

Ondas Electromagnéticas

Bloque IV. Aplicación de la teoría electromagnética a la propagación de ondas guiadas

Fernando D. Quesada Pereira¹

¹Grados de Ingeniería Telemática y de Sistemas de Telecomunicación
Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Universidad Politécnica de Cartagena

9 de enero de 2012

Índice de Contenidos

- 1 Análisis de una guía de placas paralelas
 - Ondas TEM
- 2 Onda TEM en un cable coaxial
- 3 Modos TM
 - Relación con las ondas TEM
- 4 Ondas TE
- 5 Ejercicio de aplicación de los conceptos estudiados

Guía de placas paralelas

Podemos finalmente realizar el análisis de un **medio de transmisión** que consiste en una **guía de placas paralelas**.

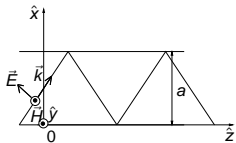


Figura: Guía de placas paralelas.

Guía de placas paralelas

Suponemos que la guía de placas paralelas está **excitada por una onda TM** como muestra en la figura, propagándose en el plano (x, z) (incidencia normal respecto de y). En esta situación ni la geometría ni la excitación dependen de y , y por tanto podemos poner:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

La **componente longitudinal del campo eléctrico** será:

$$E_z(x, y, z) = V(z)F_1(x, y)$$

Donde $V(z)$ es la tensión en una línea de transmisión, y $F_1(x, y)$ satisface la ecuación:

$$\nabla_t^2 F_1(x, y) + k_t^2 F_1(x, y) = 0$$

Ahora $\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x$, puesto que $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ y $k_t = k_x$. La ecuación a resolver es:

$$\frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} + k_x^2 F_1(x) = 0$$

La ecuación anterior la sabemos resolver y queda:

$$F_1(x) = Ae^{-jk_x x} + Be^{jk_x x}$$

Guía de placas paralelas

Como tratamos con E_z , debemos **imponer las condiciones de contorno** sobre este campo. El **campo eléctrico tangencial es cero en una superficie metálica**, luego:

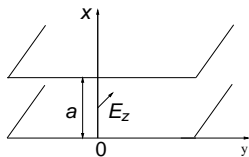


Figura: Guía de placas paralelas.

Guía de placas paralelas

$$E_z(x = 0, z) = 0 \rightarrow F_1(x = 0) = 0$$

$$E_z(x = a, z) = 0 \rightarrow F_1(x = a) = 0$$

Además tenemos:

$$F_1(x = 0) = A + B = 0$$

Se tiene que $A = -B$. De modo que:

$$F_1(x) = B \left(e^{jk_x x} - e^{-jk_x x} \right) = 2jB \frac{e^{jk_x x} - e^{-jk_x x}}{2j} = 2jB \sin(k_x x)$$

Se tiene que:

$$F_1(x = a) = 2jB \sin(k_x a) = 0$$

Luego $k_x a = m\pi$ y $k_x = \frac{m\pi}{a}$. Por tanto hemos encontrado que:

$$E_z(x, z) = B \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) V(z)$$

Guía de placas paralelas

Las demás componentes ahora se obtienen fácilmente.

$$\begin{aligned}\vec{E}_t(x, z) &= -\frac{j\beta}{k_x^2}(\nabla_t E_z) = \frac{-j\beta}{k_x^2}\hat{e}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ &= \hat{e}_x \frac{-j\beta}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} BV(z) \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \\ &= \hat{e}_x \frac{-j\beta a}{m\pi} BV(z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\end{aligned}$$

$$\vec{H}_t(x, z) = \frac{j\omega\epsilon}{k_x^2} [\nabla_t \times (E_z \hat{e}_z)]$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_t(x, z) &= \frac{j\omega\epsilon}{k_x^2} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{j\omega\epsilon}{k_x^2} (-\hat{e}_y) \frac{\partial E_z}{\partial x}\end{aligned}$$

Guía de placas paralelas

$$\begin{aligned}\vec{H}_t(x, z) &= \frac{j\omega\epsilon}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} (-\hat{e}_y) \\ &B \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) V(z)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\vec{H}_t(x, z) = -\frac{j\omega\epsilon a}{m\pi} BV(z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \hat{e}_y$$

En la ecuación anterior sólo hay componente en y del campo magnético. Estas son las **ondas TE** que pueden propagarse en este sistema de transmisión.

Índice de Contenidos

- 1 Análisis de una guía de placas paralelas
 - Ondas TEM
- 2 Onda TEM en un cable coaxial
- 3 Modos TM
 - Relación con las ondas TEM
- 4 Ondas TE
- 5 Ejercicio de aplicación de los conceptos estudiados

Este sistema de transmisión también puede soportar una onda TEM.

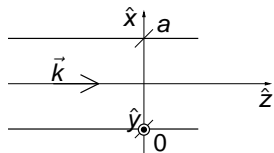


Figura: Guía de placas paralelas.

Ondas TEM

Para encontrar el campo eléctrico debemos resolver el problema electrostático:

$$\nabla_t \times \vec{E}_t(x, z) = 0$$

$$\nabla_t \cdot \vec{E}_t(x, z) = 0$$

Podemos utilizar el potencial auxiliar $\nabla_t^2 \phi(x) = 0$.

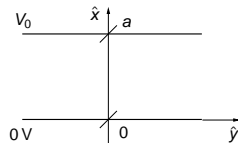


Figura: Aplicamos una tensión V_0 entre las dos placas (corte transversal).

Ondas TEM

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = A$$

$$\phi(x) = Ax + B$$

$$\phi(x=0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\phi(x=a) = V_0 \rightarrow A \cdot a = V_0 \quad ; \quad A = \frac{V_0}{a}$$

Ahora sabemos que $\vec{E}_t(x) = -\nabla_t \phi(x)$.

$$\vec{E}_t(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{e}_x = -\frac{V_0}{a} \hat{e}_x$$

En la relación anterior sólo hay componente según x del campo eléctrico. El **campo eléctrico total** será:

$$\vec{E}_t(x, z) = -\frac{V_0}{a} V(z) \hat{e}_x$$

La **variación en z** es siempre la **tensión en una línea de transmisión**. La relación es constante en (x, y) .

Para hallar el campo magnético debemos suponer una **corriente I_0 en cada armadura**. Consideramos las placas infinitas pero para el cálculo de la densidad de corriente **supondremos que las placas tienen anchura b** . Entonces resulta que:

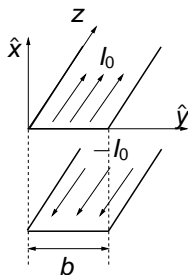


Figura: Cálculo del campo magnético a partir de la corriente en las placas paralelas.

Ondas TEM

$$\vec{J}_s(x, z) = \frac{I_0}{b} \hat{e}_z \quad (\text{Densidad superficial de corriente})$$

Para resolver este problema tomamos el **potencial vector magnético**.

$$\vec{A}(x) = A_z(x) \hat{e}_z$$

Como dentro de las placas no hay fuentes debemos resolver:

$$\nabla^2 A_z(x) = 0$$

$$\frac{d^2 A_z(x)}{dx^2} = 0$$

$$A_z(x) = Cx + D$$

El **campo magnético** es:

$$\vec{H}_t(x) = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu} (-\hat{e}_y) \frac{\partial A_z(x)}{\partial x}$$

Finalmente escribimos:

$$\vec{H}_t(x) = -C \frac{\hat{e}_y}{\mu}$$

El campo debe de satisfacer las **condiciones de contorno en las placas**.

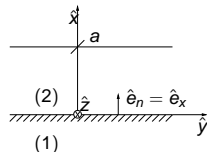


Figura: Comprobación de que el campo magnético cumple las condiciones de contorno en las placas.

Ondas TEM

$$\vec{J}_s = \hat{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

$$\vec{H}_1 = 0$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_t(x=0^+) = \frac{-\hat{e}_y C}{\mu}$$

$$\vec{J}_s = (\hat{e}_x \times \hat{e}_y) \left(\frac{-C}{\mu} \right)$$

$$\hat{e}_z \left(\frac{-C}{\mu} \right) = -\frac{I_0}{b} \hat{e}_z$$

$$C = \frac{\mu I_0}{b}$$

Por tanto, el **campo magnético total** es:

$$\vec{H}_t(x, z) = -\hat{e}_y \frac{I_0}{b} I(z)$$

La expresión anterior sólo depende de z , y es constante con (x, y) . Donde $I(z)$ es la corriente en una línea de transmisión con **impedancia característica** igual a la **impedancia intrínseca del medio** $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$. También sabemos que en una onda TEM se tiene:

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z_0} (\hat{e}_k \times \vec{E}_t) = \frac{1}{Z_0} (\hat{e}_z \times \vec{E}_t)$$

Ondas TEM

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z_0} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{Z_0} \hat{e}_y E_x$$

La expresión anterior **sólo es válida para la onda incidente**. Introduciendo \vec{H}_t y \vec{E}_t obtenemos:

$$-\hat{e}_y \frac{I_0}{b} I(z) = \frac{1}{Z_0} \hat{e}_y \left(\frac{-V_0}{a} \right) V(z)$$

$$I(z) \frac{I_0}{V_0} = \frac{b}{Z_0 a} V(z)$$

Podemos trabajar con verdaderas corrientes y tensiones siempre que definamos una impedancia característica de la siguiente manera.

$$Z_c^{(r)} = \frac{Z_0 a}{b}$$

En la relación previa tenemos la **impedancia característica de la línea física**. Entonces:

$$I(z) = \frac{1}{Z_c^{(r)}} V(z)$$

En la ecuación trabajamos con I y V como en una línea de transmisión.

Onda TEM en un cable coaxial

La onda TEM de un cable coaxial puede encontrarse fácilmente, puesto que tan sólo debemos resolver el problema electrostático.

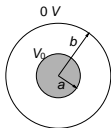


Figura: Obtención del modo TEM en un cable coaxial.

Onda TEM en coaxial

$$\nabla^2 \phi(\rho) = 0 \quad ; \quad \text{Sólo si: } \frac{\partial}{\partial \rho} \neq 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho} \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho} = A \quad ; \quad \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$\phi(\rho) = A \log \rho + B$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$\phi(\rho = a) = V_0 \quad ; \quad A \log a + B = V_0$$

$$\phi(\rho = b) = 0 \quad ; \quad A \log b + B = 0$$

A partir de la ecuación tenemos que:

$$A(\log a - \log b) = V_0$$

$$A = \frac{V_0}{\log(a/b)}$$

$$B = -A \log b$$

$$B = -\log b \frac{V_0}{\log(a/b)}$$

Onda TEM en un cable coaxial

Onda TEM en un cable coaxial

$$\phi(\rho) = \frac{V_0}{\log(a/b)} \log \rho - \log b \frac{V_0}{\log(a/b)} = \frac{V_0}{\log(a/b)} \log(\rho/b)$$

$$\vec{E}_t(\rho) = -\nabla\phi(\rho) = -\frac{\partial\phi(\rho)}{\partial\rho}\hat{e}_\rho = -\frac{V_0}{\log(a/b)}\frac{1}{\rho}\hat{e}_\rho$$

Luego el **campo eléctrico** total añadiendo la variación en z es:

$$\vec{E}_t(\rho, z) = \frac{-V_0}{\log(a/b)}\frac{1}{\rho}V(z)\hat{e}_\rho$$

Para el **campo magnético** suponemos una corriente en cada conductor. La densidad de corriente será:

$$\vec{J}_s(\rho) = \frac{I_0}{2\pi a}\hat{e}_z$$

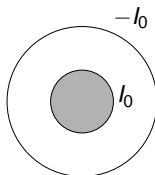


Figura: Obtención del campo magnético a partir de la corriente I_0 en el coaxial (corte transversal).

Onda TEM en un cable coaxial

Onda TEM en un cable coaxial

$$\vec{A} = A_z(\rho)\hat{e}_z$$

$$\nabla^2 A_z(\rho) = 0$$

Tenemos la **misma ecuación** a resolver, luego:

$$A_z = C \log \rho + D$$

Hallamos el campo magnético:

$$\vec{H}_t(\rho) = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu}(-\hat{e}_\phi) \frac{\partial A_z(\rho)}{\partial \rho}$$

Finalmente,

$$\vec{H}_t(\rho) = -\frac{\hat{e}_\phi}{\mu} \frac{C}{\rho}$$

Ahora imponemos las condiciones de contorno para \vec{H} .

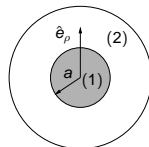


Figura: Condiciones de contorno para \vec{H} .

Onda TEM en un cable coaxial

Onda TEM en coaxial (C. Contorno)

$$\vec{J}_s = \hat{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

$$\vec{H}_1 = 0 \text{ (dentro del c. interno)}$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}(\rho = a) = -\frac{\hat{e}_\phi C}{\mu a}$$

$$\vec{J}_s = (\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi) \frac{-C}{\mu a}$$

$$\hat{e}_z \frac{-C}{\mu a} = \frac{I_0}{2\pi a} \hat{e}_z \quad ; \quad C = -\frac{I_0 \mu}{2\pi}$$

El **campo magnético** total es:

$$\vec{H}_t = \frac{\hat{e}_\phi}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{I_0 \mu}{2\pi} = \hat{e}_\phi \frac{I_0}{2\pi \rho} = \hat{e}_\phi \frac{I_0}{2\pi \rho} I(z)$$

Donde $I(z)$ es la **corriente en una línea de transmisión de impedancia** característica $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$. En una onda TEM no necesitamos trabajar con campos eléctricos y magnéticos. Podemos trabajar directamente con tensiones y corrientes.

Onda TEM en coaxial

Para una onda TEM se cumple:

$$\vec{H}_t(\rho, z) = \frac{1}{Z_0} (\hat{e}_z \times \vec{E}_t) = \frac{1}{Z_0} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{Z_0} (\hat{e}_\phi) E_\rho(\rho, z)$$

El término anterior es válido para la onda incidente. Introduciendo los valores:

$$\hat{e}_\phi \frac{I_0}{2\pi \rho} I(z) = \frac{1}{Z_0} (\hat{e}_\phi) \frac{-V_0}{\log(a/b)} \frac{1}{\rho} V(z)$$

$$-I(z) \frac{I_0}{V_0} = \frac{2\pi}{Z_0 \log(a/b)} V(z)$$

Debemos tomar como impedancia característica ($-I_0/V_0 = 1$):

$$Z_c^{(f)} = \frac{Z_0 \log(a/b)}{2\pi} = \frac{120\pi \log(a/b)}{2\pi} = 60 \log(a/b)$$

Con esta impedancia característica puedo **tratar ahora el cable coaxial mediante la teoría de líneas de transmisión** directamente con tensiones y corrientes.

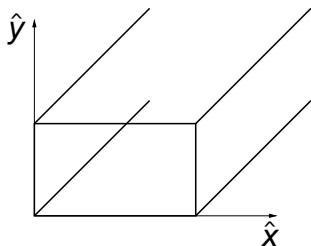


Figura: Guía rectangular

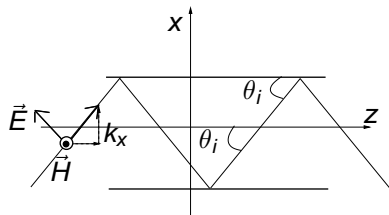


Figura: Guía de placas paralelas.

Este tipo de modos pueden propagarse en una guía rectangular.

Análisis

Para resolver este problema tendremos que hallar:

$$\nabla_t^2 F_1(x, y) + k_t^2 F_1(x, y) = 0$$

En la dirección transversal de la guía sujeta a las condiciones de contorno para E_z . Entonces

$$E_z(x, y, z) = V(z)F_1(x, y)$$

La variación en z es siempre una **tensión en una línea de transmisión**. Una vez tengo E_z hallo \vec{E}_t y \vec{H}_t con las ecuaciones obtenidas. Si resolvemos esta ecuación veremos que obtenemos $k_x = \frac{m\pi}{a}$. Pero sabemos que $k_x = k \sin \theta_i$, luego:

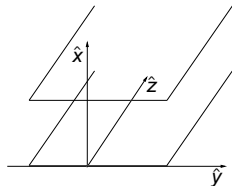


Figura: Guía de placas paralelas. La estructura es infinita en y .

Análisis

$$k \sin \theta_i = \frac{m\pi}{a}$$

$$\sin \theta_i = \frac{m\pi}{a k} = \frac{m\pi}{a 2\pi/\lambda} = \frac{m\lambda}{2a}$$

$$\sin \theta_i = \frac{m\lambda}{2a}$$

Elegida la frecuencia λ está fija y entonces θ_i solo toma valores discretos.

$$\sin \theta_{im} = \frac{m\lambda}{2a}; m = 1, 2, 3, \dots$$

Si aumento mucho m , puede suceder que:

$$\frac{m\lambda}{2a} > 1$$

entonces $\sin(\theta_{im}) > 1$. El término θ_{im} es complejo, **no existe un ángulo de incidencia real**. La solución no existe y la energía no puede propagarse en esa dirección. Vemos que el caso límite es $\sin(\theta_{im}) = 1$.

No hay avance de energía

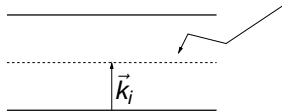


Figura: Guía de placas paralelas.

Análisis

Entonces, $\theta_i = \pi/2$, $\sin \pi/2 = 1$. Podemos calcular la frecuencia a la que se cumple esto:

$$1 = \frac{m\lambda_c}{2a} \quad ; \quad \lambda_c = \frac{2a}{m}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}f}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}f_c} = \frac{2a}{m} \quad ; \quad f_c = \frac{m}{2a\sqrt{\epsilon\mu}}$$

El término anterior es la **frecuencia límite o de corte** para cada valor de m . Suponemos que para una frecuencia dada existen dos ángulos tal que $\frac{m\lambda}{2a} < 1$. Entonces la energía podrá propagarse en esas dos direcciones.

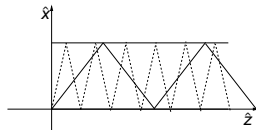


Figura: Una onda recorre un camino más largo que la otra.

Claramente **una onda recorre más distancia** que la otra hasta llegar al mismo plano. Las dos ondas llegan entonces con distinta fase y no podré recuperar la señal a la salida, es la **distorsión de fase**. Para evitar esta **distorsión de fase** normalmente se **escoge a** para que **sólo exista una onda** que pueda estar en la estructura.

Índice de Contenidos

- 1 Análisis de una guía de placas paralelas
 - Ondas TEM
- 2 Onda TEM en un cable coaxial
- 3 Modos TM**
 - **Relación con las ondas TEM**
- 4 Ondas TE
- 5 Ejercicio de aplicación de los conceptos estudiados

Relación con las ondas TEM

Vamos a ver como todo esto se relaciona con la onda transversal eléctrica y magnética TEM. En este caso vemos que $E_z = 0$ y $H_z = 0$.

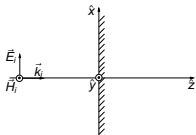


Figura: Relación con la onda TEM.

Análisis

Las **cuatro ecuaciones transversales** ($E_z = 0, H_z = 0$) son:

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = 0 ; \quad \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu(\vec{H}_t \times \hat{e}_z)$$

$$\nabla_t \times \vec{H}_t = 0 ; \quad \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = -j\omega\epsilon(\hat{e}_z \times \vec{E}_t)$$

Derivo con respecto de z la ecuación:

$$\nabla_t \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = 0$$

Utilizando la relación previa tenemos (aplicamos $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$):

$$-j\omega\mu[\nabla_t \times (\vec{H}_t \times \hat{e}_z)] = 0$$

$$\nabla_t \cdot \vec{H}_t = 0$$

Tomo el rotacional.

$$[\nabla_t \times (\nabla_t \times \vec{H}_t)] = 0$$

$$\nabla_t^2 \vec{H}_t = 0$$

$$\nabla_t^2 \vec{H}_t + \frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} + k^2 \vec{H}_t = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} + k^2 \vec{H}_t = 0$$

Relación con las ondas TEM

Análisis

Además, sabemos que:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} = -\beta^2 \vec{H}_t$$

Tenemos la **ecuación de la línea de transmisión**. Por tanto,

$$(-\beta^2 + k^2)\vec{H}_t = 0$$

Resulta que $k = \beta$, **la onda se propaga siguiendo el eje z** (incidencia normal). Derivo con respecto de z la ecuación :

$$\nabla_t \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = 0$$

Aplicando $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$:

$$\begin{aligned} -j\omega\epsilon [\nabla_t \times (\hat{e}_z \times \vec{E}_t)] &= 0 \\ (\nabla_t \cdot \vec{E}_t) &= 0 \end{aligned}$$

Análisis

Hay que fijarse que tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = 0$$

$$\nabla_t \cdot \vec{E}_t = 0$$

En la relación tenemos un **problema electrostático** en una región sin fuentes:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon = 0$$

Es un **problema electrostático en la sección transversal**. Para que exista campo es **necesario que haya una diferencia de potencial en la estructura**. Son necesarios al menos **dos conductores**.

Relación con las ondas TEM

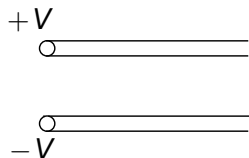


Figura: Línea bifilar.

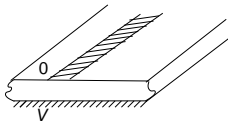


Figura: Línea microstrip.

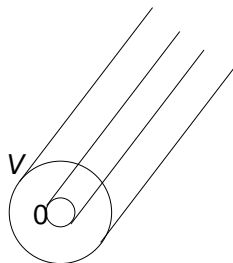


Figura: Línea coaxial.

Luego sólo pueden existir **modos TEM en estructuras donde existan dos o más conductores**. La onda se propaga con incidencia cero para cualquier frecuencia, luego **no existe fenómeno de frecuencia de corte**. Puede propagarse a cualquier frecuencia.

Esta es la pieza que faltaba para pasar de una **línea de transmisión idealizada** (sin dimensiones transversales), a una **línea de transmisión real** (coaxial, cable bifilar, etc).

En un coaxial se propaga una onda TEM, si aumentamos la frecuencia podrían propagarse, además, ondas TE o TM, cuando rebasemos sus frecuencias de corte.

Ondas TE

Para onda TE el desarrollo es el siguiente. Resolvemos la ecuación en derivadas parciales para $H_z(x, y, z) = I(z)F(x, y)$, donde tenemos la corriente en la línea $I(z)$ y una función $F(x, y)$ que puede ser complicada.

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu\hat{e}_z H_z$$

$$\nabla_t \times \vec{H}_t = 0$$

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu(\vec{H}_t \times \hat{e}_z)$$

$$\frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} - \nabla_t H_z = -j\omega\epsilon(\hat{e}_z \times \vec{E}_t)$$

Derivando según z la primera ecuación:

$$\nabla_t \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\hat{e}_z \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$-j\omega\mu[\nabla_t \times (\vec{H}_t \times \hat{e}_z)] = -j\omega\mu\hat{e}_z \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$(\nabla \cdot \hat{e}_z)\vec{H}_t - (\nabla_t \cdot \vec{H}_t)\hat{e}_z = \hat{e}_z \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$-(\nabla_t \cdot \vec{H}_t) = \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

Ondas TE

Tomando el rotacional en la segunda ecuación:

$$\nabla_t \times (\nabla_t \times \vec{H}_t) = 0$$

$$\nabla_t(\nabla_t \cdot \vec{H}_t) - (\nabla_t \cdot \nabla_t)\vec{H}_t = 0$$

$$\nabla_t^2 \vec{H}_t = \nabla_t(\nabla_t \cdot \vec{H}_t)$$

Sustituyendo el resultado previo:

$$\nabla_t^2 \vec{H}_t = -\nabla_t \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

De la ecuación de onda:

$$\nabla_t^2 \vec{H}_t + \frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} + k^2 \vec{H}_t = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} + k^2 \vec{H}_t = \nabla_t \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = -j\beta H_z$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} = -\beta^2 \vec{H}_t$$

Empleando las relaciones previas llegamos a:

$$(-\beta^2 + k^2)\vec{H}_t = (\nabla_t H_z)(-j\beta)$$

$$\vec{H}_t = \frac{-j\beta}{k_t^2}(\nabla_t H_z)$$

Modos TE

Derivamos ahora la segunda ecuación respecto a z :

$$\nabla_t \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = 0$$

Introducimos en la cuarta ecuación la anterior:

$$\nabla_t \times [\nabla_t H_z - j\omega\epsilon(\hat{e}_z \times \vec{E}_t)] = 0$$

$$[\nabla_t \times (\nabla_t H_z)] - j\omega\epsilon[\nabla_t \times (\hat{e}_z \times \vec{E}_t)] = 0$$

$$-j\omega\epsilon[(\nabla_t \cdot \vec{E}_t)\hat{e}_z - (\nabla_t \cdot \hat{e}_z)\vec{E}_t] = 0$$

Finalmente resulta:

$$\nabla_t \cdot \vec{E}_t = 0$$

Modos TE

Tomamos el rotacional de la primera ecuación:

$$\nabla_t \times (\nabla_t \times \vec{E}_t) = -j\omega\mu[\nabla_t \times (\hat{e}_z H_z)]$$

$$\nabla_t(\nabla_t \cdot \vec{E}_t) - (\nabla_t \cdot \nabla_t)\vec{E}_t = -j\omega\mu[\nabla_t \times (\hat{e}_z H_z)]$$

$$\nabla_t^2 \vec{E}_t = j\omega\mu[\nabla_t \times (\hat{e}_z H_z)]$$

Como siempre de la ecuación de onda o de Helmholtz:

$$\nabla_t^2 \vec{E}_t + \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} + k^2 \vec{E}_t = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} + k^2 \vec{E}_t = -j\omega\mu[\nabla_t \times (\hat{e}_z H_z)]$$

Además:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} = -\beta^2 \vec{E}_t$$

$$(-\beta^2 + k^2)\vec{E}_t = -j\omega\mu[\nabla_t \times (\hat{e}_z H_z)]$$

Ondas TE

Tenemos que $k_t^2 = -\beta^2 + k^2$:

$$\vec{E}_t = \frac{-j\omega\mu}{k_t^2} [\nabla_t \times (\hat{e}_z H_z)]$$

Podemos ahora **cambiar el orden del producto vectorial**:

$$\vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k_t^2} [\hat{e}_z \times (\nabla_t H_z)]$$

De la expresión previamente hallada:

$$(\nabla_t H_z) = \frac{k_t^2}{-j\beta} \vec{H}_t$$

$$\vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k_t^2} \frac{k_t^2}{-j\beta} (\hat{e}_z \times \vec{H}_t)$$

Finalmente,

$$\vec{E}_t = -\frac{\omega\mu}{\beta} (\hat{e}_z \times \vec{H}_t)$$

Ondas TE

Aun queda tomar un producto vectorial:

$$\hat{e}_z \times \vec{E}_t = -\frac{\omega\mu}{\beta} [\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \vec{H}_t)]$$

$$\hat{e}_z \times \vec{E}_t = -\frac{\omega\mu}{\beta} [(\hat{e}_z \cdot \vec{H}_t) \hat{e}_z - (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z) \vec{H}_t]$$

$$\hat{e}_z \times \vec{E}_t = \frac{\omega\mu}{\beta} \vec{H}_t$$

A partir de la relación anterior escribimos:

$$\vec{H}_t = \frac{\beta}{\omega\mu} (\hat{e}_z \times \vec{E}_t) = \frac{1}{\omega\mu/\beta} (\hat{e}_z \times \vec{E}_t)$$

Definimos $Z_C^{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta}$, de forma que:

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z_C^{TE}} (\hat{e}_z \times \vec{E}_t)$$

Aplicación de los conceptos estudiados

Vamos a tratar de hacer un **protector reflectante** para **proteger nuestros equipos** de la radiación de un transmisor próximo que produce interferencias. Para ello usamos **pintura dieléctrica**.

En primer lugar, consideramos una onda electromagnética que incide normalmente a un dieléctrico semi-infinito de permitividad relativa $\epsilon_r = 9$. Calcule el **porcentaje de potencia incidente que es reflejada por el dieléctrico**. Caso de **onda TEM o incidencia normal**.

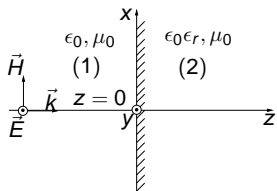


Figura: Cálculo del porcentaje de potencia que es reflejada por el dieléctrico.

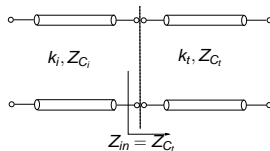


Figura: Modelo de línea de transmisión del problema.

Aplicación de los conceptos estudiados

Potencia reflejada por el dieléctrico

$$Z_{in} = Z_{ct} = \sqrt{\frac{\mu_0}{9\epsilon_0}} = \frac{Z_0}{3}$$

$$k_t = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{9} = 3k_0, \quad Z_{Ci} = Z_0, \quad k_i = Z_0.$$

$$\rho = \frac{Z_{in} - Z_{Ci}}{Z_{in} + Z_{Ci}} = \frac{Z_0/3 - Z_0}{Z_0/3 + Z_0} = -\frac{1}{2}$$

Luego la **fracción de potencia reflejada** es:

$$|\rho|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$$

El 25% es la potencia reflejada y el resto se transmite.

Vea que sucede si la onda incide al dieléctrico con un ángulo de 30° .

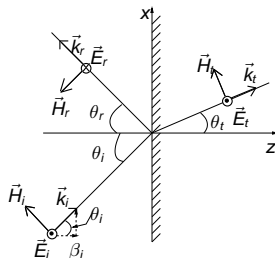


Figura: Resolución del problema de incidencia oblicua.

Es una onda con **polarización TE**.

Aplicación de los conceptos estudiados

El **circuito equivalente** en línea de transmisión será

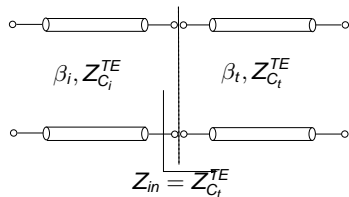


Figura: Modelo de línea de transmisión del problema.

$$Z_{C_i}^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{\beta_i}, \quad Z_{in} = Z_{C_t}^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{\beta_t},$$

$$\beta_i = k_i \cos \theta_i = k_0 \cos \theta_i,$$

$$\beta_t = k_t \cos \theta_t = 3k_0 \cos \theta_t.$$

Onda incidente con 30°

$$Z_{C_i}^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{k_0 \cos \theta_i} = \frac{\omega \mu_0}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cos \theta_i} = \frac{Z_0}{\cos \theta_i}$$

$$Z_{in} = Z_{C_t}^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{3k_0 \cos \theta_t} = \frac{\omega \mu_0}{3\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cos \theta_t} = \frac{Z_0/3}{\cos \theta_t}$$

$$\rho = \frac{Z_{in} - Z_{C_1}^{TE}}{Z_{in} + Z_{C_1}^{TE}} = \frac{\frac{Z_0/3}{\cos \theta_t} - \frac{Z_0}{\cos \theta_i}}{\frac{Z_0/3}{\cos \theta_t} + \frac{Z_0}{\cos \theta_i}} = \frac{\frac{\cos \theta_i}{3} - \cos \theta_t}{\frac{\cos \theta_i}{3} + \cos \theta_t}$$

Aplicación de los conceptos estudiados

Onda incidente con 30°

Además **tenemos la ley de Snell:**

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t$$

$$k_0 \sin \theta_i = 3k_0 \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{3} = \frac{\sin(30^\circ)}{3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$$

Resulta que $\theta_t = 9,59^\circ$, por tanto:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\cos(30^\circ)/3 - \cos 9,59^\circ}{\cos(30^\circ)/3 + \cos 9,59^\circ} \\ &= \frac{0,86/3 - 0,98}{0,86/3 + 0,98} = -0,55 \end{aligned}$$

La fracción de **potencia reflejada** será:

$$|\rho|^2 = 0,3$$

Un 30%, luego hay un **aumento de reflexión**.

¿Hay un ángulo de incidencia para el cual se produce una reflexión total? Queremos que $|\rho| = 1$, $\rho = \pm 1$.

$$\frac{\cos \theta_i}{3} - \cos \theta_t = \pm \left(\frac{\cos \theta_i}{3} + \cos \theta_t \right)$$

$$\frac{\cos \theta_i}{3} - \cos \theta_t = \frac{\cos \theta_i}{3} + \cos \theta_t$$

$$2 \cos \theta_t = 0$$

$$\theta_t = \pi/2$$

$$\frac{\cos \theta_i}{3} - \cos \theta_t = -\frac{\cos \theta_i}{3} - \cos \theta_t$$

$$\frac{2}{3} \cos \theta_i = 0$$

$$\theta_i = \pi/2$$

Ambas soluciones corresponden a **ángulos rasantes**. Esta es una situación **poco práctica**.

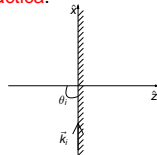


Figura: Onda rasante a la frontera entre medios.



Ángulo para reflexión total

$|\rho| = 1$ también puede escribirse como $\rho = e^{j\phi}$ con lo cual tendremos:

$$\rho = \frac{\frac{\cos \theta_i}{3} - \cos \theta_t}{\frac{\cos \theta_i}{3} + \cos \theta_t} = e^{j\phi}$$

Para que ρ sea complejo, como θ_i debe ser real, entonces θ_t debe ser complejo. De la ley de Snell:

$$\sin \theta_t = \frac{k_i}{k_t} \sin \theta_i$$

Para que θ_t sea complejo debe ocurrir que $\sin \theta_t > 1$, luego:

$$\frac{k_i}{k_t} \sin \theta_i > 1$$

$$\sin \theta_i > \frac{k_t}{k_i}$$

$$\sin \theta_i > \frac{3k_0}{k_0}$$

$$\sin \theta_i > 3$$

$$\theta_i > \arcsin(3)$$

No existe un ángulo que cumpla la condición, luego **no existe un ángulo de reflexión total**. Se ve que debe ocurrir: $k_i > k_t$ y $\epsilon_i > \epsilon_t$. Este es el **principio de propagación en fibras ópticas**.

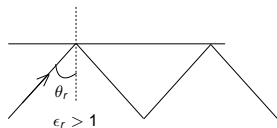


Figura: Ángulo crítico

Existe un ángulo crítico de reflexión total. **Condición de ángulo crítico de reflexión total**: $\sin \theta_t = k_t/k_i$, con $\theta_i > \theta_e$.

Aplicación de los conceptos estudiados

¿Existe un ángulo para el cual no exista onda reflejada? Para $\rho = 0$,

$$\frac{\cos \theta_i}{3} - \cos \theta_t = 0$$
$$\frac{\cos \theta_i}{3} = \cos \theta_t$$

Además tenemos la ley de Snell:

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{3}$$
$$\frac{\cos^2 \theta_i}{9} = \cos^2 \theta_t$$
$$\frac{\cos^2 \theta_i}{9} = 1 - \sin^2 \theta_t$$
$$\frac{\cos^2 \theta_i}{9} = 1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{9}$$
$$\frac{1 - \sin^2 \theta_i}{9} = 1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{9}$$
$$\frac{1}{9} - \frac{\sin^2 \theta_i}{9} = 1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{9}$$

La última ecuación no se puede cumplir. Luego, **no existe ningún ángulo que cumpla esta condición**. El **ángulo de Brewster** sólo existe para polarización TM.

Con el fin de evitar la penetración de la onda, intercalamos entre el aire y el substrato un sandwich formado por dos capas dieléctricas de espesor $\lambda/4$ y permitividades $\epsilon_r = 2$ y $\epsilon_r = 12$, respectivamente. En el caso peor, encuentre el porcentaje de potencia transmitida.

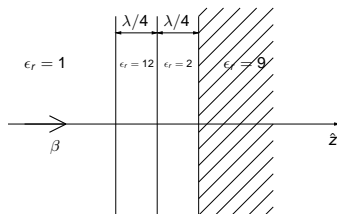


Figura: Problema de onda plana con varios medios.

Aplicación de los conceptos estudiados

El caso peor sucede cuando la onda incide normalmente al dieléctrico.

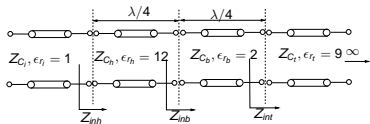


Figura: Modelo de línea de transmisión del problema.

$$Z_{Ci} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}} = Z_0$$

$$Z_{Ch} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{rh}}} = \frac{Z_0}{\sqrt{12}}$$

$$Z_{Cb} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{rb}}} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}}$$

$$Z_{Ct} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{rt}}} = \frac{Z_0}{\sqrt{9}} = \frac{Z_0}{3}$$

Potencia Transmitida Sandwich

Impedancia en un transformador en $\lambda/4$:

$$Z_{int} = Z_{ct} = \frac{Z_0}{3}$$

$$Z_{inb} = \frac{Z_{cb}^2}{Z_{int}} = \frac{Z_0^2/2}{Z_{int}}$$

$$Z_{inh} = \frac{Z_{ch}^2}{Z_{inb}} = \frac{Z_0^2/12}{Z_{inb}}$$

Introduciendo Z_{inb} obtengo:

$$Z_{inh} = \frac{Z_0^2/12}{Z_0^2/2} Z_{int} = \frac{2}{12} Z_{int} = \frac{Z_{int}}{6}$$

Cada sandwich reduce la impedancia de entrada de un factor 6. Finalmente:

$$Z_{inh} = \frac{Z_{int}}{6} = \frac{Z_0/3}{6} = \frac{Z_0}{18}$$

El **coeficiente de reflexión** en la primera interfaz será:

$$\rho = \frac{Z_{inh} - Z_{Ci}}{Z_{inh} + Z_{Ci}} = \frac{Z_0/18 - Z_0}{Z_0/18 + Z_0} = \frac{1/18 - 1}{1/18 + 1} = \frac{-17}{19} = -0,89$$

Finalmente, $|\rho|^2 = 0,79, 79\%$. El 79% de la potencia es reflejada, lo que no está nada mal.

Aplicación de los conceptos estudiados

¿Cuántos sandwiches debemos poner para que la potencia reflejada sea superior al 99 % con un sandwich?

$$Z_{inh} = \frac{Z_{int}}{6}$$

Con el sandwich

$$Z_{inh} = \frac{Z_{int}}{6^N} = \frac{Z_0}{3(6)^N}$$

Queremos que: $|\rho|^2 = 0,99$,
 $\rho = \pm\sqrt{0,99} = \pm 0,995$. De esta forma:

$$\rho = \frac{Z_{inh} - Z_0}{Z_{inh} + Z_0} = \frac{3^{-1}(6)^{-N} - 1}{3^{-1}(6)^{-N} + 1} = \pm 0,995$$

$$1 - 3 \cdot 6^N = -0,995(1 + 3 \cdot 6^N)$$

$$1 - 3 \cdot 6^N = -0,995 - 2,985 \cdot 6^N$$

$$1 + 0,995 = (3 - 2,985) 6^N$$

$$1,995 = 0,015 \cdot 6^N$$

$$6^N = \frac{1,995}{0,015}$$

$$N \log 6 = \log \frac{1,995}{0,015}$$

$$N = \frac{\log 1,995/0,015}{\log 6} = \frac{4,89}{1,79} = 2,73$$

Finalmente redondeando,

$$N = 3 \quad \text{Sandwiches}$$