# Estructuras de Edificación: Tema 21 - El método del equilibrio en estructuras de nudos rígidos.

David Herrero Pérez

Departamento de Estructuras y Construcción
Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería de Edificación
Segundo curso
2011/2012

Universidad Politécnica de Cartagena

# Tema 21: El método del equilibrio en estructuras de nudos rígidos.

1. Introducción
2. Ecuaciones generales de la pieza recta
3. Piezas con un extremo articulado
4. El método del equilibrio en estructuras de barras de nudos rígidos

Universidad Politécnica de Cartagena

# Introducción

## Introducción

Este tema se dedica al análisis de estructuras por el método del equilibrio, para lo cual se presentará:

1. La deducción de las ecuaciones generales de una pieza recta de sección variable.
2. La formulación del método del equilibrio.
3. La formación y resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio.
4. La obtención de los diagramas de esfuerzos y reacciones de la estructura.

Universidad Politécnica de Cartagena

# Tema 21: El método del equilibrio en estructuras de nudos rígidos.

1. Introducción
2. Ecuaciones generales de la pieza recta
3. Piezas con un extremo articulado
4. El método del equilibrio en estructuras de barras de nudos rígidos

Universidad Politécnica de Cartagena

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Asunciones

- Se consideran las deformaciones producidas únicamente por momentos flectores.
- Se desprecian las deformaciones producidas por esfuerzos axiales y cortantes.
- Se consideran correctos los resultados porque asumimos que los esfuerzos despreciados (axiales y cortantes) tienen una influencia reducida en las estructuras que se van a estudiar.

## Ecuaciones generales de la pieza recta

Estas ecuaciones relacionan los *momentos en los extremos* de la pieza con:

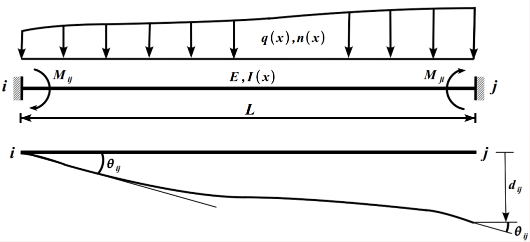
- Cargas aplicadas directamente sobre la pieza.
- Giros de la tangente a la elástica en cada extremo.
- Desplazamientos relativos (perpendicular al eje longitudinal inicial de la pieza) entre los extremos de la pieza.

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Criterio de signos

Sea el estado general de carga y deformación de la siguiente pieza. El criterio de signos que se adopta es:

- Momentos positivos $\rightarrow$ Sentido horario.
- Giros positivos $\rightarrow$ Tangente a la elástica en un extremo gira en el sentido horario respecto a su posición inicial.
- Desplazamientos relativos positivos $\rightarrow$ Giro en sentido horario de la pieza.




*Pieza recta. Estado general de cargas y deformaciones.*

Universidad Politécnica de Cartagena

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Obtención de las ecuaciones generales de la pieza recta

Para obtener las ecuaciones generales de la pieza recta se procederá de la siguiente forma:

1. Se ignora el desplazamiento relativo entre los extremos de la pieza ($d_{ij} = 0$), y se consideran por separado los efectos de:
   - La carga exterior.
   - Los giros en cada uno de los extremos.
   - El desplazamiento relativo entre ellos.
2. Se considera el desplazamiento relativo entre los extremos de la pieza.
3. Se superponen los momentos producidos por las cargas exteriores y los giros en los extremos, con los momentos producidos por los giros y desplazamientos entre los extremos de la pieza.

Universidad Politécnica de Cartagena

# Ecuaciones generales de la pieza recta

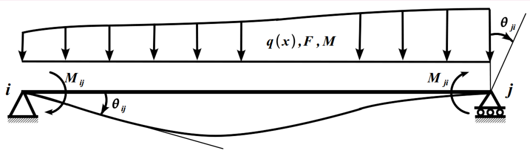
## Ecuaciones ignorando el desplazamiento relativo entre los extremos ($d_{ij} = 0$)

Se consideran por separado los siguientes efectos:

## Caso general

$q(x)$, $F$, $M$, $\theta_{ij}$, $\theta_{ji} \neq 0$

- Momento en $i$: $M_{ij} \neq 0$.
- Momento en $j$: $M_{ji} \neq 0$.




*Caso general.*

# Ecuaciones generales de la pieza recta

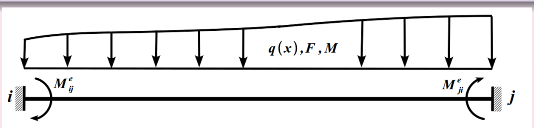
## Ecuaciones ignorando el desplazamiento relativo entre los extremos ($d_{ij} = 0$)

Se consideran por separado los siguientes efectos:

## Empotramiento perfecto

$q(x) \neq 0$, $\theta_{ij} = \theta_{ji} = 0$

- Momento en $i$: $M_{ij}^{e} \neq 0$.
- Momento en $j$: $M_{ji}^{e} \neq 0$.




*Empotramiento perfecto.*

Universidad Politécnica de Cartagena

# Ecuaciones generales de la pieza recta

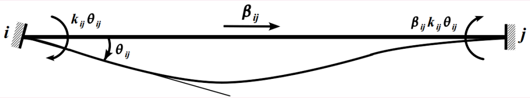
## Ecuaciones ignorando el desplazamiento relativo entre los extremos ($d_{ij} = 0$)

Se consideran por separado los siguientes efectos:

## Giro en el extremo $i$

$q(x) = 0$, $\theta_{ij} \neq 0$, $\theta_{ji} = 0$

- Momento en $i$: $k_{ij}\theta_{ij}$ debido al giro en $i$.
- Momento en $j$: $\beta_{ij}k_{ij}\theta_{ij}$ por transmisión de $i$ a $j$.




*Giro en el extremo i.*

# Ecuaciones generales de la pieza recta

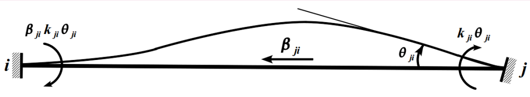
## Ecuaciones ignorando el desplazamiento relativo entre los extremos ($d_{ij} = 0$)

Se consideran por separado los siguientes efectos:

## Giro en el extremo $j$

$q(x) = 0$, $\theta_{ij} = 0$, $\theta_{ji} \neq 0$

- Momento en $i$: $\beta_{ji} k_{ji} \theta_{ji}$ por transmisión de $j$ a $i$.
- Momento en $j$: $k_{ji} \theta_{ji}$ debido al giro en $j$.




*Giro en el extremo $j$.*

# Ecuaciones generales de la pieza recta

**Ecuaciones ignorando el desplazamiento relativo entre los extremos ($d_{ij} = 0$)**

- Aplicando el principio de superposición a los tres estados anteriores, se tiene:

$$M_{ij} = M_{ij}^{e} + k_{ij}\theta_{ij} + \beta_{ji}k_{ji}\theta_{ji}$$
$$M_{ji} = M_{ji}^{e} + k_{ji}\theta_{ji} + \beta_{ij}k_{ij}\theta_{ij}$$

- Aplicando el teorema de reciprocidad de Rayleigh-Betti ($\beta_{ij}k_{ij} = \beta_{ji}k_{ji}$) se tiene:

$$M_{ij} = M_{ij}^{e} + k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji})$$
$$M_{ji} = M_{ji}^{e} + k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji})$$

Universidad Politécnica de Cartagena

# Ecuaciones generales de la pieza recta

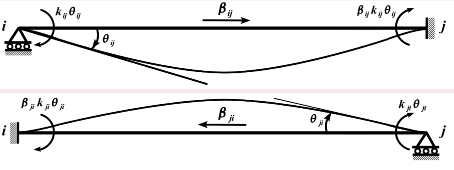
## Teorema de reciprocidad de Rayleigh-Betti

- En un cuerpo elástico lineal sometido a dos sistemas de fuerzas, el trabajo que realizará el primer sistema de fuerzas al moverse a través de los desplazamientos producidos por el segundo sistema de fuerzas, es igual al trabajo que producirá el segundo sistema de fuerzas al moverse a través de los desplazamientos producidos por el primer sistema de fuerzas.
- Para la barra de la figura, aplicando este teorema se tiene:

$$k_{ij}\theta_{ij}0 + \beta_{ij}k_{ij}\theta_{ij}\theta_{ji} = \beta_{ji}k_{ji}\theta_{ji}\theta_{ij} + k_{ji}\theta_{ji}0$$

de donde se obtiene,

$$\beta_{ij}k_{ij} = \beta_{ji}k_{ji}$$



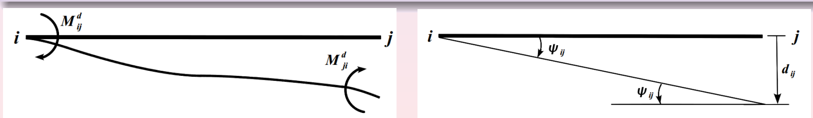

*Aplicación del Teorema de reciprocidad.*

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Ecuaciones considerando el desplazamiento relativo entre los extremos ($d_{ij} \neq 0$)

Para el caso más general, en el que sí que se producen desplazamientos relativos en los extremos de la pieza, se añaden a los momentos de la solución anterior los producidos por un desplazamiento relativo (sin giro) de los extremos de la pieza. Lo cual se realiza en dos fases:

1. Rotación de la pieza como sólido rígido (sin deformación), hasta alcanzar el desplazamiento $d_{ij}$.
2. Aplicación de los momentos necesarios para anular los giros en los extremos producidos en la fase anterior.




*Momentos de empotramiento perfecto debidos al desplazamiento relativo*

Universidad Politécnica de Cartagena

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Ecuaciones considerando el desplazamiento relativo entre los extremos ($d_{ij} \neq 0$)

- En la primera fase, los giros producidos son $\psi_{ij} = \dfrac{d_{ij}}{L_{ij}}$.
- Al aplicar los momentos necesarios para anular los giros tengo:

$$0 = M^d_{ij} + k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji}) \rightarrow M^d_{ij} = -k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji}) = -k_{ij}(1 + \beta_{ij})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

$$0 = M^d_{ji} + k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji}) \rightarrow M^d_{ji} = -k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji}) = -k_{ji}(1 + \beta_{ji})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$


*Momentos de empotramiento perfecto debidos al desplazamiento relativo*

Universidad Politécnica de Cartagena

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Ecuaciones generales de la pieza recta

- Superponiendo estos momentos a los producidos por las cargas exteriores y los giros en los extremos, las ecuaciones que relacionan los momentos con los giros y los desplazamientos en los extremos son:

$$M_{ij} = M_{ij}^{e} + k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji}) - k_{ij}(1 + \beta_{ij})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

$$M_{ji} = M_{ji}^{e} + k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji}) - k_{ji}(1 + \beta_{ji})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

- Para piezas con inercia constante se cumple $k_{ij} = k_{ji} = \dfrac{4EI_{ij}}{L_{ij}}$ y $\beta_{ij} = \beta_{ji} = \dfrac{1}{2}$:

$$M_{ij} = M_{ij}^{e} + \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}}(\theta_{ij} + \frac{\theta_{ji}}{2}) - \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2}d_{ij}$$

$$M_{ji} = M_{ji}^{e} + \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}}(\frac{\theta_{ij}}{2} + \theta_{ji}) - \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2}d_{ij}$$

sidad
Politécnica
de Cartagena

# Tema 21: El método del equilibrio en estructuras de nudos rígidos.

1. Introducción
2. Ecuaciones generales de la pieza recta
3. Piezas con un extremo articulado
4. El método del equilibrio en estructuras de barras de nudos rígidos

Universidad Politécnica de Cartagena

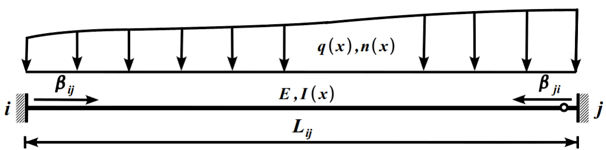
# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Pieza con un extremo articulado

- Sea la pieza de la figura, rígidamente unida a un nudo en el extremo *i* y articulada en el extremo *j*.
- Puesto que el extremo *j* esta articulado $\rightarrow M_{ji} = 0$.
- Las ecuaciones que relacionan los momentos con los giros y desplazamientos:

$$M_{ij} = M_{ij}^{e} + k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji}) - k_{ij}(1 + \beta_{ij})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

$$0 = M_{ji}^{e} + k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji}) - k_{ji}(1 + \beta_{ji})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$



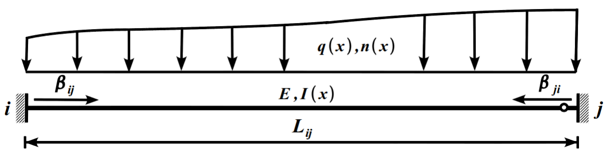

*Pieza con un extremo articulado.*

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Pieza con un extremo articulado

- Multiplicando la segunda expresión por $\beta_{ji}$, restándola a la primera y reagrupando términos utilizando el teorema de reciprocidad de Rayleigh-Betti ($\beta_{ij}k_{ij} = \beta_{ji}k_{ji}$), se tiene:

$$M_{ij} = (M^e_{ji} - \beta_{ji}M^e_{ji}) + k_{ij}(1 - \beta_{ij}\beta_{ji})\theta_{ij} - k_{ji}(1 - \beta_{ij}\beta_{ji})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$



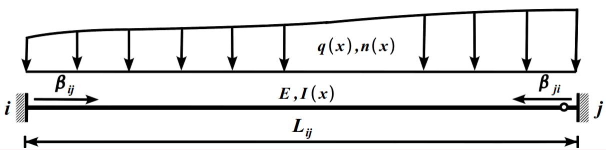

*Pieza con un extremo articulado.*

# Ecuaciones generales de la pieza recta

## Pieza con un extremo articulado

- Con lo que se pueden plantear las ecuaciones generales de comportamiento de una pieza con un extremo articulado empleando para el extremo rígido:
  - Momento de empotramiento perfecto virtual: $M_{ij}^{e\prime} = M_{ij}^{e} - \beta_{ji} M_{ji}^{e}$
  - Rigidez virtual: $k_{ij}^{\prime} = k_{ij}(1 - \beta_{ij}\beta_{ji})$
- Quedando:

$$M_{ij} = M_{ij}^{e\prime} + k_{ij}^{\prime}\theta_{ij} - k_{ij}^{\prime}\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$




*Pieza con un extremo articulado.*

# Ecuaciones generales de la pieza recta

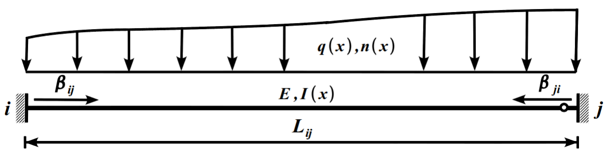
## Pieza con un extremo articulado - Inercia constante

- Para piezas con inercia constante, $k_{ij} = k_{ji} = \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}}$ y $\beta_{ij} = \beta_{ji} = \frac{1}{2}$:

$$k'_{ij} = k_{ij}(1 - \beta_{ij}\beta_{ji}) = \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}}(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}) = \frac{3EI_{ij}}{L_{ij}}$$

- Por lo que la expresión de la pieza con un extremo articulado quedaría:

$$M_{ij} = M^{e'}_{ij} + k'_{ij}\theta_{ij} - k'_{ij}\frac{d_{ij}}{L_{ij}} = M^{e'}_{ij} + \frac{3EI_{ij}}{L_{ij}}\theta_{ij} - \frac{3EI_{ij}}{L^2_{ij}}d_{ij}$$




*Pieza con un extremo articulado.*

# Tema 21: El método del equilibrio en estructuras de nudos rígidos.

1. Introducción
2. Ecuaciones generales de la pieza recta
3. Piezas con un extremo articulado
4. El método del equilibrio en estructuras de barras de nudos rígidos

Universidad Politécnica de Cartagena

# El método del equilibrio

## El método del equilibrio

Las características del método del equilibrio son:

1. Adopta como incógnitas los grados de libertad de la estructura (giros y desplazamientos no restringidos por los apoyos).
2. Emplea las relaciones fundamentales de *Teoría de Estructuras* siguiendo la secuencia:
   - Compatibilidad.
   - Ley de comportamiento.
   - Equilibrio.
3. Obtiene los esfuerzos en las barras a partir de los giros y los desplazamientos.

Universidad Politécnica de Cartagena

# El método del equilibrio - grados de libertad

## Grado de traslacionalidad

El grado de traslacionalidad de una estructura es el número de grados de libertad de desplazamientos independientes de la misma. Además, coincide con el número de grados de libertad del mecanismo completo si se cumplen las siguientes asunciones:

- No se producen deformaciones axiales en las piezas.
- Cada pieza introduce una ligadura entre los desplazamientos de los nudos a los que esta unida.

## Clasificación de estructuras según los grados de libertad

Se consideraran dos tipos de estructuras:

- Estructuras intraslacionales: Son aquellas en las que no se producen desplazamientos de los nudos, por lo que los grados de libertad corresponden a los giros en los nudos libres.
- Estructuras traslacionales: Son aquellas estructuras, en las que además de giros en los nudos, se producen desplazamientos relativos entre los extremos de algunas de las piezas.

# El método del equilibrio - grados de libertad

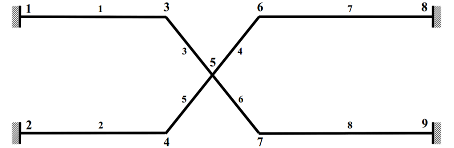
## 1 - Grados de libertad de un mecanismo

Los grados de libertad de un mecanismo vienen dados por:

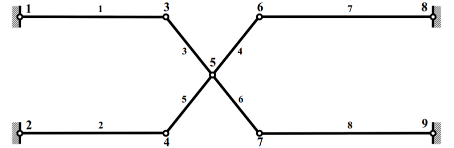
$$m = 2n - b_e - r$$

siendo:

- $n$: número de nudos.
- $b_e$: número de vínculos independientes producidos por las $b$ piezas ($b_e < b$).
- $r$: número de restricciones de desplazamientos en los apoyos.




*Estructura 1.*




*Mecanismo equivalente 1.*

## Ejemplo 1

$$m = 2n - b_e - r$$

$$m = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2$$

Grado de traslacionalidad: **2**.

# El método del equilibrio - grados de libertad

## 1 - Grados de libertad de un mecanismo

Los grados de libertad de un mecanismo vienen dados por:

$$m = 2n - b_e - r$$

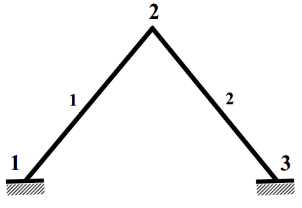
siendo:

- $n$: número de nudos.
- $b_e$: número de vínculos independientes producidos por las $b$ piezas ($b_e < b$).
- $r$: número de restricciones de desplazamientos en los apoyos.

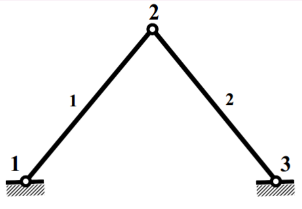
## Ejemplo 2

$$m = 2n - b_e - r$$
$$m = 2 \cdot 3 - 2 - 4 = 2$$

Grado de traslacionalidad: **0**.




*Estructura 2.*




*Mecanismo equivalente 2.*

# El método del equilibrio - grados de libertad

### 1 - Grados de libertad de un mecanismo

Los grados de libertad de un mecanismo vienen dados por:

$$m = 2n - b_e - r$$

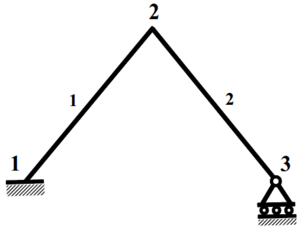
siendo:

- $n$: número de nudos.
- $b_e$: número de vínculos independientes producidos por las $b$ piezas ($b_e < b$).
- $r$: número de restricciones de desplazamientos en los apoyos.

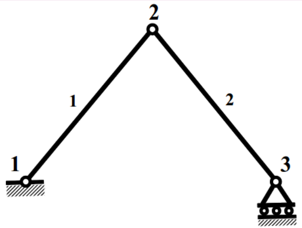
### Ejemplo 3

$$m = 2n - b_e - r$$
$$m = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$$

Grado de traslacionalidad: **1**.




*Estructura 3.*




*Mecanismo equivalente 3.*

Universidad Politécnica de Cartagena

# El método del equilibrio - grados de libertad

### 1 - Grados de libertad de un mecanismo

Los grados de libertad de un mecanismo vienen dados por:

$$m = 2n - b_e - r$$

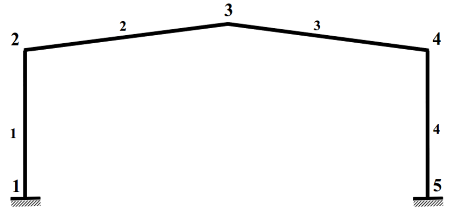
siendo:

- $n$: número de nudos.
- $b_e$: número de vínculos independientes producidos por las $b$ piezas ($b_e < b$).
- $r$: número de restricciones de desplazamientos en los apoyos.

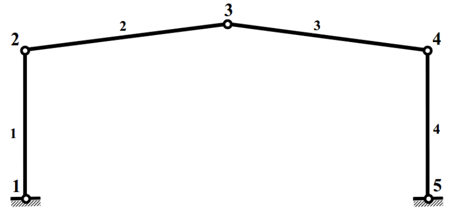
### Ejemplo 4

$$m = 2n - b_e - r$$
$$m = 2 \cdot 5 - 4 - 4 = 2$$

Grado de traslacionalidad: **2**.




*Estructura 4.*




*Mecanismo equivalente 4.*

Universidad Politécnica de Cartagena

# El método del equilibrio - compatibilidad

## 2 - Compatibilidad

- **Compatibilidad interna**: Los desplazamientos y giros en los extremos de las piezas que concurren a un nudo deben ser los mismos.
- **Compatibilidad externa**: Deben cumplirse las condiciones de giro y desplazamiento existentes en los apoyos de la estructura (condiciones de contorno geométricas o cinemáticas).

## Compatibilidad interna

Sea el nudo $i$ al que concurren las piezas $i-j$, $i-m$, $\ldots$, $i-n$, en el que para que exista compatibilidad interna se debe cumplir:

$$\begin{array}{ccccccccc} d_{ijX} & = & d_{imX} & = & \ldots & = & d_{inX} & = & D_{iX} \\ d_{ijY} & = & d_{imY} & = & \ldots & = & d_{inY} & = & D_{iY} \\ \theta_{ij} & = & \theta_{im} & = & \ldots & = & \theta_{in} & = & \theta_{i} \end{array}$$

Universidad Politécnica de Cartagena

# El método del equilibrio - compatibilidad

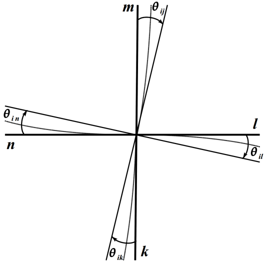
## 2 - Compatibilidad

- **Compatibilidad interna**: Los desplazamientos y giros en los extremos de las piezas que concurren a un nudo deben ser los mismos.
- **Compatibilidad externa**: Deben cumplirse las condiciones de giro y desplazamiento existentes en los apoyos de la estructura (condiciones de contorno geométricas o cinemáticas).

### Compatibilidad externa: giros

En el nudo *i* de la siguiente estructura se debe cumplir:

$$\theta_{ik} = \theta_{im} = \theta_{in} = \theta_{il} = \theta_i$$




*Compatibilidad de giros.*

# El método del equilibrio - compatibilidad

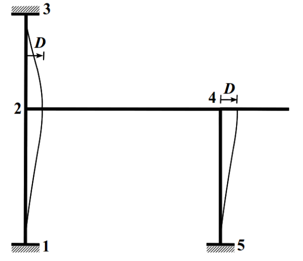
## 2 - Compatibilidad

- **Compatibilidad interna**: Los desplazamientos y giros en los extremos de las piezas que concurren a un nudo deben ser los mismos.
- **Compatibilidad externa**: Deben cumplirse las condiciones de giro y desplazamiento existentes en los apoyos de la estructura (condiciones de contorno geométricas o cinemáticas).

### Compatibilidad externa: desplazamientos

Las condiciones de compatibilidad serán las siguientes:

$$
\begin{aligned}
d_{21} &= d_{45} = D \\
d_{23} &= -D \\
d_{24} &= 0
\end{aligned}
$$




*Compatibilidad de desplazamientos.*

# El método del equilibrio - compatibilidad

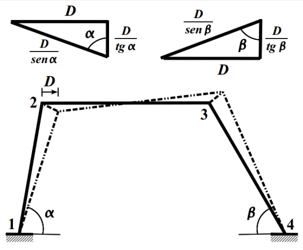
## 2 - Compatibilidad

- **Compatibilidad interna**: Los desplazamientos y giros en los extremos de las piezas que concurren a un nudo deben ser los mismos.
- **Compatibilidad externa**: Deben cumplirse las condiciones de giro y desplazamiento existentes en los apoyos de la estructura (condiciones de contorno geométricas o cinemáticas).

### Compatibilidad externa: desplazamientos

Las condiciones de compatibilidad serán las siguientes:

$$d_{12} = \frac{D}{sen\alpha}$$
$$d_{34} = \frac{D}{sen\beta}$$
$$d_{23} = -D\left(\frac{1}{tan\alpha} + \frac{1}{tan\beta}\right)$$




*Compatibilidad de desplazamientos.*

# El método del equilibrio - ley de comportamiento

## 3 - Comportamiento

- Para cada una de las barras de la estructura se tienen las dos ecuaciones que relacionan los momentos con las cargas aplicadas, los giros y los desplazamientos relativos de los extremos.
- Para una barra genérica se tiene:

$$M_{ij} = M_{ij}^e + k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji}) - k_{ij}(1 + \beta_{ij})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

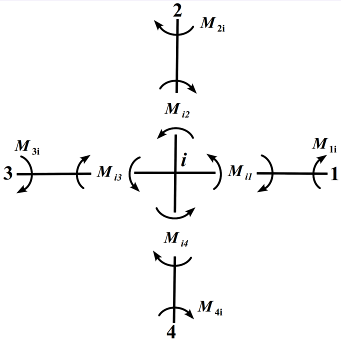
$$M_{ji} = M_{ji}^e + k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji}) - k_{ji}(1 + \beta_{ji})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

Universidad Politécnica de Cartagena

# El método del equilibrio - ley de comportamiento

## 4 - Equilibrio

- **Equilibrio de momentos:** La suma de todos los momentos que actúan sobre un nudo $i$, momentos exteriores ($M_i$) y momentos en los extremos de las piezas ($\sum_b M_{ij}$), debe ser igual a cero:
$$M_i - \sum_b M_{ij} = 0$$
- **Equilibrio de fuerzas:** Las resultantes de las fuerzas en las direcciones de dos perpendiculares arbitrarias son cero en cada nudo:
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$
Estas expresiones se pueden poner en la forma:
$$\sum F_i - \sum_b V_{ij} = 0$$
Siendo:
  - $\sum F_i$: La suma de las proyecciones de las fuerzas exteriores sobre la dirección $i$ del desplazamiento.
  - $\sum_b V_{ij}$: La suma de las proyecciones de los esfuerzos axiales y cortantes sobre las barras que se ven afectadas por el desplazamiento en la dirección $i$.




*Equilibrio de momentos en un nudo.*

Universidad Politécnica de Cartagena

# El método del equilibrio

## El método del equilibrio

1. **Selección de incógnitas**: Las incógnitas son los $n$ giros y los $m$ desplazamientos independientes que no están restringidos en los apoyos.
2. **Compatibilidad**: Los giros y los desplazamientos en los extremos de las barras se ponen en función de $m + n$ incógnitas.
3. **Ley de comportamiento**: Se plantean $2b$ ecuaciones de comportamiento, en las que se sustituyen las condiciones de compatibilidad. Se tienen $2b$ ecuaciones con $2b + m + n$ incógnitas, es decir, las incógnitas del método más los $2b$ momentos en los extremos de las barras.
4. **Equilibrio**: Introduciendo las $2b$ ecuaciones anteriores en las $n$ ecuaciones de equilibrio de momentos y $m$ ecuaciones de equilibrio de fuerzas, se llega a un sistema de $m + n$ ecuaciones de equilibrio con $m + n$ incógnitas.
5. **Obtención de giros y desplazamientos**: De las ecuaciones de equilibrio se obtienen $n$ giros y los $m$ desplazamientos relativos de la estructura.
6. **Obtención de esfuerzos**: Sustituyendo los valores de los giros y desplazamientos relativos en las $2b$ ecuaciones de comportamiento de las barras, se obtienen los momentos en los extremos de las mismas. Aplicando equilibrio se obtienen los momentos flectores y los esfuerzos cortantes en cualquier punto.
7. **Obtención de giros y desplazamientos en otros puntos**: Tenemos diferentes opciones:
   - Se añade una pieza con un extremo en el punto en el que se quieren determinar los giros y desplazamientos y el otro extremo en un punto en el que se conozca el giro y el desplazamiento. Se plantean las ecuaciones de comportamiento con las que obtener el giro y desplazamiento en dicho punto.
   - TFV, Teoremas de Mohr, segundo teorema de Castigliano, ...

# Referencias


- P. Martí Montrull.
  Análisis de Estructuras. Métodos Clásicos y Matriciales.
  Cartagena, Horacio Escarabajal, 2007.
- H.H. West.
  Análisis de Estructuras. Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos.
  México, CECSA, 1984.
- Ch. H. Norris, J.B. Wilbur, S. Utku.
  Análisis Elemental de Estructuras.
  Bogotá, McGraw-Hill, 1982.


Universidad Politécnica de Cartagena