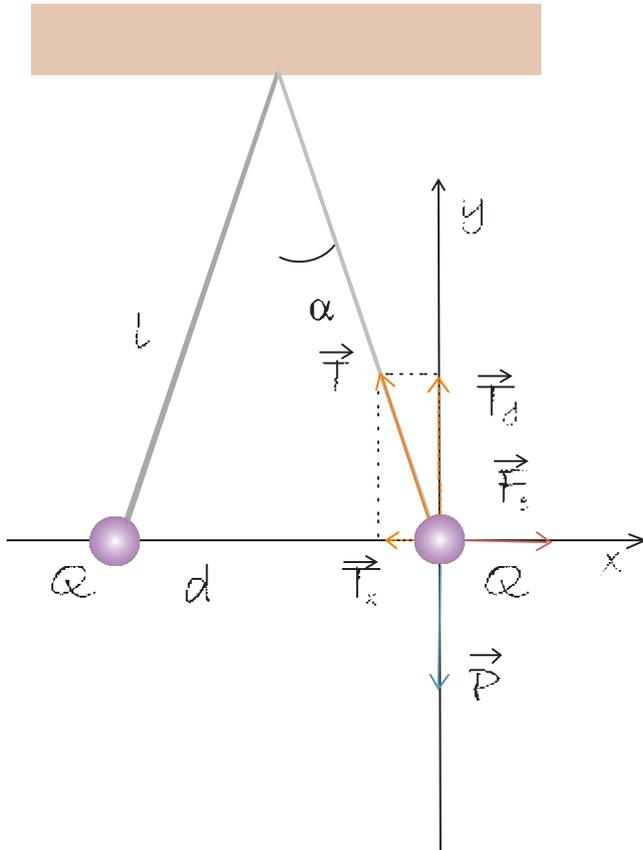
## Principio de superposición

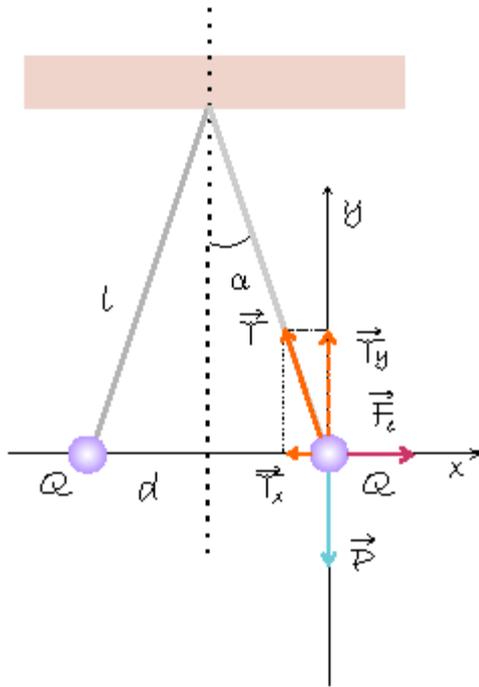


$$\begin{aligned}\vec{F}_T &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|^3} (\vec{r} - \vec{r}_3) + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)\end{aligned}$$

## Aplicaciones

⇨ Dos esferitas iguales de masa  $m$  se cuelgan mediante hilos de masa despreciable y aislantes, tal y como muestra la figura 1.6. Determina la carga de las esferitas para que, cuando el sistema se encuentre en equilibrio, el ángulo formado sea  $\alpha$ .





$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_e - T_x = 0 \\ \sum F_y &= T_y - P = 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} &= T \sin \alpha \\ mg &= T \cos \alpha \end{aligned}$$

Dividimos m a m

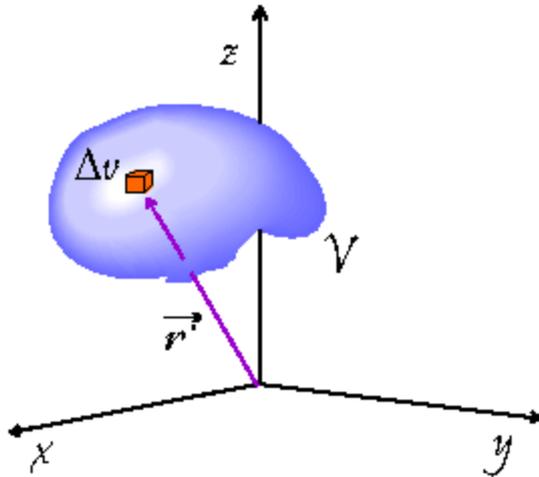
$$\tan \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{m g d^2} \Rightarrow Q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 d^2 m g \tan \alpha} = \sqrt{16\pi\epsilon_0 l^2 m g \tan \alpha \sin^2 \alpha}$$

El valor de la interacción eléctrica es

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2}$$

# Distribuciones continuas de carga

## Densidad volumétrica de carga



La carga contenida en este volumen elemental se expresa en términos de la densidad volumétrica de carga

$$\rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv}$$

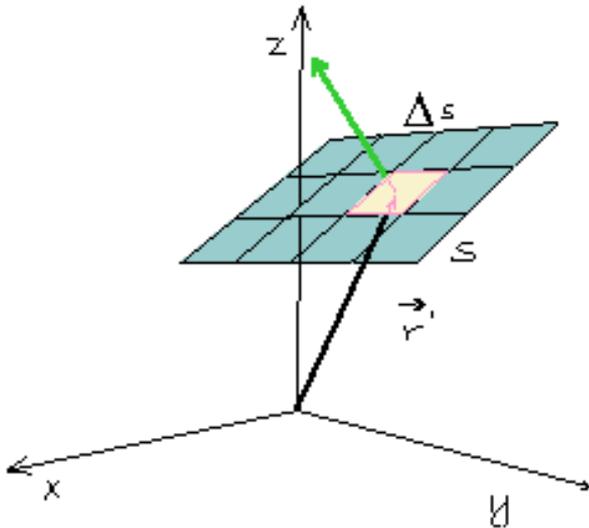
La carga contenida en este volumen elemental es

$$dQ = \rho(\vec{r}') dv$$

La carga contenida en un volumen V es

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}') dv$$

## Densidad superficial de carga



La carga contenida en esta superficie elemental se expresa en términos de la densidad superficial de carga

$$\sigma(\vec{r}') = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds}$$

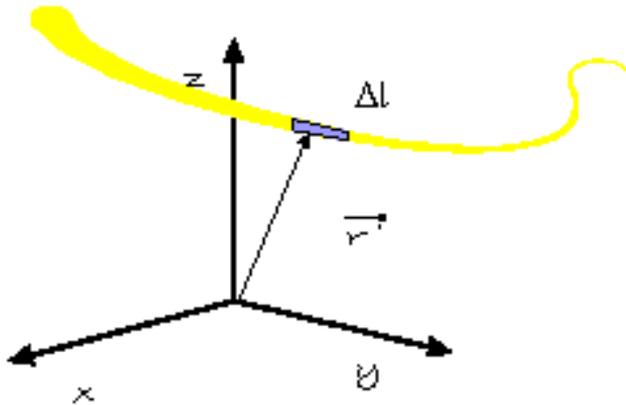
La carga contenida en esta superficie elemental es

$$dQ = \sigma(\vec{r}') ds$$

La carga contenida en una superficie S es

$$Q = \int_S \sigma(\vec{r}') ds$$

## Densidad lineal de carga



La carga contenida en este elemento de longitud se expresa en términos de la densidad lineal de carga

$$\lambda(\vec{r}') = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$$

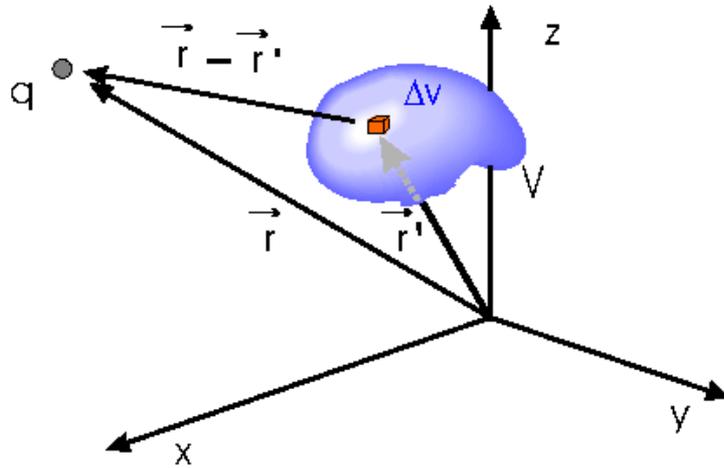
La carga contenida en este elemento de longitud es

$$dq = \lambda(\vec{r}') dl$$

La carga contenida en una longitud L es

$$q = \int_L \lambda(\vec{r}') dl$$

Queremos determinar la interacción que siente una carga puntual  $q$ , cuando se encuentra en las proximidades de una distribución continua de carga.



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dv' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Superficie

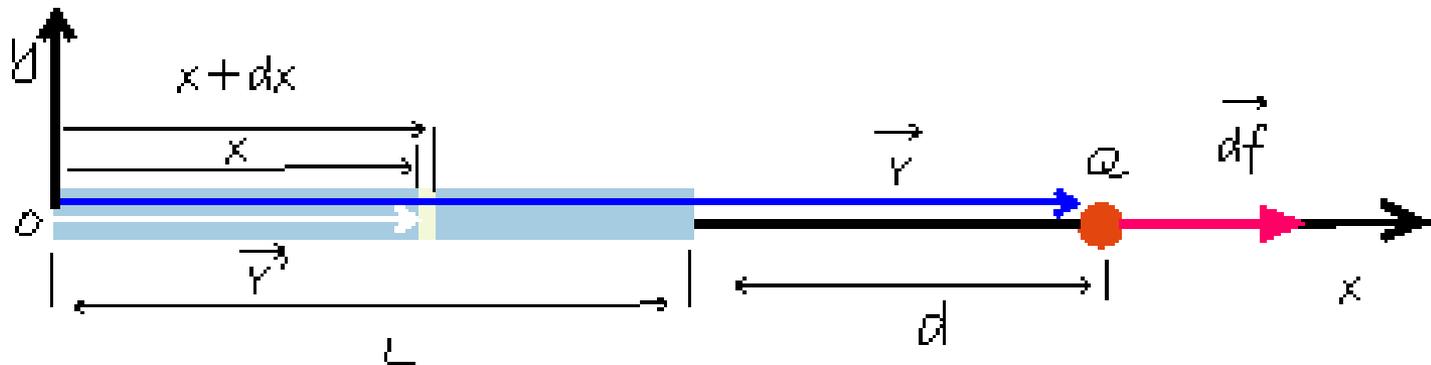
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') ds' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

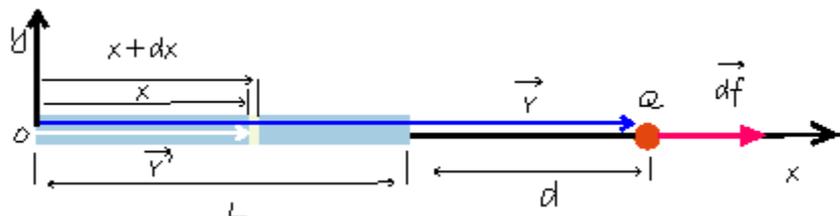
Línea

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') dl' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

## Aplicaciones

- ⇨ Un hilo está uniformemente cargado con una densidad lineal  $\lambda$ . Determina la interacción que siente una carga puntual  $Q$ , situada tal y como se observa en la figura 1.11





Posiciones  $\vec{r}' = (x, 0) \quad \vec{r} = (L + d, 0)$

Posición relativa  $\vec{r} - \vec{r}' = ((L + d) - x, 0) \quad y \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [(L + d) - x]^3$

La interacción resulta

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') dl' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dx}{[(L + d) - x]^3} ((L + d) - x, 0)$$

Operamos

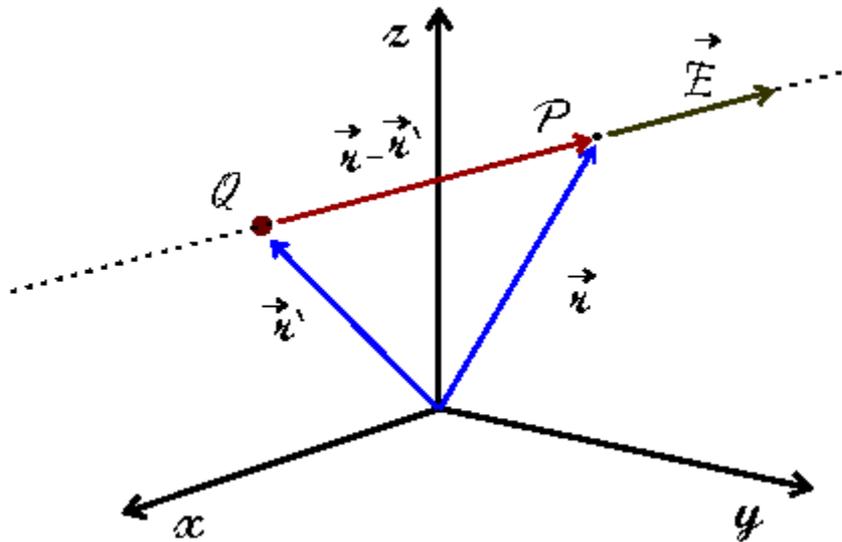
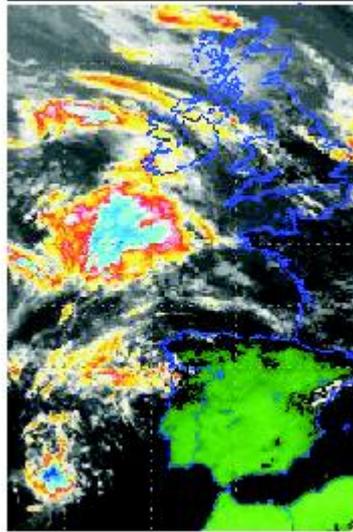
$$\vec{F} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^L \frac{(L + d) dx}{[(L + d) - x]^3} - \int_0^L \frac{x dx}{[(L + d) - x]^3} \right] \hat{i}$$

Realizamos el cambio de variable  $(L + d) - x = t$ , y obtenemos

$$\vec{F} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{(L + d)d} \hat{i}$$

# CAMPO ELÉCTRICO

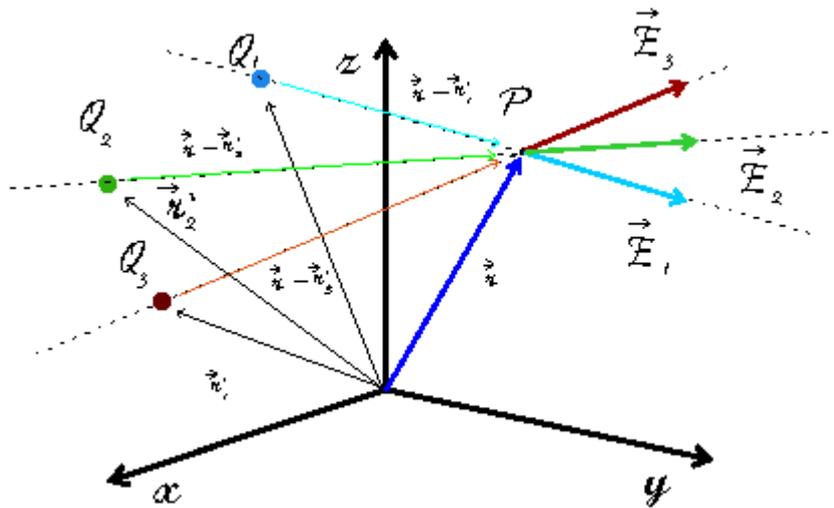
$$M = f(x, y, z, t)$$



$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

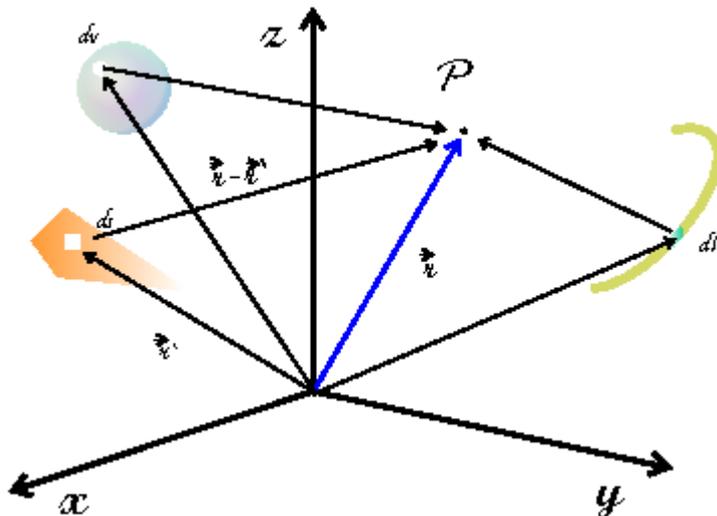
Se verifica el principio de superposición



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^n \frac{Q_i (\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') dl (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma ds' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Campo eléctrico

## Lineas de campo o de fuerza

- Mediante el trazo de líneas ilustramos el campo eléctrico.
- Las líneas de fuerza son curvas que tienen la propiedad de que su tangente en cada punto tiene la misma dirección que el campo eléctrico.
- Esta representación gráfica nos informa de las características del campo, como por ejemplo su intensidad.

Elemento de camino  
a lo largo de la línea

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{z}$$

la condición de tangencia obliga al paralelismo entre el campo  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$ , por tanto

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Campo eléctrico creado por una carga q en un punto P de coordenadas (x,y,z)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

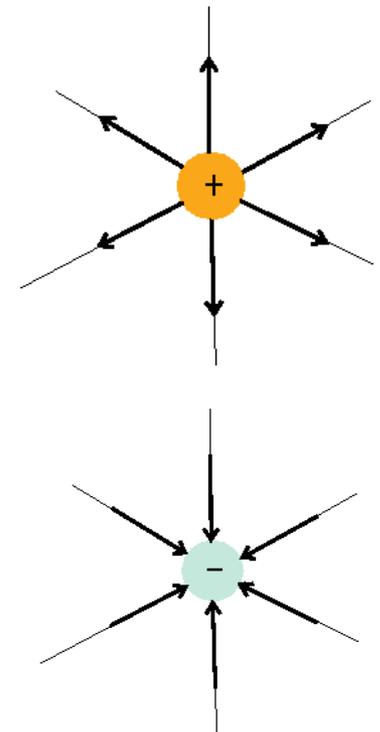
La ecuación de las líneas de campo es

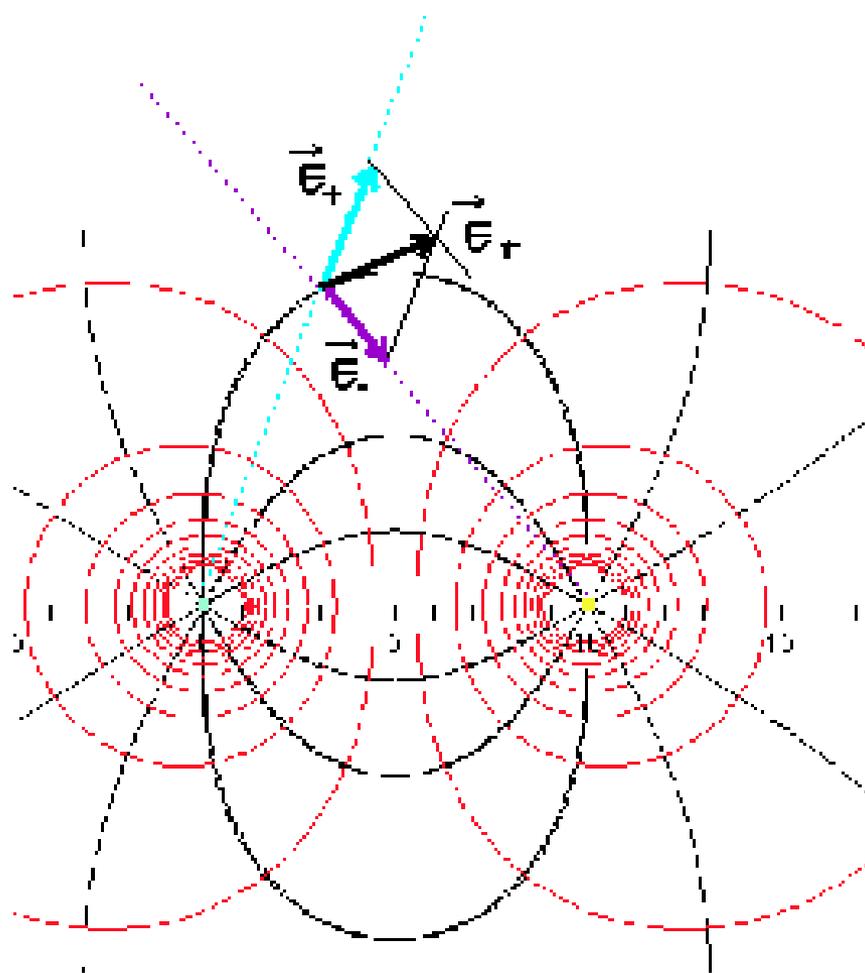
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Integramos

$$\ln k_1 x = \ln k_2 y = \ln k_3 z$$

$$k_1 x = k_2 y = k_3 z$$

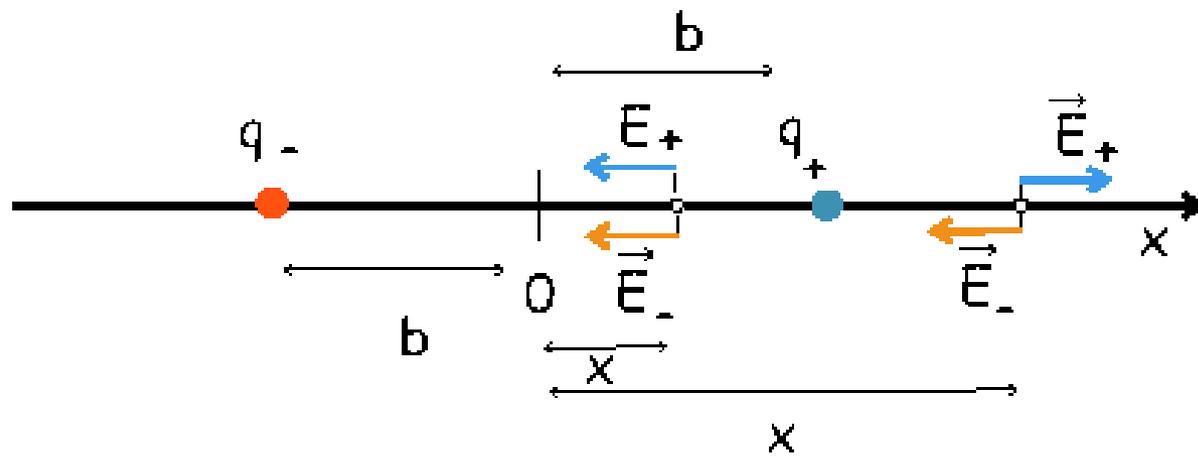


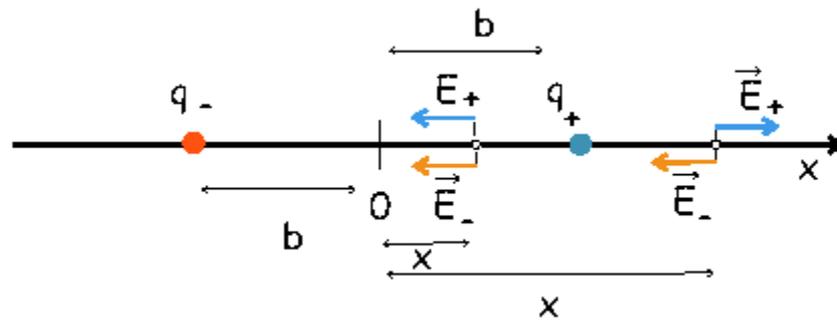


Cuando varias cargas están presentes, determinamos el campo eléctrico neto en un punto y aplicamos la condición de tangencia para construir las líneas de campo.

## Aplicaciones

⇨ Dos cargas están situadas como se indica en la figura 1.17. Determina el campo eléctrico a lo largo de la recta que las une.





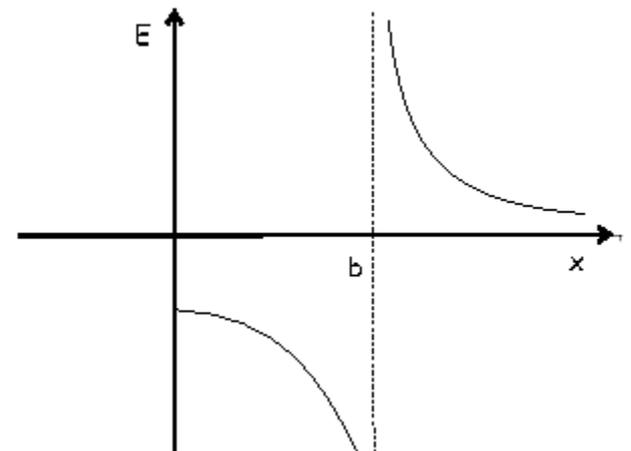
$x > b$

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-b)^2} \hat{i} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x+b)^2} \hat{i} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \, 4bx}{(x^2 - b^2)^2} \hat{i} \end{aligned}$$

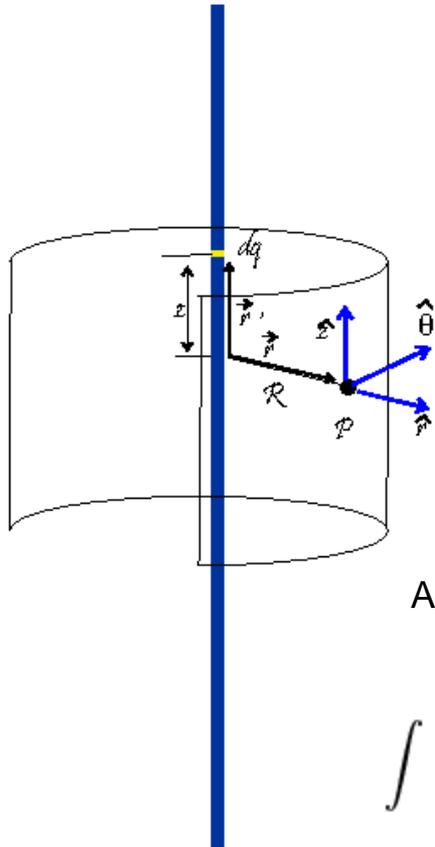
$0 < x < b$

$$\vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(b-x)^2} \hat{i} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(b+x)^2} \hat{i}$$

$$\vec{E}_T = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2(b^2 + x^2)}{(b^2 - x^2)^2} \right] \hat{i}$$



⇨ Un hilo recto de longitud infinita está uniformemente cargado con una densidad lineal  $\lambda$ . Determina en el punto  $P$  de la figura 1.19, el campo eléctrico producido.



$$dq = \lambda dz$$

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Tomamos coordenadas cilíndricas

$$\vec{r}' = (0, 0, z) \quad \vec{r} = (R, 0, 0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (R, 0, -z) \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz (R, 0, -z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz (R, 0, z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Otro elemento

$$\vec{r}'' = (0, 0, -z)$$

Aplicamos principio de superposición

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{r}$$

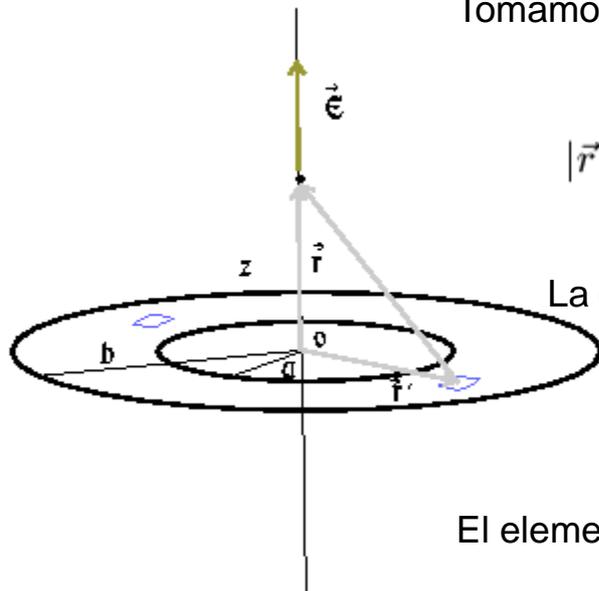
o bien

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda dz R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \lambda R \left[ \frac{z}{R^2 \sqrt{R^2 + z^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{r}$$

⇨ Una distribución superficial uniformemente cargada con una densidad superficial de carga  $\sigma$ , tiene de radios  $a$  y  $b$ , tal y como se indica en la figura 1.20. Determina el campo eléctrico en el punto indicado.



Tomamos coordenadas cilíndricas

$$\vec{r} = (0, 0, z) \quad \vec{r}' = (r, 0, 0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-r, 0, z)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (r^2 + z^2)^{3/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

La expresión del campo elemental es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (-r, 0, z)$$

El elemento de superficie

$$d\vec{s} = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{q}_3 = r dr d\theta \hat{z}$$

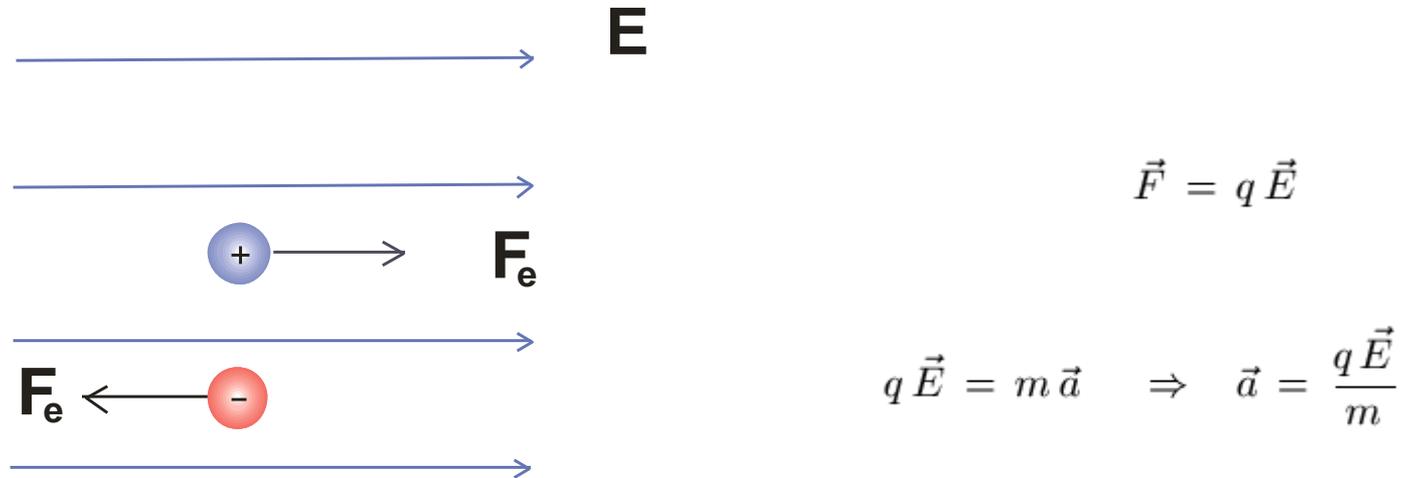
Existe otro elemento que anula la contribución radial

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (2) \int_0^\pi \int_a^b \frac{\sigma z r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

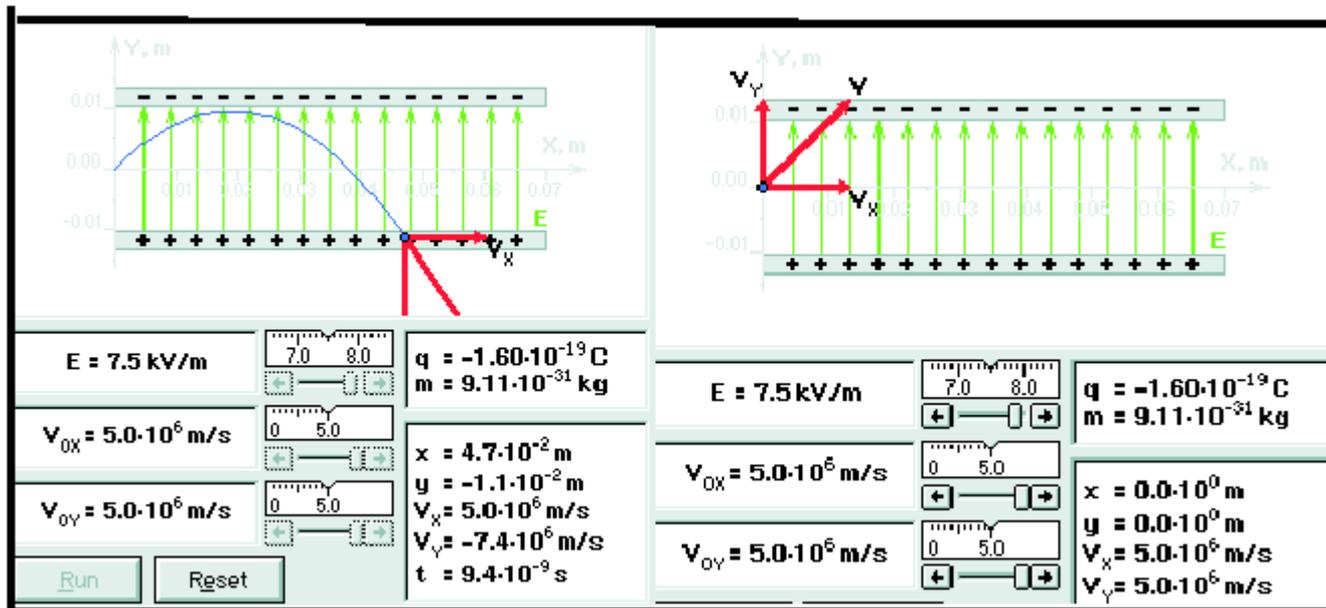
$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

# Movimiento de partículas cargadas



- Si el campo eléctrico es uniforme, entonces la aceleración será constante, y el movimiento de la partícula será un movimiento uniforme acelerado.
- Si la carga que se mueve en el seno del campo eléctrico es positiva, la aceleración y el campo tendrán el mismo sentido. Si la carga es negativa, entonces los sentidos son opuestos.

⇒ En la figura 1.21, observamos un electrón que entra con cierta velocidad inicial en una región donde existe un campo eléctrico uniforme. Comprueba los datos adjuntos.



$$\vec{v}_0 = 510^6 \hat{i} + 510^6 \hat{j} \text{ m/s}$$

La aceleración que adquiere es

$$\vec{a} = \frac{q \vec{E}}{m} = - \frac{1,6 \cdot 10^{-19} (7,5 \cdot 10^3)}{9,11 \cdot 10^{-31}} \hat{j}$$

$$\vec{a} = -1,31 \cdot 10^{15} \hat{j} \text{ m/s}^2$$

Se trata de un movimiento uniforme acelerado, ya que dicha aceleración es constante. Determinamos la posición del electrón en cualquier instante

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

En nuestro caso

$$(x, y) = (0, 0) + (v_{0x}, v_{0y}) t + \frac{1}{2} (0, a) t^2$$

o bien

$$\left. \begin{aligned} x &= v_{0x} t \\ y &= v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned} \right\}$$

Cuando la coordenda  $y$  tiene el valor  $-1,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ , el tiempo que empleará el electrón en incidir con la placa es  $t_i$ ; es decir

$$-1,1 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^6 t_i - \frac{1}{2} 1,31 \cdot 10^{15} t_i^2 \Rightarrow t_i = 9,4 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

La velocidad de incidencia, la determinamos particularizando la velocidad para el instante  $t_i$ . La velocidad en cualquier instante es

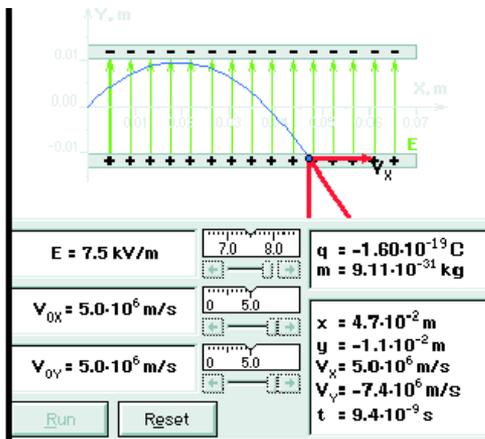
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \Rightarrow (v_x, v_y) = (v_{0x}, v_{0y}) + (0, a_y) t$$

para el instante que nos interesa ( $t_i$ )

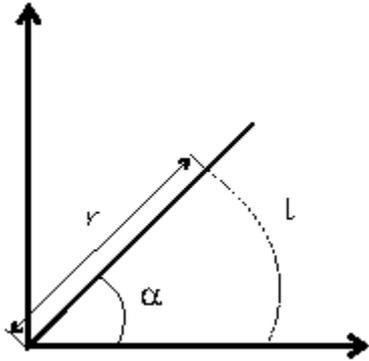
$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} + a_y t_i \end{aligned} \right\}$$

$$v_x = 5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$v_y = 5 \cdot 10^6 + (-1,31 \cdot 10^{15})(9,4 \cdot 10^{-9}) = -7,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$



# Teorema de Gauss

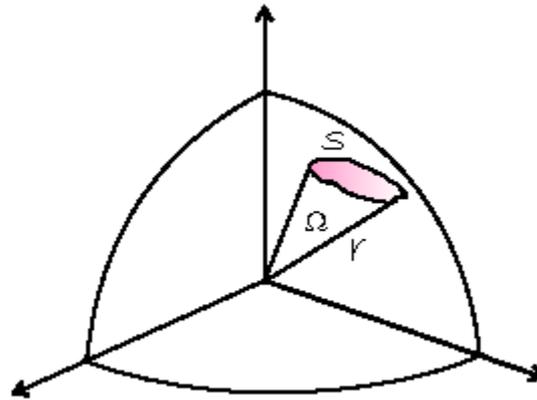


$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Definimos ángulo plano correspondiente a un determinado arco de circunferencia como la relación entre dicho arco y el radio de tal circunferencia

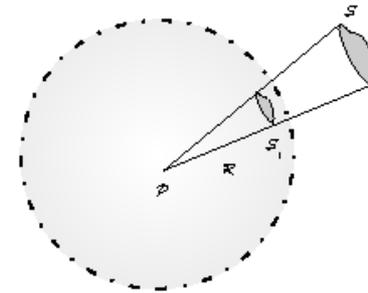
El ángulo sólido sustentado por cierta superficie en un punto, es el ángulo sólido sobre una esfera que tenga centro en dicho punto

Ángulo plano sustentado por un segmento desde un punto. Es el formado por la intersección de las rectas que pasan por dicho punto y los extremos del segmento

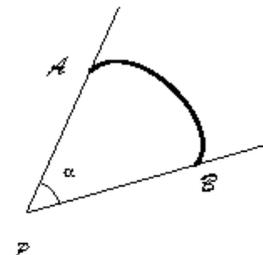


$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

Definimos un ángulo sólido correspondiente a una sección de superficie esférica, como la relación que existe entre la superficie  $S$  y el cuadrado del radio.



$$\Omega = \frac{S_1}{R^2}$$



Cuando el ángulo sólido es pequeño, entonces el área ya no es  $S$  sino  $ds$ , y el ángulo sólido es

$$d\Omega = \frac{ds}{R^2}$$

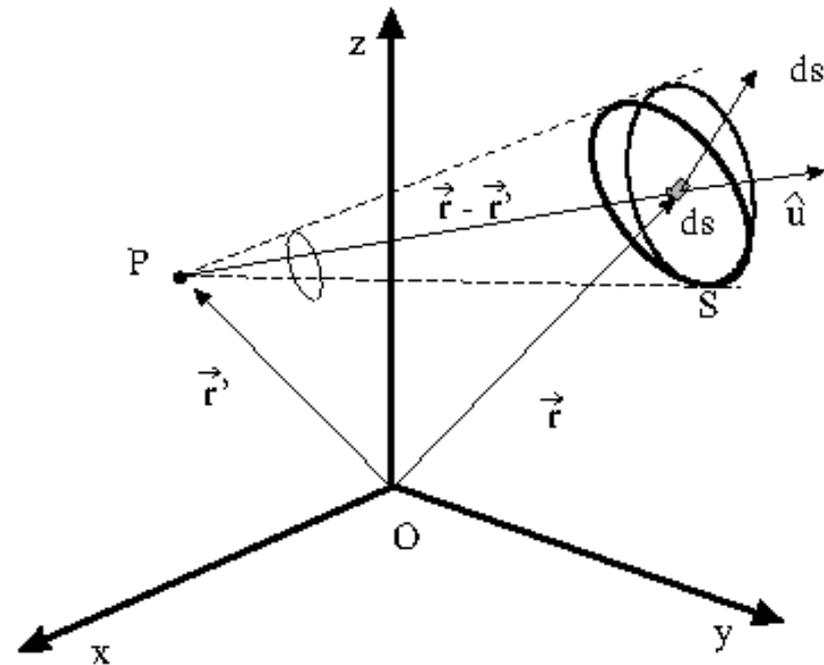
Puede que en algunas situaciones el vector superficie no sea paralelo a la dirección radial,

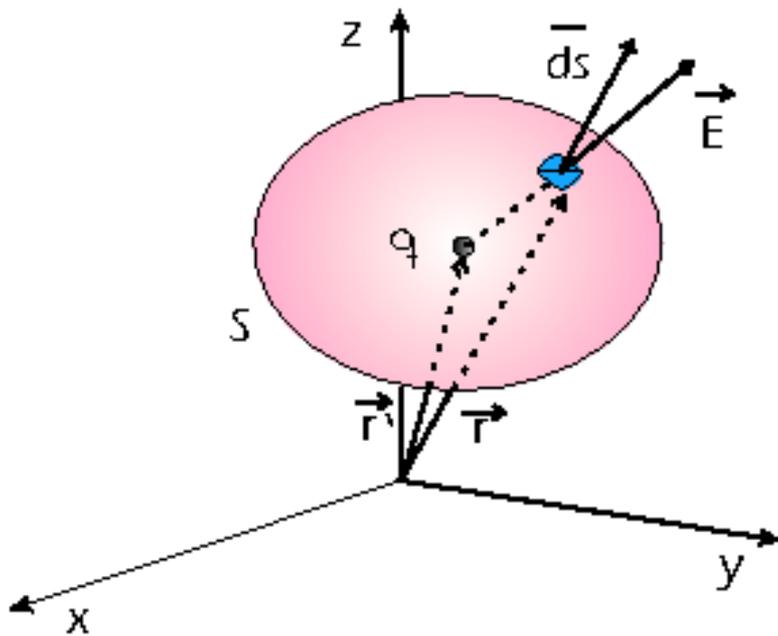
En este caso proyectamos el vector superficie sobre la dirección radial

$$d\Omega = \frac{d\vec{s} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.9)$$

La extensión a toda la superficie, nos dará el ángulo sólido subtendido por tal en el punto P, a cierta distancia  $\vec{r}'$  del origen, es decir

$$\Omega = \int_S d\Omega = \int_S \frac{d\vec{s} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$





S, es una superficie arbitraria, y queremos determinar el flujo del campo eléctrico producido por dicha carga a través de dicha superficie

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{s}$$

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_s d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \Omega$$

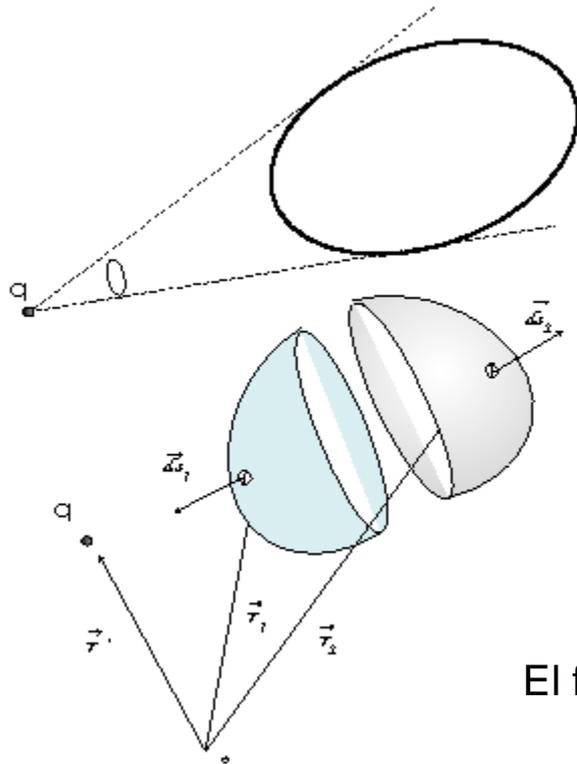
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Si la superficie es cerrada, el ángulo sólido subtendido es  $4\pi$  y por tanto el flujo será

Si la carga es externa a la superficie cerrada

El flujo creado por dicha carga es nulo

Dividimos la superficie en dos partes, los ángulos sólidos subtendidos son



$$d\Omega_1 = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}'}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{s}_1$$

$$d\Omega_2 = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}'}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{s}_2$$

El flujo neto es la suma de los flujos

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{s_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^3}$$

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{s_2} \frac{d\vec{s}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}')}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|^3}$$

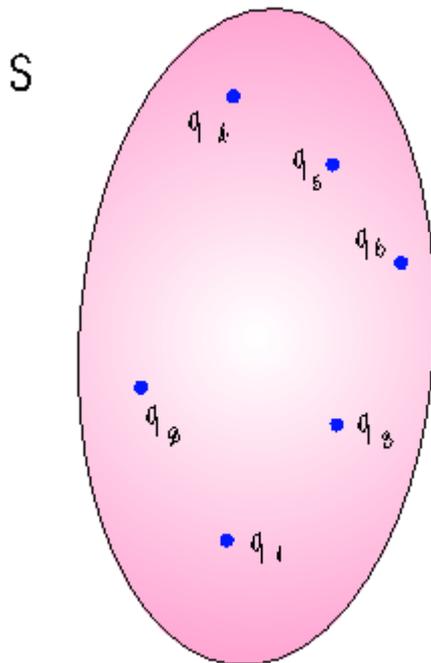
$$\Phi_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{s_1} d\Omega$$

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{s_2} d\Omega$$

El flujo neto será pues

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [-\Omega + \Omega] = 0$$

Si disponemos de más de una carga



$$\begin{aligned} \Phi &= \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{s} \\ &= (\vec{E}_1 \cdot d\vec{s}) + (\vec{E}_2 \cdot d\vec{s}) + \dots + (\vec{E}_n \cdot d\vec{s}) \\ &= \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \sum_1^N \Phi_i \\ &= \sum_i^N \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sum_i^N q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Disponemos de una superficie cerrada y de una distribución discreta de cargas. Tal superficie encierra un número determinado de cargas. El flujo estará restringido sólo a las cargas encerradas por tal superficie.

$$\Phi = \sum_{q_{\text{interiores}}} \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

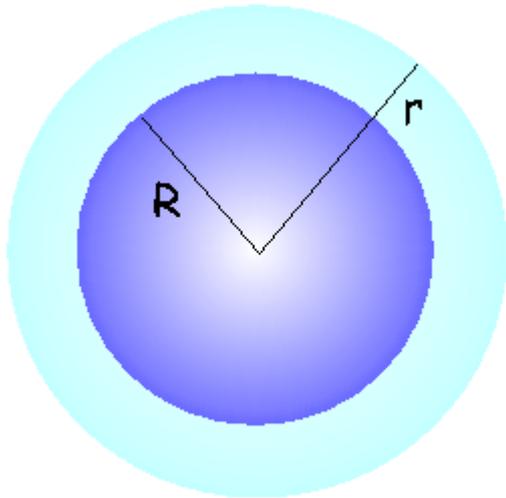
Generalizamos para una distribución continua de carga

$$\Phi = \frac{\int_V \rho(\vec{r}') dv}{\epsilon_0}$$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dv$$

## Aplicaciones

⇨ Disponemos de una esfera de radio  $R$  con una distribución de carga que depende de la posición,  $\rho = Ar$ , donde  $A$  es una constante. Determina el campo eléctrico en puntos exteriores e interiores a dicha distribución.



$$E4\pi r^2 = \frac{A\pi R^4}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

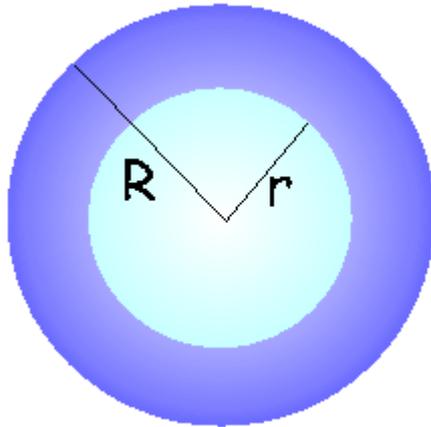
$$\Phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_s ds$$

$$\Phi = E \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\phi = E 4\pi r^2$$

$$Q_T = \int_v \rho dv = \int_v Ar (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi)$$

$$Q_T = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R Ar^3 \sin \theta dr d\theta d\phi = A\pi R^4$$

Puntos interiores



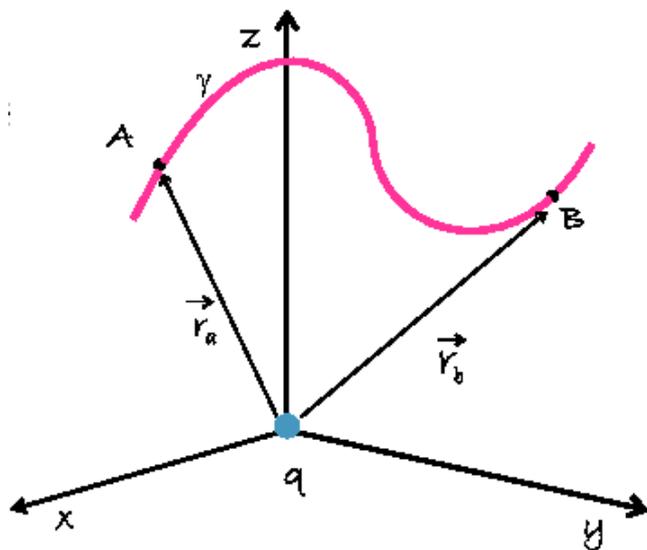
$$Q_T = \int_{v'} \rho dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r Ar r^3 \sin \theta dr d\theta d\phi = A\pi r^4$$

$$\Phi = \int_s \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = E_i S = E_i 4\pi r^2$$

$$E_i 4\pi r^2 = \frac{A\pi r^4}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_i = \frac{Ar^2}{4\epsilon_0} \hat{u}_r$$

## Carácter conservativo



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

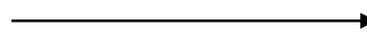
$$\int_{\gamma_a}^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

si utilizamos coordenadas esféricas, la circulación se expresará

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$\int_{\gamma_a}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

Si tomamos un camino cerrado



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

concluimos diciendo que el campo eléctrico es *conservativo*.

# Potencial eléctrico

Definimos una función

$$V(P) = - \int_{\theta}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \longrightarrow \text{Potencial eléctrico}$$

Calculamos la diferencia de potencial entre dos puntos

$$\begin{aligned} V(b) - V(a) &= - \int_{\theta}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\theta}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{\theta}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_a^{\theta} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

la forma

$$dv = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl}$$

$$V(b) - V(a) = \int_a^b \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl}$$

Por otro lado

$$V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Comparamos

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Diremos que el campo eléctrico deriva de un potencial.

La gran ventaja de esta formulación es el hecho de poder sustituir un campo vectorial, como el caso del campo eléctrico, por un campo escalar, *el potencial eléctrico*. Es por tanto posible determinar el campo eléctrico en un punto mediante la determinación del potencial eléctrico en dicho punto, para después, mediante la ecuación 1.55, determinar el valor del campo.

Supongamos una carga puntual a una distancia  $r$  de un punto  $P$ .

El campo que crea es

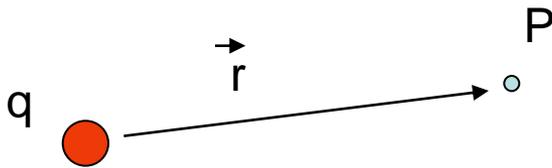
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Si nos movemos en dirección radial

$$d\vec{l} = dr \hat{r}$$

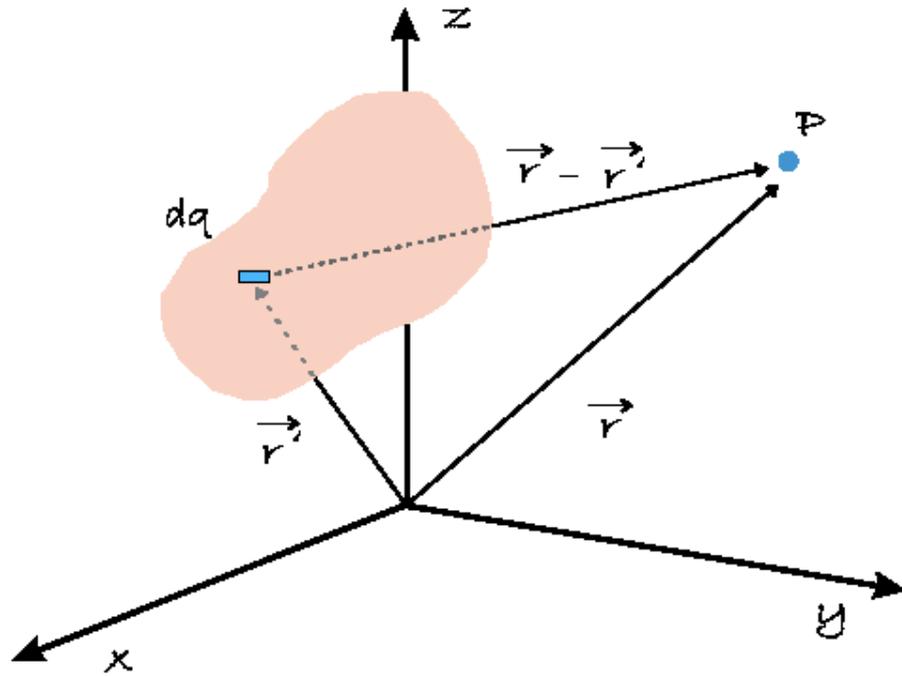
La expresión del potencial resulta

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C$$



$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

De forma general



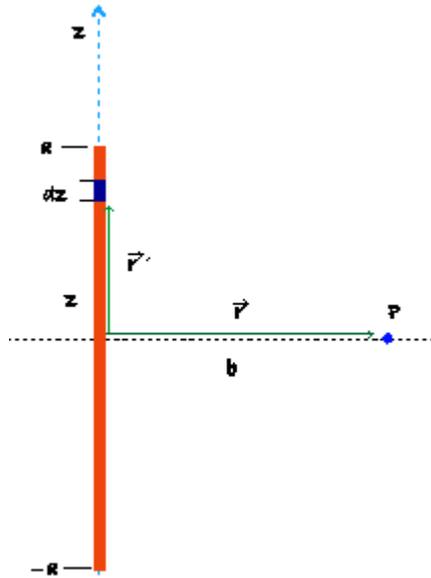
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + C$$

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Por tanto la expresión del potencial eléctrico es

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

⇨ Disponemos de una varilla de longitud  $2a$  cargada uniformemente con una densidad lineal  $\lambda$ . Determina en el punto  $P$  el potencial eléctrico.



$$\vec{r} = (b, 0, 0) \quad \vec{r}' = (0, 0, z)$$

La distancia es

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{b^2 + z^2}$$

El elemento de carga es  $dq = \lambda dz$ , y por tanto la expresión del potencial resulta

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\lambda dz}{\sqrt{b^2 + z^2}}$$

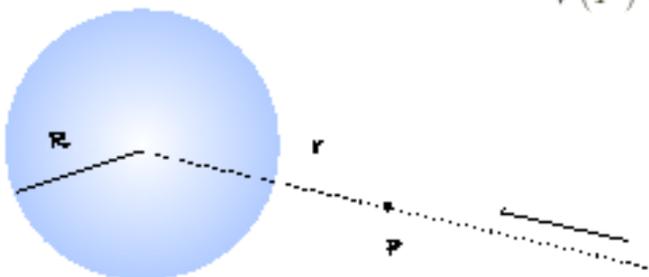
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right)$$

$$V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - a}$$

⇨ Disponemos de una esfera de radio  $R$  que presenta una distribución de carga

$$\rho = \begin{cases} A/r & 0 < r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

donde  $r$  es la distancia al centro de la distribución, y  $A$  es una constante.  
Determina el potencial eléctrico en todas las regiones.



$$V(P) = - \int_{\infty}^r \vec{E}_e \cdot d\vec{r}$$

$$Q = \int_V \rho dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \frac{A}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$Q = 2\pi \int_0^R 2Ar dr = 2\pi AR^2$$

El flujo del campo a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_e r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r} \cdot \hat{r} = E_e 4\pi r^2$$

$$\Phi = \int_S \vec{E}_e \cdot d\vec{s}$$

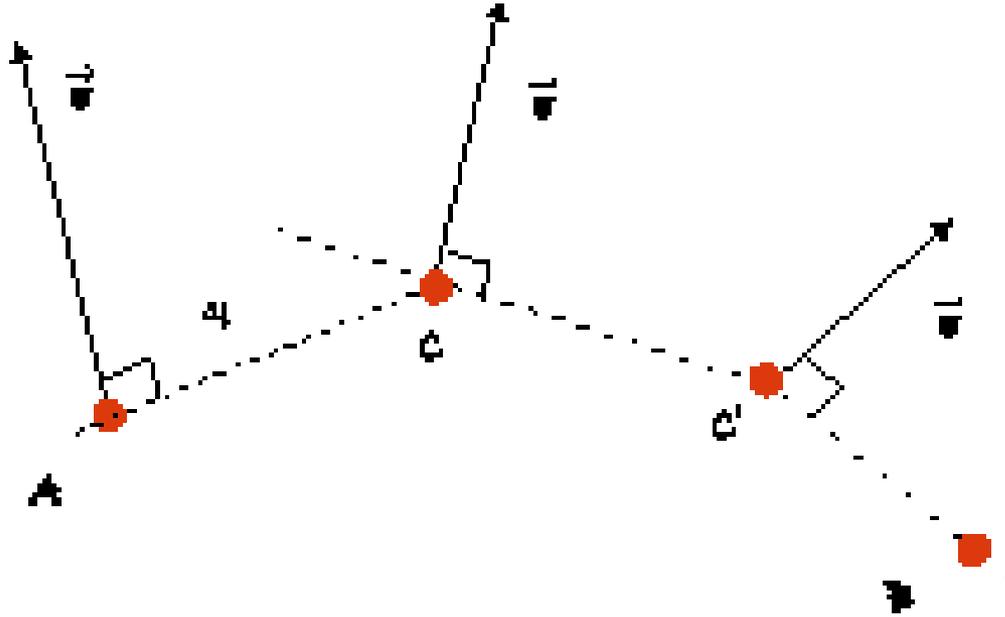
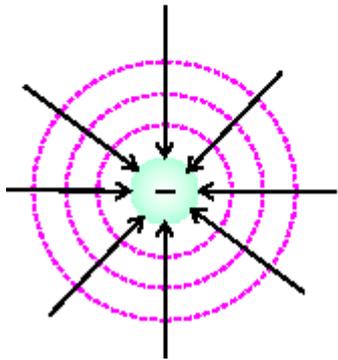
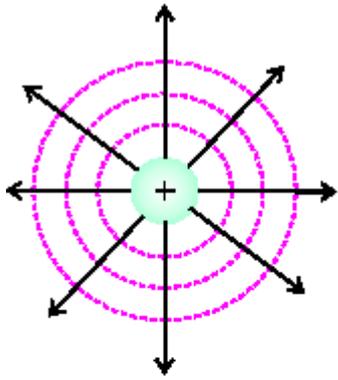
y el campo externo resulta

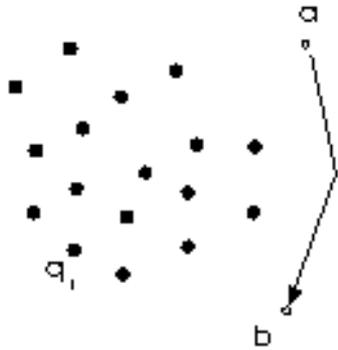
$$\vec{E}_e = \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

y el potencial en el punto  $P$ , según la expresión 1.8, es

$$V(P) = - \int_{\infty}^r \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = - \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r}$$

# Superficies equipotenciales





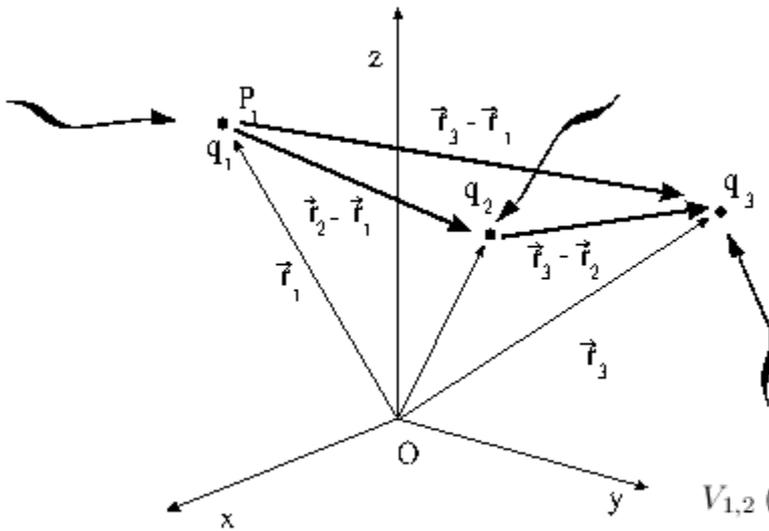
$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b -Q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$W = Q [V(b) - V(a)]$$

Desde el infinito traemos una carga a P1

→ Energía empleada nula



Traemos una carga q2

$$W_2 = q_2 V_1(P_2)$$

$$W_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Traemos una carga q3

$$W_3 = q_3 V_{1,2}(P_3)$$

$$V_{1,2}(P_3) = \frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

$$W_3 = q_3 \left[ \frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right]$$

y la energía neta para crear esta distribución de cargas será:

$$W = W_2 + W_3$$

Introduciendo sus valores

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right]$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

que puede ser escrita de la forma:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(P_i)$$