Ondas Electromagnéticas

Revisión de Electroestática y Magnetoestática

Fernando D. Quesada Pereira[1]

[1]Grados de Ingeniería Telemática y de Sistemas de Telecomunicación
Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Universidad Politécnica de Cartagena

12 de octubre de 2011

Índice de Contenidos

Ecuaciones de Maxwell en electroestática

Ecuaciones de Maxwell para electroestática

- Se tiene que $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \vec{J} = 0$ (no hay corriente).
- No existe variación temporal de los campos.

Las ecuaciones de Maxwell quedan como:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Potencial escalar eléctrico

Como no hay fuentes ni rotacionales ni divergentes para el campo magnético, sólo existira campo eléctrico:

$\nabla\phi \rightarrow$ Gradiente de una función escalar

$\nabla \times \nabla\phi = 0$

El rotacional del gradiente es siempre cero sea cuál sea la función. Luego, siempre podremos calcular $\vec{E}$ a partir del gradiente de una función escalar:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$
$$\epsilon\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$
$$-\epsilon\nabla^2\phi = \rho$$
$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Ecuaciones de Maxwell para electroestática

El término ϕ es el llamado potencial escalar eléctrico y cumple la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \text{Ecuación de Poisson}$$

En una región donde no existen cargas (las fuentes estarán fuera de la región), entonces

$$\nabla^2\phi = 0 \rightarrow \text{Ecuación de Laplace}$$

Este tipo de ecuaciones en derivadas parciales se encuentran sujetas a las condiciones de contorno del potencial y se resuelven mediante métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.

Índice de Contenidos

Ejemplo de aplicación del teorema de Gauss

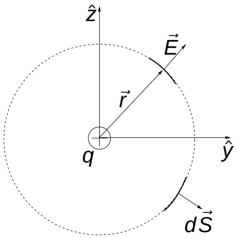

Figura: Campo eléctrico producido por una carga puntual

Caso formado por una carga puntual. Por simetría,

$$\vec{E} = E_0(\vec{r})\hat{e}_r$$
$$d\vec{S} = dS\,\hat{e}_r$$

Campo Eléctrico por Gauss

Trabajamos en coordenadas esféricas para resolver las integrales.

$$\epsilon \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon E_0(\vec{r}) \int_S \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \, dS$$
$$= \epsilon E_0(\vec{r})\, 4\pi r^2 = q$$

Despejando resulta que $E_0(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$, por lo que finalmente se tiene que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{e}_r \rightarrow \text{Igual a la ley de Coulomb}$$

Cálculo del potencial electroestático

Diferencia de Potencial

La tensión (V) es la energía que hay que aplicar para mover cargas: $v(t) = \frac{dW}{dq}$.

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi\cdot d\vec{l} = -\int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi\cdot \hat{e}_l\, dl$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \frac{d\phi}{dl}\, dl = -\left[\phi(P_2) - \phi(P_1)\right]$$

Asimismo, la energía puede verse como fuerza por desplazamiento, luego:

$$V = \frac{W}{q} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{l}}{q} = \frac{(\vec{E}\,q)\cdot\vec{l}}{q} = \vec{E}\cdot\vec{l}$$

Diferencia de Potencial

La diferencia de potencial entre 2 puntos, por tanto, es:

$$\phi(P_2) - \phi(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Trabajo realizado para mover la unidad de carga entre los puntos P_1 y P_2.

$$d\vec{l} = dr\,\hat{e}_r$$

Diferencia de Potencial

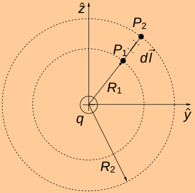

Figura: Diferencia de potencial entre dos puntos

$$\phi(P_2) - \phi(P_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \, dr$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon}\int_{R_1}^{R_2} r^{-2}\, dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon}(-1) * r^{-1}\Big|_{r=R_1}^{r=R_2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Diferencia de Potencial

Si un punto lo tomamos en el infinito $R_1 \to \infty$, entonces $\phi(R_1 \to \infty) = 0$ quedando el potencial en el otro punto como:

$$\phi_{P_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{R_2}$$

En general el potencial en un punto a una distancia, tomando como referencia el infinito, será:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

Potencial y campo de una distribución de carga

Distribución de carga

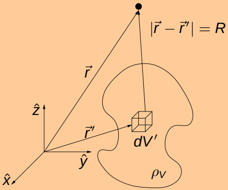

Figura: Diferencia de potencial

Si tenemos una distribución de carga podemos aplicar superposición:

$$d\phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\rho_V\, dV'}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\phi = \int_{V'} \frac{\rho_V\, dV'}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Campo eléctrico

De la misma manera el campo eléctrico queda:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\hat{e}_R \quad \text{Métodos Integrales}$$

$$\vec{E} = \int_{V'} \frac{\rho_V\, dV'}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\hat{e}_R$$

Es el **método de la función de Green** para el cálculo del campo potencial producido por una distribución de carga conocida. Por otra parte, los métodos diferenciales se basan en resolver la ecuación $\nabla^2\phi = 0$, $\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon}$

Índice de Contenidos

Frontera entre dos medios materiales

Cambio entre medios

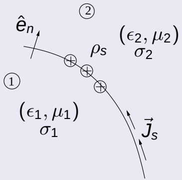

Figura: Cambio de medio

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{e}_n = 0$$

Los componentes normales de la densidad de flujo magnético son continuas.

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{e}_n = \rho_s$$

Condición de contorno

Si en la superficie de separación no hay cargas superficiales, entonces las componentes normales de la densidad de flujo eléctrico también son continuas.

$$\hat{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

La operación $\hat{e}_n \times \vec{A}$ elimina la componente normal y se queda con las tangenciales. Las componentes tangenciales de la intensidad de campo eléctrico son continúas en la superficie de separación entre dos medios.

$$\hat{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

El potencial escalar eléctrico es continuo $\Phi_1 = \Phi_2$. Las camponentes tangenciales de la intensidad de campo magnético son continuas cuando no existan corrientes en la superficie de separación entre medios.

El potencial en el interior de un conductor perfecto es constante ($\sigma \to$ conductividad del conductor).

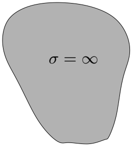

Figura: Conductor perfecto

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = 0$$

El campo eléctrico en el interior de un conductor es cero.

Superficie conductor

Veamos que sucede en la superficie.

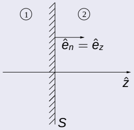

Figura: Superficie Conductor perfecto

Por una condición de contorno sabemos:

$$\hat{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_S = 0$$

$$\hat{e}_z \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_S = 0$$

Pero $\vec{E}_1 = 0$ por estar 1 dentro del conductor, luego:

$$\hat{e}_z \times \vec{E}_2\Big|_S = 0$$

Condiciones de contorno en un conductor perfecto

Las componentes del campo eléctrico tangenciales a un conductor perfecto son cero. Veamos que sucede con las componentes normales:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{e}_n = \rho_s$$

pero como $\vec{E}_1 = 0$, entonces queda,

$$\epsilon \vec{E}_2 \cdot \hat{e}_n = \rho_s$$

Se ha observado que $\hat{e}_n \cdot \vec{E}_2 \neq 0$, luego debe existir ρ_s en la superficie de un conductor. Luego en la superficie del conductor existe una densidad de carga superficial inducida por las componentes normales de los campos.

Definición de capacidad

Capacidad eléctrica

En conductores se define la capacidad como la cantidad de carga inducida en respecto de la diferencia de potencial que hemos aplicado. Para el caso de un condensador de placas paralelas:

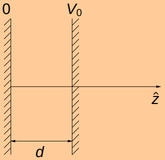

Figura: Condensador de placas paralelas

$$\nabla^2\Phi = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Capacidad placas paralelas

Como todo es infinito en (x, y) sólo existen variaciones espaciales con z, luego:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d\Phi}{dz} = A \quad ; \quad \Phi = Az + B$$

Las constantes son las típicas de toda ecuación diferencial. Se calculan imponiendo las condiciones de contorno para el potencial.

$$z = 0 \quad ; \quad \Phi(z = 0) = 0 \quad ; \quad B = 0$$

$$z = d \quad ; \quad \Phi(z = d) = V_0 \quad ; \quad Ad = V_0 \quad ;$$

Se puede escribir finalmente el potencial como:

$$\Phi = \frac{V_0}{d} z$$

Definición de capacidad

Condensador de placas paralelas

Campo eléctrico como:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z\right)$$
$$= -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z = -\frac{V_0}{d}\hat{e}_z$$

Densidad de carga inducida en las placas del condensador.

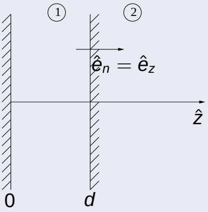

Figura: Densidad de carga inducida

Codensador de placas paralelas

$$\hat{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{z=d} = \rho_s$$

Se tiene que $\vec{D}_2 = 0$ en el interior de un conductor, de modo que,

$$-\hat{e}_z \epsilon \vec{E}\Big|_{z=d} = \rho_s$$

$$\rho_s = -\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \epsilon \frac{-V_0}{d} = \epsilon\frac{V_0}{d}$$

Calcularemos la capacidad por unidad de superficie. La carga total encerrada en una superficie S de las placas:

$$Q = \int_S \rho_s \, dS = S\rho_s = S\epsilon\frac{V_0}{d} \quad \text{(placas finitas)}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{S\epsilon\frac{V_0}{d}}{V_0} = \epsilon\frac{S}{d} \qquad \text{Faradios}$$

Índice de Contenidos

Energía en electroestática

Energía

Por definición, la energía almacenada por un sistema electrostático es:

$$W_{de} = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV \;(V, \text{vol. campo eléctrico})$$

Vamos a calcular,

$$\nabla\cdot(\Phi\vec{D}) = \vec{D}\cdot\nabla\Phi + \Phi\nabla\cdot\vec{D}$$

pero $\vec{E} = -\nabla\Phi$ y $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$, luego

$$\nabla(\Phi\vec{D}) = \vec{D}\cdot(-\vec{E}) + \Phi\rho$$

$$\vec{E}\cdot\vec{D} = \Phi\rho - \nabla(\Phi\vec{D})$$

Introduciendo la última expresión en la de la energía, resulta:

$$W_{de} = \frac{1}{2}\int_V \Phi\rho\,dV - \frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\Phi\vec{D})\,dV$$

Cálculo Energía Electroestática

Aplicando el teorema integral de Gauss se tiene:

$$W_{de} = \frac{1}{2}\int_V \Phi\rho\,dV - \frac{1}{2}\int_S \Phi\,\vec{D}\cdot d\vec{S}$$

El término $\vec{D}\cdot d\vec{S}$ selecciona la componente normal de $\vec{D}$ en la superficie y la componente normal de $\vec{D}$ en una superficie es discontinua e igual a la carga superficial ρ_s.

$$\begin{aligned} W_{de} &= \frac{1}{2}\int_V \Phi\rho\,dV - \frac{1}{2}\int_S \Phi\vec{D}\cdot\hat{e}_n\,dS \\ &= \frac{1}{2}\int_V \Phi\rho\,dV + \frac{1}{2}\int_S \Phi\rho_s\,dS \end{aligned}$$

Energía electrostática en una esfera con densidad de carga constante

Esfera con carga constante

Como no hay cargas superficiales,

$$W = \frac{1}{2}\int_V \Phi\rho\, dV$$

Como $\rho = 0$ fuera de V_0, entonces,

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_0} \Phi\rho\, dV$$

Tenemos que hallar el potencial Φ dentro de la esfera (integral extendida a todo el volumen).

$$-\frac{1}{2}\int_V \nabla(\Phi\vec{D})\, dV = -\frac{1}{2}\int_{V_1} \nabla(\Phi\vec{D})\, dV - \frac{1}{2}\int_{V_2} \nabla(\Phi\vec{D})\, dV =$$

$$-\frac{1}{2}\int_S \Phi\, \vec{D}_1 \cdot \hat{e}_n\, dS - \frac{1}{2}\int_S \Phi\vec{D}_2 \cdot (-\hat{e}_n)\, dS - \frac{1}{2}\int_{S_\infty} \Phi\vec{D}_2\hat{e}_n\, dS =$$

$$\frac{1}{2}\int_S \Phi(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{e}_n\, dS = \frac{1}{2}\int \Phi\ \rho_s\, dS$$

Energía electrostática en una esfera con densidad de carga constante

Figura: Densidad volumétrica de carga en una esféra

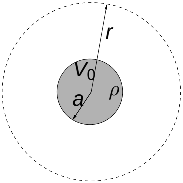

Figura: Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico fuera de la esfera

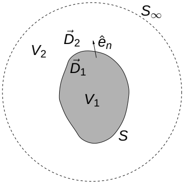

Figura: Cálculo del potencial dentro de la esfera

Podemos usar la ley de Gauss, para $r > a$ se tiene,

$$Q_{enc} = \int_{V_0} \rho \, dV = \rho \int_{V_0} dV = \rho \frac{4}{3} \pi a^3$$

El campo eléctrico, por simetría, es de la forma,

$$\vec{E} = E_0(r) \hat{e}_r$$

Energía electrostática en una esfera con densidad de carga constante

Campo Eléctrico

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \epsilon \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$\epsilon E_0(r)\int_S \hat{e}_e \cdot \hat{e}_r\, dS = \epsilon E_0(r)\, 4\pi\, r^2$$

Igualando términos,

$$\rho \frac{4}{3}\pi a^3 = \epsilon E_0(r) 4\pi r^2$$

$$E_0(r) = \frac{\rho\, a^3}{3\epsilon r^2}\, ; \vec{E}(r) = \frac{\rho\, a^3}{3\epsilon r^2}\hat{e}_r$$

Potencial

Calculo el potencial en $r = a$ tomando el origen de potenciales en el infinito.

$$\Phi(\infty) - \Phi(r=a) = -\int_{r=a}^{r=\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} =$$

$$-\int_{r=a}^{r=\infty} \frac{\rho\, a^3}{3\epsilon r^2}\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r\, dr = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon}(-r^{-1})\Big|_{r=a}^{r=\infty} = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon}\frac{1}{a}$$

$$\Phi(r=a) = \frac{\rho a^2}{3\epsilon}$$

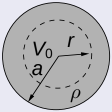

Figura: Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico dentro de la esfera

Energía electrostática en una esfera con densidad de carga constante

Campo dentro de la esfera

$$Q_{enc} = \int_V \rho \, dV = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} =$$

$$\epsilon E_0(r) \int_S \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \, dS = \epsilon E_0(r) \, 4\pi r^2$$

Igualando términos:

$$\rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \epsilon E_0(r) 4\pi r^2$$

$$E_0(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon} \, ; \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon} \hat{e}_r$$

Potencial dentro de la esfera

La componente normal de $\vec{D}$ es continua, puesto que no existe densidad superficial de carga. El potencial en un punto dentro de la esfera $r = r'$ valdrá:

$$\Phi(r = a) - \Phi(r = r') = - \int_{r=r'}^{r=a} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \frac{\rho}{3\epsilon} \int_{r=r'}^{r=a} r \, dr = \frac{-\rho}{3\epsilon} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=r'}^{r=a}$$

$$= - \frac{-\rho}{6\epsilon} (a^2 - r'^2)$$

Energía electrostática en una esfera con densidad de carga constante

Potencial dentro de una esfera

$$\Phi(r = r') = \Phi(r = a) + \frac{\rho}{6\epsilon}(a^2 - r'^2)$$

pero $\Phi(r = a) = \frac{\rho a^2}{3\epsilon}$, luego

$$\Phi(r = r') = \frac{\rho a^2}{3\epsilon} + \frac{\rho a^2}{6\epsilon} - \frac{\rho r'^2}{6\epsilon} =$$

$$\frac{\rho a^2}{2\epsilon} - \frac{\rho r'^2}{6\epsilon} = \frac{\rho}{2\epsilon}\left(a^2 - \frac{r'^2}{3}\right)$$

Energía electroestática

$$W_{de} = \frac{1}{2}\int_{V_0}\left(\frac{\rho a^2}{2\epsilon} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon}\right)\rho\, dV$$

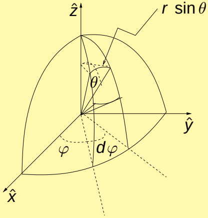

Figura: Obtención del diferencial de volumen en una esfera

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

Energía electrostática en una esfera con densidad de carga constante

Energía electroestática total

$$
\begin{aligned}
W_{de} &= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\epsilon}\int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \left(\frac{a^2}{2}-\frac{r^2}{6}\right) r^2 \sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{4} 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^a dr \left(\frac{a^2 r^2}{2}-\frac{r^4}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\epsilon} 2\pi \left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\left(\frac{a^2}{2}\frac{r^3}{3}\Big|_0^a - \frac{1}{6}\frac{r^5}{5}\Big|_0^a\right) = \frac{\rho^2\pi}{\epsilon}(1+1)\left(\frac{a^5}{6}-\frac{1}{6}\frac{a^5}{5}\right) \\
&= \frac{2\rho^2\pi}{\epsilon}\frac{a^5}{6}\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\rho^2\pi}{\epsilon}\frac{a^5}{6}\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Finalmente, la energía es:

$$
W_{de} = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon} \qquad \text{Julios}
$$

Introducción a la magnetoestática

Características

- Sí se permite el movimiento de cargas en el espacio y por tanto se producen corrientes.
- Las corrientes se suponen estacionarias en el tiempo ($I(t) = cte$,$\vec{J}(t) = cte$).
- Sigue sin existir una variación con el tiempo de las cantidades eléctricas (salvo la carga) ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$, aunque ahora $\vec{J} \neq 0$).

Ecuaciones de Maxwell en Magnetoestática

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Vemos que ahora existen tanto el campo eléctrico como el magnético, pero están desacoplados.

Ley de Ohm

Existe otra ley fundamental que es la ley de Ohm ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$). Esta ley hay que aplicarla en cualquier medio resistivo en el que existan corrientes de conducción. Si consigo calcular el campo eléctrico en una estructura podré calcular $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, y una vez conozca $\vec{J}$ podré resolver las ecuaciones para el campo magnético.

Índice de Contenidos

Potencial vector magnético

Definición potencial vector $\vec{A}$

La divergencia del rotacional de una función vectorial es cero:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Identificando con $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ podemos hacer:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ es el potencial vector magnético auxiliar. Ahora tenemos:

$$\nabla \times (\mu \vec{H}) = \mu \vec{J}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

Tomando el rotacional, resulta:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

Definición potencial vector $\vec{A}$

Propiedad del doble producto vectorial:

$$[\nabla \times (\nabla \times \vec{A})] = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$
$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$$

Un campo vectorial está especificado cuando se conoce el rotacional y la divergencia. Existe un grado de libertad.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Phi$$

Aplicando el rotacional, se tiene:

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \Phi)$$
$$= \nabla \times \vec{A} + [\nabla \times (\nabla \Phi)] = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Potencial vector magnético $\vec{A}$

Potencial vector magnético $\vec{A}$

El rotacional del gradiente siempre es cero $(\nabla \times (\nabla\Phi))$. Luego existe un grado de libertad que aprovecho para escoger $\vec{A}$ de forma que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

Es una ecuación vectorial que puede partirse en tres ecuaciones escalares:

$$\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z$$
$$\vec{J} = J_x \hat{e}_x + J_y \hat{e}_y + J_z \hat{e}_2$$

Se tienen ecuaciones de Poisson del mismo tipo visto en electrostática:

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu J_y$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z$$

Potencial vector magnético $\vec{A}$

Si el potencial escalar eléctrico producido por una distribución de carga es:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho \, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

El potencial vector magnético producido por un dipolo elemental de corriente orientado según el eje x será:

$$\vec{J} = J_x \hat{e}_x$$

No hay excitación según $\hat{e}_y$ y $\hat{e}_z$, por lo que las correspondientes componentes del potencial vector son nulas. Se ha cambiado $\rho \to J_x$ y $\epsilon \to (1/\mu)$.

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x \, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
$$A_y = 0$$
$$A_z = 0$$

Haciendo lo mismo para otras orientaciones de la corriente se obtiene:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} \, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Índice de Contenidos

Campo magnético a partir del potencial vector $\vec{A}$

Obtención del campo magnético

Una vez tenemos calculado $\vec{A}$ podemos calcular el campo magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\left[\nabla \times \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\left[\nabla \times \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{J}(\vec{r}')\right)\right] dV'$$

Rotacional de un vector por una función escalar, aplico la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\phi\vec{A}) = [(\nabla\Phi)\times\vec{A}] + \Phi(\nabla\times\vec{A})$$

$$\left[\nabla \times \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\vec{J}(\vec{r}')\right] = \left[\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\right]\times\vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(\nabla\times\vec{J}(\vec{r}')\right)$$

El término $\nabla \times \vec{J}(\vec{r}')$ es cero debido a que no depende de $\vec{r}$. De esta manera,

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\left\{\left[\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\right]\times\vec{J}(\vec{r}')\right\} dV'$$

Puede demostrarse que,

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Campo magnético a partir del potencial vector $\vec{A}$

Let de Biot y Savart

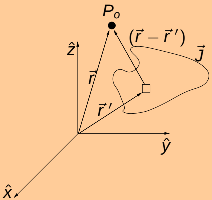

Figura: Cálculo del campo magnético con la ley de Biot-Savart

$$\vec{B} = -\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\times\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' =$$

$$\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

La ecuación anterior es conocida como la ley de Biot y Savart (Ley de Ampere). Existen métodos integrales para el calculo de $\vec{B}$.

Obtención del campo magnético

Para calcular la anterior ecuación primeramente hallamos,

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right)$$

En coordenadas esféricas se tiene:

$$\nabla\Phi = \hat{e}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \hat{e}_r\left(\frac{-1}{r^2}\right)$$

Además $\vec{r} = r\hat{e}_r$, por lo que $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ y

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

Si introducimos un desplazamiento de $\vec{r}'$ obtenemos la ley de Biot y Savart.

Campo magnético producido por un hilo de corriente

Hilo de Corriente

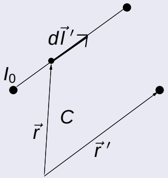

Figura: Cálculo del campo magnético producido por un hilo

Para un hilo de corriente:

$$\vec{B} = \frac{\mu I_0}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu I_0}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ley de Ampere

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_V$$

Si integro en una superficie (A/m^2),

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_V \cdot d\vec{S}$$

El último término es la corriente que atraviesa la superficie. Aplicando el teorema de Stokes se tiene:

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

El parámetro l es la línea que delimita la superficie S, luego,

$$I_{enc} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} \qquad \text{Ley de Ampere}$$

Campo magnético producido por un hilo de corriente

Hilo de Corriente Infinito

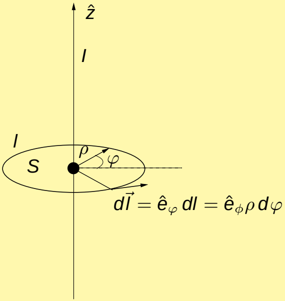

Figura: Campo magnético producido por un hilo de corriente infinito

Tomo esta línea cerrada para aplicar la ley de Ampere. La corriente que atraviesa la superficie S es I. Ahora tenemos que conocer más detalles del campo magnético. Por un lado si la corriente está dirigida según z, entonces $\vec{A} = A_z \hat{e}_z$.

Campo magnético para hilo infinito

Ahora tenemos, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Escogiendo coordenadas cilíndricas nada cambia en ϕ o en z (siempre que el hilo sea infinito), por tanto sólo hay dependencia con ρ.

$$\vec{A} = A_z(\rho)\hat{e}_z$$

Rotacional en cilíndricas:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{e}_\rho}{\rho} & \hat{e}_\phi & \frac{\hat{e}_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \frac{\hat{e}_\rho}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \hat{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

Pero $\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = 0$, luego:

$$\nabla \times \vec{A} = -\hat{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

$$\vec{B} = -\hat{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

$$\vec{H} = -\hat{e}_\phi \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \hat{e}_\phi H_\phi(\rho)$$

Campo magnético producido por un hilo de corriente

Campo magnético de un hilo

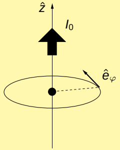

Figura: Campo magnético dirigido según $\hat{e}_\varphi$.

El campo magnético está dirigido según $\hat{e}_\phi$. Una corriente hace rotar el campo magnético (fuente rotacional). Vemos que a lo largo del camino l, A_z es constante luego $\vec{H}$ es constante y puede salir fuera de la integral,

$$I = \oint_l H_\phi \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \, dl$$

$$= H_\phi \int_0^{2\pi} \rho \, d\phi = H_\phi \, \rho \, 2\pi$$

Campo magnético de un hilo

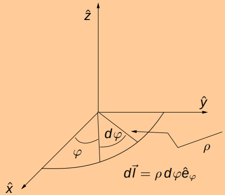

Figura: Cálculo del campo magnetico a lo largo del camino l.

$$I = H_\phi \, 2\pi\rho$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \, ; \vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{e}_\phi$$

Índice de Contenidos

Energía almacenada por el campo magnético

Definición

$$W_{dm} = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV = \frac{1}{2}\mu\int_V |\vec{H}|^2\,dV$$

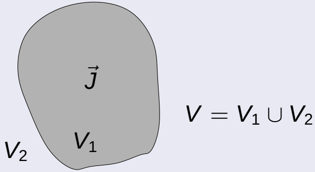

Figura: Regiones para el cálculo de la energía magnetostática

La integral se encuentra extendida a todo el espacio donde haya campo magnético $V = V_1 \cup V_2$.

Cálculo energía magnetoestática

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})$$
$$= \vec{H}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\vec{J}$$

$$\vec{H}\cdot\vec{B} = \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot\vec{J}$$
$$W_{dm} = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\,dV$$

Por la ley de integración de Gauss,

$$\int_V \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\,dV = \int_{S_\infty}(\vec{A}\times\vec{H})\,d\vec{S} = 0$$

Como la integral es a todo el espacio, la superficie S_∞ es la superficie del infinito y allí los campos y potenciales son cero, luego la integral es cero. Tenemos el caso en el que sólo existen distribuciones de corriente en volumen:

$$W_{dm} = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,dV$$

Energía almacenada por el campo magnético

Cálculo energía magnetoestática

La integral es distinta de cero sólo donde exista $\vec{J}$. Sabemos que:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Introduciendo en W_{dm} resulta,

$$W_{dm} = \frac{\mu}{8\pi}\int_V\int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{J}(\vec{r}')\,dV\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Ecuación de Newman para el calculo de la energía

$$W_{dm} = \frac{1}{2}\int_{V_1}\vec{A}\cdot\vec{J}\,dV + \frac{1}{2}\int_{V_1}\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\,dV + \frac{1}{2}\int_{V_2}\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\,dV$$

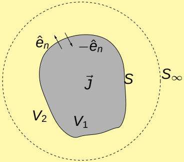

Figura: Regiones para el cálculo de la energía magnetostática

Cálculo energía magnetoestática

Por el teorema de Gauss,

$$W_{dm} = \frac{1}{2}\int_V\vec{A}\cdot\vec{J}\,dV + \frac{1}{2}\int_S(\vec{A}_1\times\vec{H}_1)\cdot d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_S(\vec{A}_2\times\vec{H}_2)\cdot d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_{S_\infty}(\vec{A}_2\times\vec{H}_2)\cdot d\vec{S}$$

donde $d\vec{S}$ es un vector normal a las superficies. Ahora escribimos $d\vec{S} = \hat{e}_n\cdot dS$.

$$\int_S(\vec{A}\times\vec{H})\,d\vec{S} = \int_S(\vec{A}_1\times\vec{H}_1)\cdot\hat{e}_n\,dS + \int_S(\vec{A}_2\times\vec{H}_2)\cdot(-\hat{e}_n)\,dS$$

Pero por la propiedad del producto mixto, se tiene $\hat{e}_n\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\hat{e}_n\times\vec{A}) = \vec{A}\cdot(\vec{H}\times\hat{e}_n) = -\vec{A}\cdot(\hat{e}_n\times\vec{H})$. $\vec{A}$ es continuo a través de la superficie . Luego,

$$\int_S(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{S} = -\int_S\vec{A}\cdot(\hat{e}_n\times\vec{H})\,dS = \int_S\vec{A}[\hat{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)]\,dS$$

Usando la condición de contorno por la que $\hat{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\big|_S = \vec{J}_s$. Tenemos entonces:

$$\int_S(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{S} = \int_S\vec{A}\cdot\vec{J}_s\,dS$$

Luego, finalmente:

$$W_{dm} = \frac{1}{2}\int_V\vec{A}\cdot\vec{J}\,dV + \frac{1}{2}\int_S\vec{A}\cdot\vec{J}_s\,dS$$

Energía magnetoestática de una espira

Hilo de corriente en forma de espira

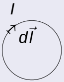

Figura: Energía para un hilo de corriente

$$W_{dm} = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,dV = \frac{1}{2} I \oint_c \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

Aplicando el teorema de Stokes,

$$\int_S (\nabla \times \vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

siendo C la línea que define la superficie S.

$$W_{dm} = \frac{1}{2} I \int_S (\nabla \times \vec{A})\cdot d\vec{S}$$

Tenemos que $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, luego

$$W_{dm} = \frac{1}{2} I \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} I \Phi_B$$

$\Phi_B \rightarrow$ Flujo magnético que atraviesa la superficie que define la espira.

Energía magnetoestática

Esta energía la podemos hallar usando la formulación de Newman,

$$W_{dm} = \frac{\mu}{8\pi} I\,I \int_C \int_{C'} \frac{d\vec{l}\cdot d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Hay un parámetro que sólo depende de la geometría (forma del hilo) y se llama inductancia:

$$L = \frac{\mu}{4\pi}\int_C \int_{C'} \frac{d\vec{l}\cdot d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Luego la energía queda como:

$$W_{dm} = \frac{1}{2} L I^2$$

Identificando ambas expresiones:

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Phi_B$$

$$L = \frac{\Phi_B}{I}\,;\Phi_B = LI$$

La última expresión es la conocida de las asignaturas de cicuitos.

Energía en un condensador (electroestática)

Condensador Ideal

$$W_{de} = \frac{1}{2}\int_V \Phi\,\rho\,dV + \frac{1}{2}\int_S \Phi\,\rho_s\,dS$$

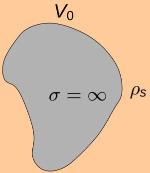

Figura: Conductor perfecto para el estudio de la energía en un condensador.

El conductor sólo admite ρ_s, por lo que

$$W_{de} = \frac{1}{2}\int_S \Phi\rho_s\,dS$$

Ahora Φ es constante en todo el conductor y vale V_0.

$$W_{de} = \frac{1}{2}V_0\int_S \rho_s\,dS = \frac{1}{2}V_0 Q$$

Q es la carga almacenada en el conductor.

Energía electroestática

Se tiene que $C = \frac{Q}{V_0}$, y la energía en un condensador $W_{de} = \frac{1}{2}C\,V_0^2$. Aplicando la teoría desarrollada para un condensador,

$$W_{de} = \frac{1}{2}V_1 Q - \frac{1}{2}V_2 Q = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2)$$

$V_0 = (V_1 - V_2)$ es la diferencia de potencial introducida.

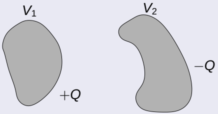

Figura: Estudio de un condensador.

$$W_{de} = \frac{1}{2}QV_0\,;C = \frac{Q}{V_0}$$

$$W_{de} = \frac{1}{2}CV_0^2 \quad \text{Energía en un condensador}$$

Lema de corrientes: $\sum_i I_i = 0$

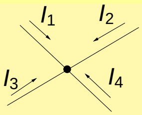

Figura: Lema de corrientes de Kirchoff

Ahora usamos la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Si integro en un volumen,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

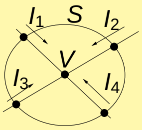

Figura: Ecuación de continuidad

Lema de corrientes

Por la ley de integración de Gauss:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

Esta es la corriente total que atraviesa la superficie. Será la corriente por cada hilo.

$$\sum_i I_i = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

El primer lema de Kirchoff sólo es cierto si $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. No hay variaciones temporales o éstas son despreciables. Por otra parte, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$.

$$\sum_i I_i = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D}\, dV = -\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV$$

Por el teorema de integración de Gauss,

$$\sum_i I_i = -\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Corriente de desplazamiento que atraviesa la superficie. Por otra parte $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ es la densidad de corriente de desplazamiento. $\sum_i I_i = -I_{desp}$, solamente si $I_{desp} \sim 0$ el primer lema de Kirchoff es correcto.

Lema de las tensiones y Ecuaciones de Maxwell

Lema de Tensiones

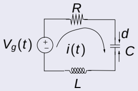

Figura: Lema de tensiones de Kirchoff

$$V_g(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + L\frac{di(t)}{dt}$$

El campo eléctrico puede ponerse como $\vec{E}_T = \vec{E}' + \vec{E}$

- $\vec{E}'$. Es el campo eléctrico producido dentro del generador.
- $\vec{E}$. Campo eléctrico resto del circuito producido por ρ y $\vec{J}$.

De esta forma $\vec{E}' = \vec{E}_T - \vec{E}$. Calculo de la integral de línea a lo largo del circuito

$$\int_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \int_C (\vec{E}_T - \vec{E}) \cdot d\vec{l}$$

Como $\vec{E}'$ no existe dentro del generador, $\int \vec{E}' \cdot d\vec{l}$ es la diferencia de potencial creada internamente dentro del generador o fuerza electromotriz V_g. Además demostraremos,

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$V_g = \int_C \left(\vec{E}_T + \nabla\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{l}$$

El campo total cumple la ley de Ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E}_T$. Si las placas del conductor y el hilo de la bobina son muy buenos conductores ($\sigma \to \infty$) este término sólo es importante en la resistencia. Luego:

$$\int_C \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \int_C \frac{J}{\sigma} d\vec{l} = \frac{J}{\sigma} l = \frac{1}{\sigma} l = R\,I \qquad \text{Densidad cte corriente}$$

Lema de tensiones

La segunda integral sólo es importante donde haya acumulación de cargas que es en el condensador.

$$\int_C \nabla\Phi \cdot d\vec{l} = -\int_C \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = -E_c\,d = -\frac{D}{\epsilon} d$$

Se han ampliado las relaciones $\vec{E}_c = -\nabla\Phi$ y $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. Por Gauss

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad ; \quad D\,A = -Q$$

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{A}\frac{d}{\epsilon}$$

Pero hemos calculado anteriormente que $C = \epsilon\frac{A}{d}$. Por tanto,

$$\int \nabla\Phi \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

Además $i = \frac{dQ}{dt}$, $Q = \int i(t)\,dt$. La tercera integral es finalmente importante donde el campo magnético y por tanto $\vec{A}$ sean grandes. Esto ocurre en la bobina.

$$\int_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Usando el teorema de Stokes,

$$\int_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\Phi_B(t)$$

Además hemos demostrado $\Phi_B = L\,i(t)$, luego,

$$\int_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = L\frac{di(t)}{dt}$$

Juntando todas las integrales obtenemos la ecuación que planteamos usando Kirchoff. Sin embargo, sólo es válida cuando son válidas todas estas aproximaciones.

Grado de libertad en el potencial vector magnético $\vec{A}$

Potencial vector magnético

¿Por qué existe un grado de libertad en $\vec{A}$?. En primer lugar $\vec{A}$ es un potencial vector arbitrario y sabemos que existen infinitas funciones vectoriales que dan el mismo rotacional.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Phi$$

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} \times \nabla\Phi) = \nabla \times \vec{A} + [\nabla \times (\nabla\Phi)] = \nabla \times \vec{A}$$

Hay que tener en cuenta que el rotacional de un gradiente es siempre cero. Además una función vectorial está completamente definida cuando se especifica su rotacional y su divergencia. Hemos definido ya el rotacional como $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, pero hay que especificar también su divergencia en magnetostática tomamos $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, porque con esta condición llegamos a una ecuación tipo Poisson para las componentes del campo. Veremos que en dinámica haremos,

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad \text{Condición de Lorentz}$$

Pero podemos fijar cualquier otra condición a la divergencia de $\vec{A}$. La condición de Coulomb y la condición de London son también populares.