Estructuras de Edificación: Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Cálculo de esfuerzos.

David Herrero Pérez

Departamento de Estructuras y Construcción
Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería de Edificación
Segundo curso
2011/2012

Resumen parte I

Universidad Politécnica de Cartagena

Resumen parte I

Universidad Politécnica de Cartagena

Resumen parte I

Universidad Politécnica de Cartagena

Resumen parte I

Universidad Politécnica de Cartagena

Resumen parte II

5. Estructuras compuestas
6. Estructuras complejas. Método de Henneberg.
7. Formulación matricial del método de los nudos.

Resumen parte II

Resumen parte II

Universidad Politécnica de Cartagena

Tema 17: Métodos de cálculo de estructuras simples

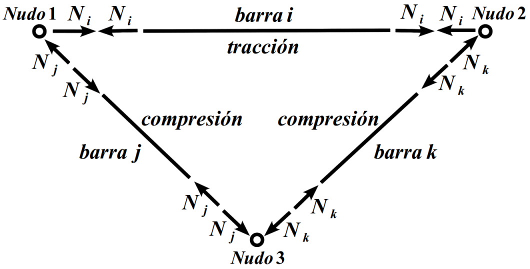
Universidad Politécnica de Cartagena

Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Esfuerzos

Generalidades, notaciones y criterio de signos.

Estructura articulada ideal

- Las cargas solamente originan esfuerzos axiales en las barras.
- Las cargas ejercen sobre los nudos extremos de las barras unas fuerzas con el mismo módulo, la dirección de la barra y sentido contrario a la fuerza sobre la barra en ese extremo.



Criterio de signos.
Se enumeran las barras y N_i corresponde al esfuerzo axial de la barra i.

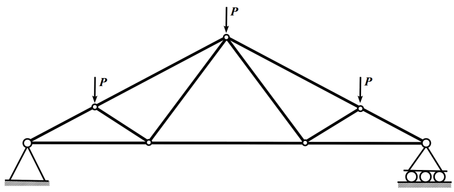
Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Esfuerzos

Cálculo de reacciones

Cálculo de reacciones en estructuras exteriormente isostáticas

Se pueden obtener las reacciones a partir de las tres ecuaciones de la estática, planteando el equilibrio de las fuerzas exteriores (fuerzas aplicadas en los nudos y reacciones). Estas condiciones pueden aplicarse:

- De forma analítica:
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$
- De forma gráfica: Imponiendo las condiciones de polígono de fuerzas cerrado y polígono funicular cerrado.



Estructura articulada isostática.

Cálculo de reacciones

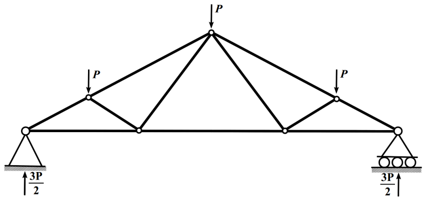
Cálculo de reacciones en estructuras exteriormente isostáticas

Se pueden obtener las reacciones a partir de las tres ecuaciones de la estática, planteando el equilibrio de las fuerzas exteriores (fuerzas aplicadas en los nudos y reacciones). Estas condiciones pueden aplicarse:

- De forma analítica:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

- De forma gráfica: Imponiendo las condiciones de polígono de fuerzas cerrado y polígono funicular cerrado.



Estructura articulada isostática - Reacciones.

Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Esfuerzos

Método de los nudos

Que es un nudo en una estructura de barras

- Un nudo aislado es un cuerpo libre sobre el que actúa un sistema de fuerzas concurrentes.
- Al actuar sobre él un sistema de fuerzas concurrentes $\rightarrow$ Su resultante no puede ser un par.
- Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente de equilibrio es que el polígono de fuerzas sea cerrado, o lo que es lo mismo, que se cumplan las condiciones analíticas de equilibrio de fuerzas sobre el nudo:
  $$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$
  Por lo que se dispone de dos ecuaciones y se pueden obtener dos incógnitas. Dichas incógnitas pueden ser dos módulos, dos direcciones, o un módulo y una dirección.

Método de los nudos

- Se basa en la formulación de las condiciones de equilibrio en cada nudo.
- Se plantea el equilibrio en un nudo en el que sólo existan dos incógnitas, y a continuación se continúan calculando los esfuerzos en todos los nudos.
- Esto **siempre es posible en estructuras isostáticas simples** una vez calculadas las reacciones.

Diagrama de Maxwell

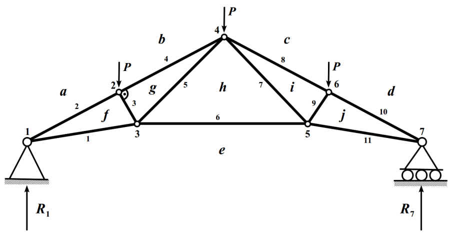
Diagrama de Maxwell

- Consiste en la superposición de todos los polígonos de fuerzas representando el equilibrio en los nudos de una estructura.
- La superposición resulta conveniente porque sistematiza el proceso de construcción del diagrama y permite representar los resultados finales de una forma más reducida.
- Para facilitar la construcción del diagrama suele utilizarse la *notación de Bow*.

Notación de Bow

1. Se nombra con letras minúsculas los espacios comprendidos entre las rectas de acción de las fuerzas → Una fuerza se identifica con las dos letras de los espacios que separan su línea de acción.
2. Se construye el polígono de fuerzas cerrado correspondiente al sistema de fuerzas exteriores en equilibrio.
3. Para cada uno de los vértices del polígono de fuerzas se trazan rectas paralelas a aquellas que limitan los espacios correspondientes en el esquema de la estructura.

Ejemplo Diagrama de Maxwell



Estructura articulada isostática.

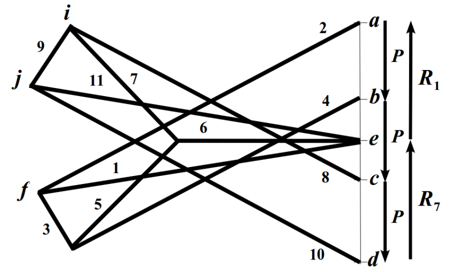


Diagrama de Maxwell.

Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Esfuerzos

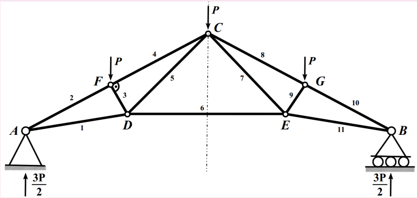
Método de las secciones

Método de las secciones

- Si se realiza un corte a una estructura de forma que en el cuerpo libre de una de las partes sólo aparezcan tres incógnitas, esas tres incógnitas se pueden calcular con las ecuaciones de equilibrio:
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$
- En algunas ocasiones, eligiendo de forma adecuada el punto respecto al que se toman momentos es posible obtener una ecuación con una sola incógnita.
- Alternativamente a las ecuaciones de equilibrio habituales, se pueden utilizar tres ecuaciones de momentos respecto tres puntos que no estén alineados.

Alternativa equilibrio 1

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum M_z = 0$$



Estructura articulada isostática.

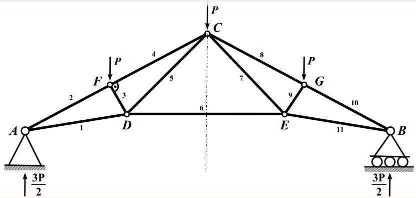
Método de las secciones

Método de las secciones

- Si se realiza un corte a una estructura de forma que en el cuerpo libre de una de las partes sólo aparezcan tres incógnitas, esas tres incógnitas se pueden calcular con las ecuaciones de equilibrio:
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$
- En algunas ocasiones, eligiendo de forma adecuada el punto respecto al que se toman momentos es posible obtener una ecuación con una sola incógnita.
- Alternativamente a las ecuaciones de equilibrio habituales, se pueden utilizar tres ecuaciones de momentos respecto tres puntos que no estén alineados.

Alternativa equilibrio 2

$$\sum M_A = 0$$
$$\sum M_B = 0$$
$$\sum M_C = 0$$



Estructura articulada isostática.

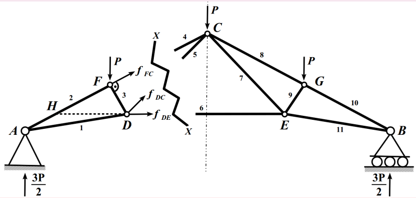
Método de las secciones

Método de las secciones

- Si se realiza un corte a una estructura de forma que en el cuerpo libre de una de las partes sólo aparezcan tres incógnitas, esas tres incógnitas se pueden calcular con las ecuaciones de equilibrio:
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$
- En algunas ocasiones, eligiendo de forma adecuada el punto respecto al que se toman momentos es posible obtener una ecuación con una sola incógnita.
- Alternativamente a las ecuaciones de equilibrio habituales, se pueden utilizar tres ecuaciones de momentos respecto tres puntos que no estén alineados.

Alternativa secciones 1

$$\sum M_D = 0$$
$$\sum M_C = 0$$
$$\sum M_A = 0$$



Sección X-X.

Método de las secciones

Método de las secciones

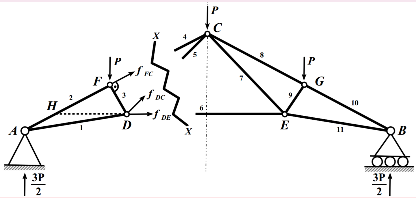
- Si se realiza un corte a una estructura de forma que en el cuerpo libre de una de las partes sólo aparezcan tres incógnitas, esas tres incógnitas se pueden calcular con las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

- En algunas ocasiones, eligiendo de forma adecuada el punto respecto al que se toman momentos es posible obtener una ecuación con una sola incógnita.
- Alternativamente a las ecuaciones de equilibrio habituales, se pueden utilizar tres ecuaciones de momentos respecto tres puntos que no estén alineados.

Alternativa secciones 2

$$\sum M_D = 0$$
$$\sum M_C = 0$$
$$\sum M_H = 0$$



Sección X-X.

Tema 17: Estructuras compuestas, complejas y cálculo matricial

Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Esfuerzos

Estructuras compuestas

Problema - Estructuras compuestas

El método de los nudos no se puede aplicar a las estructuras compuestas $\rightarrow$ Llega un momento en el que en un nudo aparecen tres incógnitas.

Planteamiento

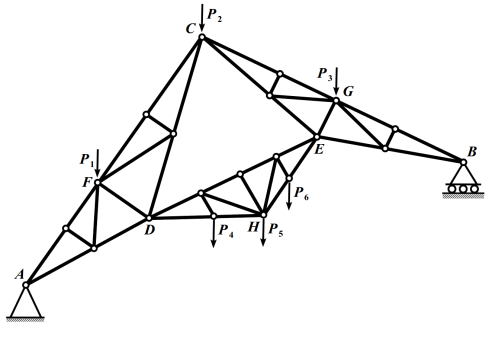
Al tratarse de una estructura isostática, es posible plantear $2n$ ecuaciones de equilibrio con las $2n$ incógnitas de reacciones y esfuerzos en las barras.
Para resolver este tipo de estructuras suelen utilizarse dos procedimientos:

1. Aplicación del método de los nudos y, al llegar a un nudo con tres incógnitas, aplicar el método de las secciones para obtener una de las tres incógnitas.
2. Aplicación del método de las estructuras secundarias.

Método de las estructuras secundarias.

Método de las estructuras secundarias

- Las estructuras compuestas se forman por estructuras simples.
- Dada la siguiente estructura:



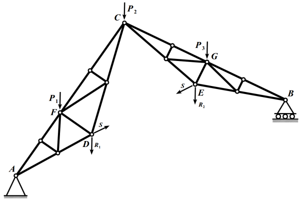
Estructura articulada compuesta.

Método de las estructuras secundarias.

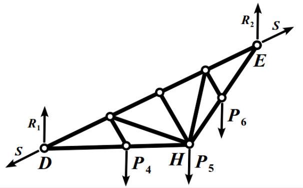
Método de las estructuras secundarias

Se puede dividir en:

- Una estructura compuesta formada por dos simples (*ADCFA* y *BGCE*) unidas por el nudo *C* y un vínculo (estructura secundaria) $\rightarrow$ La estructura secundaria se sustituye por una barra ficticia unida a los puntos *D* y *E* $\rightarrow$ Se sustituyen las acciones sobre la estructura secundaria por las acciones equivalentes sobre los nudos *D* y *E*, y, al ser la estructura isostática, a efectos de cálculos de esfuerzos en las dos estructuras simples es totalmente equivalente a la estructura *DHE*.
- Una estructura *DHE* con fuerzas aplicadas en los nudos *D* y *E* equivalentes a las fuerzas R_1 y R_2 $\rightarrow$ La estructura queda convertida en una estructura simple, con la que se pueden calcular todos los esfuerzos, incluyendo el de la barra ficticia.



Estructura simple 1.



Estructura simple 2.

Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Esfuerzos

Estructuras complejas. Método de Henneberg.

Problema - Estructuras complejas

- No pueden calcularse mediante el método de los nudos o el método de las secciones.
- En los nudos aparecen más de tres incógnitas, y no se puede realizar un corte que sólo aisle 3 incógnitas.

Método de Henneberg

Consiste en analizar una estructura simple equivalente a una compleja sustituyendo las barras que provocan la complejidad de la estructura por otras barras y cargas. El método analiza la estructura simple resultante en dos casos de carga:

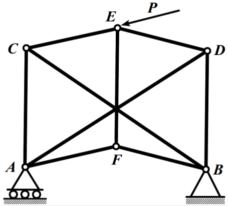
1. Con la carga que actúa sobre la estructura compleja.
2. Con las fuerzas unitarias de igual dirección y sentidos contrarios aplicadas en los nudos que sustituyen a las barras.

Método de Henneberg

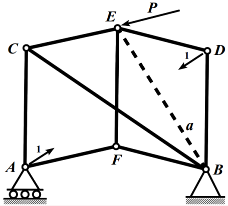
Método de Henneberg sustituyendo una barra

Partiendo de la siguiente estructura compleja, se puede obtener una simple sustituyendo la barra *AD* por la barra *a* situada entre los nudos *E* y *B*, que se puede resolver por el método de los nudos o el de las secciones. Para aplicar el Método de Henneberg analizamos la estructura simple resultante para dos estados de carga:

- Con la carga que actúa sobre la estructura compleja.
- Con dos fuerzas unitarias de igual dirección y sentidos contrarios, aplicadas en los nudos *A* y *D*.



Estructura compleja.



Estructura simple.

Método de Henneberg

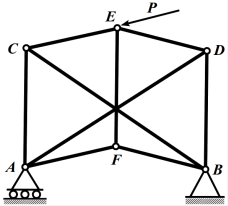
Método de Henneberg sustituyendo una barra

Siendo N_i^0 el esfuerzo en la barra i debido a las fuerzas exteriores aplicadas sobre la estructura compleja, y N_i^I el esfuerzo en la barra i debido a la carga unitaria. Si las fuerzas puntuales del segundo caso fueran de módulo X, el esfuerzo en la barra i sería $N_i^I X$. El esfuerzo en la barra i correspondiente a la superposición de ambos casos es:

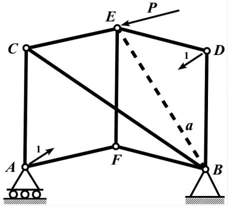
$$N_i = N_i^0 + N_i^I X \qquad (1)$$

En el caso particular de la barra sustituida a:

$$N_a = N_a^0 + N_a^I X$$



Estructura compleja.



Estructura simple.

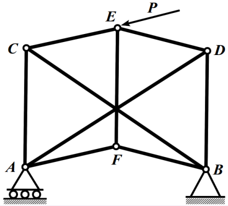
Método de Henneberg

Método de Henneberg sustituyendo una barra

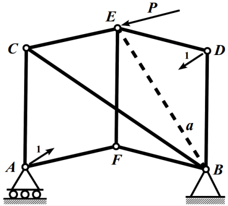
Si se hace que X sea tal que $N_a = 0$ (la barra a no trabaja) se puede eliminar dicha barra. A partir de esta condición se obtiene:

$$X = -\frac{N_a^0}{N_a^I}$$

A partir de este valor se obtienen los esfuerzos en el resto de las barras aplicando la expresión (1).
Para la barra a, si X resulta positivo, el sentido de la acción de la barra sobre el nudo es la de las fuerzas puntuales, si X resulta negativo, es el sentido contrario.



Estructura compleja.



Estructura simple.

Método de Henneberg

Método de Henneberg sustituyendo dos barras

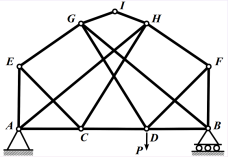
En ocasiones, para conseguir llegar a una estructura simple es necesario reemplazar más de una barra.
En estos casos hay que considerar la condición de carga inicial más otra condición por cada una de las barras sustituidas.
En el caso de dos barras, analizando los tres casos de carga se obtiene: N_i^0, N_i^I y N_i^{II}. Si se denomina X^I y X^{II} a los esfuerzos desconocidos, el esfuerzo total en una barra i es:

$$N_i = N_i^0 + N_i^I X^I + N_i^{II} X^{II}$$

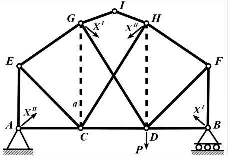
y, en particular, para las dos barras sustituidas (a y b):

$$N_a = N_a^0 + N_a^I X^I + N_a^{II} X^{II}$$
$$N_b = N_b^0 + N_b^I X^I + N_b^{II} X^{II}$$

Igualando a cero los valores de N_a y de N_b se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, a partir de las cuales se obtienen los valores de X^I y X^{II}.



Estructura compleja.



Estructura simple.

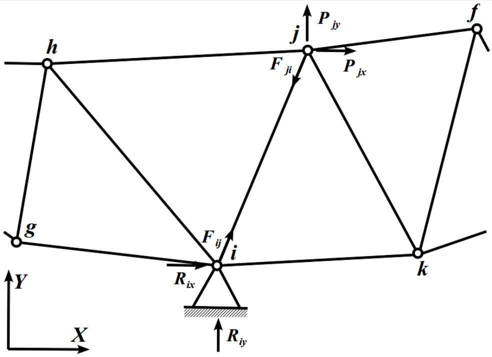
Tema 17 - Estructuras articuladas isostáticas - Esfuerzos

Formulación matricial del método de los nudos.

Condiciones

En una estructura plana, de nudos articulados, estáticamente determinada, se cumple:

1. En cada uno de los *n* nudos hay un sistema de fuerzas concurrente, para el que pueden plantearse dos ecuaciones independientes de equilibrio.
2. El número total de incógnitas (*b* esfuerzos en las barras y *r* reacciones en los apoyos) es igual al número de ecuaciones de equilibrio (2*n*).



Sistema de coordenadas, fuerzas aplicadas, reacciones y esfuerzos.

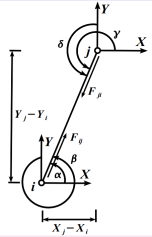
Formulación matricial del método de los nudos.

Referencias

Seguimos las siguientes referencias:

1. Las fuerzas exteriores (fuerzas aplicadas y reacciones) se suponen positivas si actúan en las direcciones positivas del sistema de ejes cartesiano X-Y.
2. Las fuerzas en las barras se toman de forma que su sentido corresponda a un esfuerzo de tracción sobre la barra.
3. En todas las expresiones de equilibrio se consideran *acciones sobre los nudos*.
4. En el extremo i de la barra ij, la fuerza F_{ij} se puede descomponer en sus componentes F_{ijx} y F_{ijy} dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} F_{ijx} = F_{ij}\cos\alpha = F_{ij}\dfrac{X_j - X_i}{L_{ij}} = F_{ij} l_{ij} \\ F_{ijy} = F_{ij}\cos\beta = F_{ij}\dfrac{Y_j - Y_i}{L_{ij}} = F_{ij} m_{ij} = F_{ij}\sin\alpha \end{cases}$$



Sistema de coordenadas, fuerzas aplicadas, reacciones y esfuerzos.

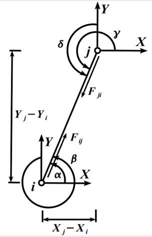
Formulación matricial del método de los nudos.

Referencias

Seguimos las siguientes referencias:

1. Las fuerzas exteriores (fuerzas aplicadas y reacciones) se suponen positivas si actúan en las direcciones positivas del sistema de ejes cartesiano X-Y.
2. Las fuerzas en las barras se toman de forma que su sentido corresponda a un esfuerzo de tracción sobre la barra.
3. En todas las expresiones de equilibrio se consideran *acciones sobre los nudos.*
4. En el extremo i de la barra ij, la fuerza F_{ij} se puede descomponer en sus componentes F_{ijx} y F_{ijy} dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} F_{ijx} = F_{ij}\cos\alpha = F_{ij}\dfrac{X_j - X_i}{L_{ij}} = F_{ij} l_{ij} \\ F_{ijy} = F_{ij}\cos\beta = F_{ij}\dfrac{Y_j - Y_i}{L_{ij}} = F_{ij} m_{ij} = F_{ij}\sin\alpha \end{cases}$$



Sistema de coordenadas, fuerzas aplicadas, reacciones y esfuerzos.

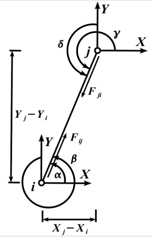
Formulación matricial del método de los nudos.

Referencias

Seguimos las siguientes referencias:

1. Las fuerzas exteriores (fuerzas aplicadas y reacciones) se suponen positivas si actúan en las direcciones positivas del sistema de ejes cartesiano X-Y.
2. Las fuerzas en las barras se toman de forma que su sentido corresponda a un esfuerzo de tracción sobre la barra.
3. En todas las expresiones de equilibrio se consideran *acciones sobre los nudos*.
4. En el extremo i de la barra ij, la fuerza F_{ij} se puede descomponer en sus componentes F_{ijx} y F_{ijy} dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} F_{ijx} = F_{ij}\cos\alpha = F_{ij}\dfrac{X_j - X_i}{L_{ij}} = F_{ij} l_{ij} \\ F_{ijy} = F_{ij}\cos\beta = F_{ij}\dfrac{Y_j - Y_i}{L_{ij}} = F_{ij} m_{ij} = F_{ij}\sin\alpha \end{cases}$$



Sistema de coordenadas, fuerzas aplicadas, reacciones y esfuerzos.

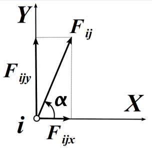
Formulación matricial del método de los nudos.

Referencias

Seguimos las siguientes referencias:

1. Las fuerzas exteriores (fuerzas aplicadas y reacciones) se suponen positivas si actúan en las direcciones positivas del sistema de ejes cartesiano X-Y.
2. Las fuerzas en las barras se toman de forma que su sentido corresponda a un esfuerzo de tracción sobre la barra.
3. En todas las expresiones de equilibrio se consideran *acciones sobre los nudos*.
4. En el extremo i de la barra ij, la fuerza F_{ij} se puede descomponer en sus componentes F_{ijx} y F_{ijy} dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} F_{ijx} = F_{ij}\cos\alpha = F_{ij}\dfrac{X_j - X_i}{L_{ij}} = F_{ij}l_{ij} \\ F_{ijy} = F_{ij}\cos\beta = F_{ij}\dfrac{Y_j - Y_i}{L_{ij}} = F_{ij}m_{ij} = F_{ij}\sin\alpha \end{cases}$$



Descomposición de fuerzas.

Formulación matricial del método de los nudos.

Cosenos directores

Los *cosenos directores* (l_{ij} y m_{ij}) de la barra ij proporcionan los cosenos de los ángulos (medidos en el sentido contrario a las agujas del reloj) entre los ejes X e Y y la barra. Para el extremo i tenemos:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} F_{ijx} & = & F_{ij}\cos\alpha & = & F_{ij}\dfrac{X_j - X_i}{L_{ij}} & = & F_{ij}l_{ij} \\ F_{ijy} & = & F_{ij}\cos\beta & = & F_{ij}\dfrac{Y_j - Y_i}{L_{ij}} & = & F_{ij}m_{ij} \end{array}\right.$$

Mientras que para el extremo j:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} F_{jix} & = & F_{ji}\cos\gamma & = & F_{ji}\dfrac{X_i - X_j}{L_{ij}} & = & F_{ji}l_{ji} \\ F_{jiy} & = & F_{ji}\cos\delta & = & F_{ji}\dfrac{Y_i - Y_j}{L_{ij}} & = & F_{ji}m_{ji} \end{array}\right.$$

siendo l_{ji} y m_{ji} los cosenos directores de la barra ji.

Formulación matricial del método de los nudos.

Condiciones de equilibrio I

- Debido al equilibrio interno en la barra se tiene: $F_{ij} = F_{ji}$
- Los cosenos directores deben cumplir:
  - $l_{ij} = -l_{ji}$.
  - $m_{ij} = -m_{ji}$.

Por lo que se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} F_{ijx} & = & F_{ij} l_{ij} & & & & \\ F_{ijy} & = & F_{ij} m_{ij} & & & & \\ F_{jix} & = & F_{ji} l_{ji} & = & F_{ij}(-l_{ij}) & = & -F_{ijx} \\ F_{jiy} & = & F_{ji} m_{ji} & = & F_{ij}(-m_{ij}) & = & -F_{ijy} \end{array} \right.$$

Aplicando equilibrio en los nudos i y j se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \sum F_{ix} & = & F_{igx} + F_{ihx} + F_{ijx} + F_{ikx} + R_{ix} & = & 0 \\ \sum F_{iy} & = & F_{igy} + F_{ihy} + F_{ijy} + F_{iky} + R_{iy} & = & 0 \\ \sum F_{jx} & = & F_{jhx} + F_{jix} + F_{jkx} + F_{jfx} + P_{jx} & = & 0 \\ \sum F_{jy} & = & F_{jhy} + F_{jiy} + F_{jky} + F_{jfy} + P_{jy} & = & 0 \end{array} \right.$$

Formulación matricial del método de los nudos.

Condiciones de equilibrio II

Simplificando se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} \sum F_{ix} & = & F_{ig} l_{ig} & + & F_{ih} l_{ih} & + & F_{ij} l_{ij} & + & F_{ik} l_{ik} & + & R_{ix} & = & 0 \\ \sum F_{iy} & = & F_{ig} m_{ig} & + & F_{ih} m_{ih} & + & F_{ij} m_{ij} & + & F_{ik} m_{ik} & + & R_{iy} & = & 0 \\ \sum F_{jx} & = & F_{jh} l_{jh} & + & F_{ji} l_{ji} & + & F_{jk} l_{jk} & + & F_{jf} l_{jf} & + & P_{jx} & = & 0 \\ \sum F_{jy} & = & F_{jh} m_{jh} & + & F_{ji} m_{ji} & + & F_{jk} m_{jk} & + & F_{jf} m_{jf} & + & P_{jy} & = & 0 \end{array}\right.$$

Si la estructura tiene un total de n nudos, se pueden escribir $2n$ ecuaciones similares a estas.

Formulación matricial del método de los nudos.

Formulación matricial

Se puede expresar el sistema de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas con la siguiente notación matricial: $CF = -P$.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
 & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\cdots & l_{ig} & l_{ih} & l_{ik} & l_{ij} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\
\cdots & m_{ig} & m_{ih} & m_{ik} & m_{ij} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & -l_{ij} & l_{jh} & l_{jk} & l_{jf} & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & -m_{ij} & m_{jh} & m_{jk} & m_{jf} & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
 & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & &
\end{bmatrix}}_{2n \times 2n}
\underbrace{\begin{bmatrix}
\vdots \\ F_{ig} \\ F_{ih} \\ F_{ik} \\ F_{ij} \\ F_{jh} \\ F_{jk} \\ F_{jf} \\ \vdots \\ R_{ix} \\ R_{iy} \\ \vdots
\end{bmatrix}}_{2n \times 1}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_{jx} \\ -P_{jy} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots
\end{bmatrix}}_{2n \times 1}
$$

Formulación matricial para sistemas determinados

Si hubiese más de $2n$ incógnitas $\rightarrow$ Sistema indeterminado.
Si hubiese menos de $2n$ incógnitas $\rightarrow$ Múltiples soluciones $\rightarrow$ Estructura inestable.

Formulación matricial del método de los nudos.

Formulación matricial

La formulación matricial utilizada:

$$CF = -P$$

consta de:

- **C**: Matriz de cosenos directores.
- **F**: Vector de fuerzas en las barras y reacciones desconocidas.
- **P**: Vector de fuerzas exteriores.

La solución a este sistema de ecuaciones de equilibrio se puede poner en la forma:

$$F = -C^{-1}P$$

siendo C^{-1} la inversa de la matriz C.

Condición de inestabilidad

Cuando no exista la inversa de la matriz C, es decir, cuando $|C| = 0$.

Referencias

- P. Martí Montrull.
  Análisis de Estructuras. Métodos Clásicos y Matriciales.
  Cartagena, Horacio Escarabajal, 2007.
- H.H. West.
  Análisis de Estructuras. Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos.
  México, CECSA, 1984.
- Ch. H. Norris, J.B. Wilbur, S. Utku.
  Análisis Elemental de Estructuras.
  Bogotá, McGraw-Hill, 1982.