

Ondas Electromagnéticas

Bloque III. Ondas Planas

Fernando D. Quesada Pereira¹

David Cañete Rebenaque¹

Alejandro Álvarez Melcón¹

Leandro Juan Llácer¹

¹Grados en Ingeniería Telemática y en Sistemas de Telecomunicación
Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Universidad Politécnica de Cartagena

7 de enero de 2014

Índice de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Solución de la ecuación de onda
 - Cálculo del campo magnético
- 3 Polarización de los campos electromagnéticos
 - Polarización elíptica
 - Polarización lineal
 - Polarización circular
 - Cálculo de los ejes de la elipse para polarización elíptica
 - Ejemplo de cálculo de polarización
 - Descomposición en dos polarizaciones lineales
 - Descomposición en dos polarizaciones circulares
- 4 Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico
 - Resolución directa con ondas planas
 - Resolución con modelo de línea de transmisión
- 5 Incidencia de una onda sobre un conductor no perfecto
- 6 Incidencia oblicua de ondas sobre un dieléctrico
 - Problema con polarización
 - Leyes de Snell
 - Polarización paralela

Introducción a las ondas planas

Ondas Planas

- Problema de una **antena conectada a un transmisor** y ver como pueden generarse **ondas de radio**.
- Siempre que existan **interacciones eléctricas** la respuesta se encuentra en las **ecuaciones de Maxwell**.

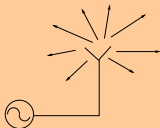


Figura: Onda radiada por una antena

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Ondas Planas

La antena tiene una **densidades de corriente inducidas** \vec{J} que son las que producen los **campos electromagnéticos en nuestra estructura**. Cerca de la antena el problema a resolver está caracterizado por las Ec. Maxwell completas **Lejos de la antena ya no existirán las fuentes del campo**, luego podemos poner $\vec{J} = 0$.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Ahora podremos tener todas las componentes de los campos y todas las variaciones posibles con respecto a (x, y, z) , luego este es un **problema vectorial en derivadas parciales**. El problema está sujeto a las **condiciones de contorno de la geometría**. Supondremos **espacio libre** para **simplificar** al máximo las condiciones de contorno.

Cálculo Campo Eléctrico

Tomo rotacionales en la ley de Faraday.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu(\nabla \times \vec{H})$$

Aplicamos la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}:$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \vec{H})$$

Pero $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (ley de Gauss) en un medio isótropo y homogéneo,

$$-\nabla^2 \vec{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \vec{H})$$

Introduciendo en la ecuación anterior,

$$-\nabla^2 \vec{E} = -j\omega\mu(j\omega\epsilon)\vec{E} = \omega^2\mu\epsilon\vec{E}$$

Cálculo Campo Eléctrico

Definimos la constante $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$, ya es conocida por nosotros y la llamamos **constante de propagación del medio**.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

La expresión anterior se trata de una ecuación vectorial en derivadas parciales, tenemos una ecuación por cada componente del campo eléctrico, por ejemplo para la **componente x**:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

Vamos a usar el **método de separación de variables en coordenadas rectangulares** para resolver la ecuación en derivadas parciales.

Resolución de la ecuación de onda

Método de separación de variables

Suponemos que E_x puede expresarse como el **producto de tres funciones**, cada una **dependiendo de una sola coordenada**, esto sólo será cierto para determinadas geometrías. Como estamos en espacio libre veremos que sí que será cierto. Introduciremos en la **ecuación en derivadas parciales**:

$$G(y)H(z)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + F(x)H(z)\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} + F(x)G(y)\frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} + k^2 F(x)G(y)H(z) = 0$$

Divido toda la ecuación por $F(x)G(y)H(z)$ resultando:

$$\frac{1}{F(x)} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} + \frac{1}{G(y)} \frac{d^2 G(y)}{dy^2} + \frac{1}{H(z)} \frac{d^2 H(z)}{dz^2} + k^2 = 0$$

Para que la relación anterior pueda ser cero para todo (x, y, z) , **cada sumando debe ser igual a una constante**.

Método de separación de variables

$$\frac{1}{F(x)} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{G(y)} \frac{d^2 G(y)}{dy^2} = -k_y^2$$

$$\frac{1}{H(z)} \frac{d^2 H(z)}{dz^2} = -k_z^2$$

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Las ecuaciones que quedan son **ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden cuya solución conocemos** y son del mismo tipo que encontramos para cada línea de transmisión.

$$F(x) = A_x e^{-jk_x x} + B_x e^{jk_x x}$$

$$G(y) = A_y e^{-jk_y y} + B_y e^{jk_y y}$$

$$H(z) = A_z e^{-jk_z z} + B_z e^{jk_z z}$$

Resolución de la ecuación de onda

Solución Campo Eléctrico

En las expresiones previas tenemos ondas que se propagan según el eje x con constante de propagación k_x . Del **polinomio característico** de la ecuación diferencial resulta

$$x^2 + k_x^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = -k_x^2 \quad ; \quad x = \pm jk_x$$

Las **constantes** se calculan imponiendo las **condiciones de contorno**. Como estamos en **espacio libre no existirá onda reflejada** en ninguna dirección $B_x = B_y = B_z = 0$. Entonces la componente E_x del campo eléctrico será:

$$E_x(x, y, z) = F(x)G(y)H(z) = A_x A_y A_z e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z}$$

Se define la constante $C_x = A_x A_y A_z$ de forma que tenemos:

$$E_x(x, y, z) = C_x e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\vec{k} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y + k_z \hat{e}_z$$

$$\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$$

\vec{r} es el **vector de posición** de un punto cualquiera en cartesianas.

Solución Campo Eléctrico

Podemos escribir de forma compacta:

$$E_x(x, y, z) = C_x e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

El término \vec{k} es ahora un vector que se llama **vector de propagación**, vemos su módulo.

$$|\vec{k}|^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = |\vec{k}|^2$$

Vemos que \vec{k} es un vector cuyo **módulo da la constante de propagación de la onda**, y cuya dirección da la **dirección en la que se propaga la onda**.

$$\vec{k} = |\vec{k}| \hat{e}_k$$

El término \vec{k} al ser un vector se puede escribir con su notación módulo-dirección. Luego la expresión previa corresponde a una **onda que se propaga en la dirección \hat{e}_k** . **No existe onda reflejada** porque nos encontramos en **espacio libre**.

Resolución de la ecuación de onda

Campo eléctrico para el resto de coordenadas

De la misma manera podemos obtener las **otras componentes del campo eléctrico** si repetimos todo el proceso obtenemos:

$$E_y(x, y, z) = C_y e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$E_z(x, y, z) = C_z e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Veamos ahora como queda el **campo eléctrico total**:

$$\vec{E} = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z = (C_x \hat{e}_x + C_y \hat{e}_y + C_z \hat{e}_z) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Luego el carácter vectorial está en la constante:

$$\vec{C} = C_x \hat{e}_x + C_y \hat{e}_y + C_z \hat{e}_z$$

De este modo escribimos:

$$\vec{E} = \vec{C} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

La expresión tiene la misma forma que la tensión en una línea de transmisión infinita. Además, refleja claramente un campo vectorial propagándose en dirección \hat{e}_k con la constante de propagación $|\vec{k}| = k$. **La propagación es entonces del mismo tipo que en una línea de transmisión.**



Obtención del campo magnético

Campo magnético

Partiendo de la ley de Faraday tenemos:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}(\nabla \times \vec{E})$$

Introduciendo el valor para el campo eléctrico que hemos hallado:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[\nabla \times (\vec{C}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right]$$

Ahora usamos la relación vectorial:

$$\nabla \times (f\vec{C}) = (\nabla f \times \vec{C}) + f(\nabla \times \vec{C})$$

Pero \vec{C} en nuestro caso es un vector constante, por lo que toda la variación está fuera de \vec{C} , luego $\nabla \times \vec{C} = 0$.

Campo magnético

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[(\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) \times \vec{C} \right]$$

Vamos a calcular el gradiente de esta función escalar:

$$\begin{aligned}(\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right) \\ &e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} \\ &= -jk_x e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} \hat{e}_x \\ &+ e^{-jk_x x} (-jk_y) e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} \hat{e}_y \\ &+ e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} (-jk_z) e^{-jk_z z} \hat{e}_z \\ &= (-jk_x \hat{e}_x - jk_y \hat{e}_y - jk_z \hat{e}_z) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= -j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j|\vec{k}|\hat{e}_k e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\end{aligned}$$

Campo magnético

Introduciendo $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ en la ecuación de \vec{H} obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu}(-j)k(\hat{e}_k \times \vec{C} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) \\ &= \frac{k}{\omega\mu}(\hat{e}_k \times \vec{E}) = \frac{1}{\omega\mu/k}(\hat{e}_k \times \vec{E})\end{aligned}$$

y llamamos $Z_c = \frac{\omega\mu}{k}$. De este modo,

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_c}(\hat{e}_k \times \vec{E})$$

A $Z_c = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\mu/\epsilon}$ se le llama **impedancia intrínseca del medio** y se ve que es la **impedancia característica de una línea de transmisión equivalente**. Si consideramos el campo eléctrico como una onda de tensión y el campo magnético como una onda de corriente. Z_c es la impedancia característica en una línea de transmisión.

Onda como línea de Tx equivalente

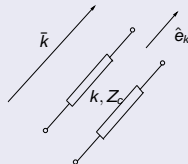


Figura: Propagación de una onda como línea de transmisión equivalente

La propagación de una onda de este tipo puede modelarse con una **línea de transmisión dirigida según \hat{e}_k** (dirección de propagación de la onda) y con la **constante de propagación k** e **impedancia característica Z_c** .

Relación campo eléctrico-magnético

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_c} (\hat{e}_k \times \vec{E})$$

Transformando esta ecuación al **dominio del tiempo** nos dice que \vec{H} es **perpendicular a la dirección de propagación y a \vec{E}** . De la ecuación de la divergencia, además, obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{C}e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = 0$$

Hacemos uso de la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (f\vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla f) + f(\nabla \cdot \vec{C})$$

donde \vec{C} es constante, luego $\nabla \cdot \vec{C} = 0$, por tanto:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \vec{C} \cdot (\nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = -j\vec{k} \cdot \vec{C}e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

luego $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, si transformamos esta ecuación en el **dominio temporal**, la condición dice que \vec{E} es **perpendicular a la dirección de propagación**.

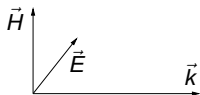


Figura: El campo eléctrico y el magnético son **transversales a la dirección de propagación \vec{k}**

Típica onda, es transversal, como además \vec{E} y \vec{H} son transversos a \vec{k} , también se llama **onda TEM (transversa eléctrica y magnética)**.

Modelo onda plana

El **modelo de onda plana sólo es válido lejos de la antena**, cerca de la antena hay que resolver otras ecuaciones donde aparecen (\vec{J}, ρ) las fuentes del campo. No lo vamos a hacer pero lo que ocurre cerca de la antena es que la onda radiada es esférica. ¿Por qué se llama onda plana y onda esférica?

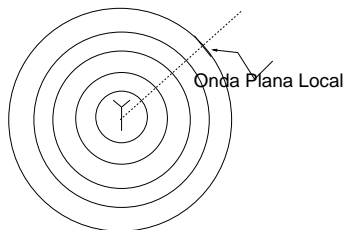


Figura: Una onda esférica de forma local se puede aproximar por una onda plana

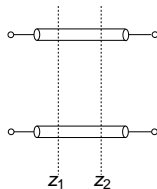


Figura: Todos los puntos en $z = z_1$ tienen la misma fase. Para cambiar de fase nos desplazamos a $z = z_2$. La fase cambia y todos los puntos del mismo plano tienen la misma referencia

Movimiento de los vectores de campo con el tiempo

Hemos visto el **carácter vectorial de las ondas planas**. El fenómeno de polarización pasa por **estudiar como evoluciona el campo eléctrico y magnético** contenido en el **plano perpendicular** a la dirección de propagación. Puede demostrarse que una **onda plana sinusoidal**, su **campo eléctrico describe una elipse en el plano transversal**.

Hay que tener en cuenta que este es un fenómeno que ocurre con el tiempo, es decir cómo se mueve el campo eléctrico en el plano transversal según pasa el tiempo. Hay **dos efectos** al pasar el tiempo.

- 1 La onda se propaga en la dirección \hat{e}_k .
- 2 Campo eléctrico y magnético se mueven en el plano transversal a la dirección de propagación.

Por tanto, tenemos que ver este campo eléctrico cómo se mueve en el tiempo.

Polarización de ondas

Definición

La **polarización** describe la **evolución temporal** del extremo del vector campo eléctrico y su **sentido de giro** en un plano perpendicular a la dirección de propagación en un punto fijo del espacio, observándolo a lo largo de la dirección de propagación.

En general, la figura geométrica descrita es una elipse, aunque existen casos particulares.

- Clasificación:

Tipo de polarización

Polarización lineal

Polarización circular

Polarización elíptica

Signo de la polarización

—

} \Rightarrow { dextrógira, a derechas o positiva
levógira, a izquierdas o negativa

- Polarización dextrógira: cuando el sentido de giro de $\vec{E}(t)$ aplicando la regla de la mano derecha coincide con \hat{e}_k .
- Polarización levógira: cuando el sentido de giro de $\vec{E}(t)$ aplicando la regla de la mano derecha coincide con $-\hat{e}_k$.

Polarización en ondas planas

Evolución temporal del campo

Nosotros tenemos una **onda incidente** del tipo:

$$\vec{E} = \vec{C}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_{re} + j\vec{E}_{im} \text{ Compleja, con parte real e imaginaria}$$

Esto es en el **dominio de la frecuencia**. Ahora debemos encontrar este campo en el **dominio del tiempo**.

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) &= \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}] = \text{Re}[(\vec{E}_{re} + j\vec{E}_{im})e^{j\omega t - j\vec{k}\cdot\vec{r}}] \\ &= \text{Re}[(\vec{E}_{re} + j\vec{E}_{im})(\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + j\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}))] = \vec{E}_{re}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) - \vec{E}_{im}\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\end{aligned}$$

La expresión anterior es la forma general de un **campo sinusoidal en el tiempo**.

Vamos a representar el vector **campo eléctrico para distintos instantes de tiempo** (T periodo temporal, $f = 1/T$).

$$t = 0 \quad ; \quad \omega t = 0 \quad ; \quad \vec{E}(t = 0) = \vec{E}_{re}$$

$$t = T/4 \quad ; \quad \omega t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \vec{E}(t = T/4) = -\vec{E}_{im}$$

$$t = T/2 \quad ; \quad \omega t = \pi \quad ; \quad \vec{E}(t = T/2) = -\vec{E}_{re}$$

$$t = 3T/4 \quad ; \quad \omega t = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad \vec{E}(t = 3T/4) = \vec{E}_{im}$$

Representación polarización elíptica

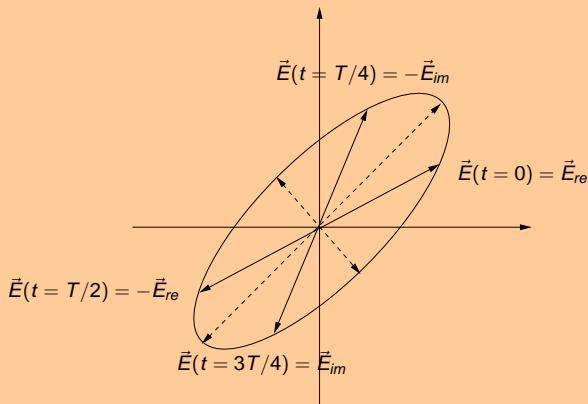


Figura: Campo eléctrico con polarización elíptica.

En general el **campo eléctrico describe una elipse en el plano transversal a la dirección de propagación**(polarización elíptica).

Polarización lineal

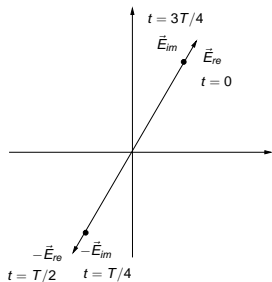


Figura: Campo eléctrico con polarización lineal ($\vec{E}_{im} = \vec{E}_{re}$).

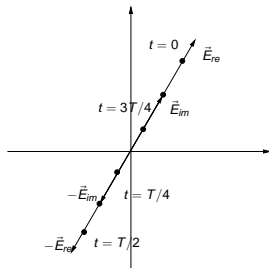


Figura: Campo eléctrico con polarización lineal con ($\vec{E}_{im} \neq \vec{E}_{re}$).

Veamos que ocurre si $\vec{E}_{im} = \vec{E}_{re}$. La elipse degenera en una recta (**polarización lineal**). La polarización lineal puede ocurrir si $\vec{E}_{im} \neq \vec{E}_{re}$ pero sus direcciones son las mismas, también es polarización lineal. Es decir, $\vec{E}_{im} \times \vec{E}_{re} = 0$, son **vectores colineales**.

Polarización circular

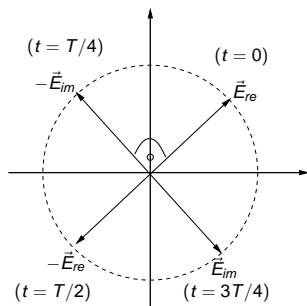


Figura: Campo eléctrico con polarización circular ($|\vec{E}_{im}| = |\vec{E}_{re}|$).

Finalmente vemos que ocurre si $\vec{E}_{im} \neq \vec{E}_{re}$ pero $|\vec{E}_{im}| = |\vec{E}_{re}|$.

$|\vec{E}_{im}|$ **tiene una dirección distinta a \vec{E}_{re} pero sus módulos son los mismos.** Es decir, $|\vec{E}_{im}| = |\vec{E}_{re}|$, $\vec{E}_{im} \times \vec{E}_{re} \neq 0$, se trata de una **polarización circular**. Además, como los vectores perpendiculares se cumple que $\vec{E}_{im} \cdot \vec{E}_{re} = 0$.

Ejes de la elipse para polarización elíptica

El único problema está en calcular los ejes de la elipse en el caso de **polarización elíptica**. Para ello vamos a calcular el **instante de tiempo** $t = \tau$ en el que el módulo del **campo eléctrico** pasa por un **máximo**, este instante de tiempo corresponde al paso por el eje mayor de la elipse.

Ejes polarización elíptica

$$\begin{aligned} |\vec{E}(t)|^2 &= \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(t) = (\vec{E}_{re} \cos(\omega t) - \vec{E}_{im} \sin(\omega t)) \cdot \\ &(\vec{E}_{re} \cos(\omega t) - \vec{E}_{im} \sin(\omega t)) = |\vec{E}_{re}|^2 \cos^2(\omega t) + \\ &|\vec{E}_{im}|^2 \sin^2(\omega t) - 2\vec{E}_{re} \cdot \vec{E}_{im} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Ahora para calcular el máximo hallamos la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\vec{E}(t)|^2}{\partial t} &= |\vec{E}_{re}|^2 2 \cos(\omega t) (-\sin(\omega t)) \omega \\ &+ |\vec{E}_{im}|^2 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \omega \\ &- 2\vec{E}_{re} \cdot \vec{E}_{im} [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)] \omega = 0 \end{aligned}$$

Para $t = \tau$ esto debe ser cero.

$$\begin{aligned} \{ |\vec{E}_{im}|^2 - |\vec{E}_{re}|^2 \} 2 \sin(\omega \tau) \cos(\omega \tau) = \\ 2\vec{E}_{re} \cdot \vec{E}_{im} [\cos^2(\omega \tau) - \sin^2(\omega \tau)] \end{aligned}$$

Ejes polarización elíptica

Sabemos de las relaciones trigonométricas que:

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$(|\vec{E}_{im}|^2 - |\vec{E}_{re}|^2) \sin(2\omega\tau) = 2\vec{E}_{re} \cdot \vec{E}_{im} \cos(2\omega\tau)$$

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{2\vec{E}_{re} \cdot \vec{E}_{im}}{|\vec{E}_{im}|^2 - |\vec{E}_{re}|^2}$$

Ahora vemos que el eje menor forma $\pi/2$, luego si $t = \tau$ tenemos el máximo (eje mayor) en $t = \tau + T/4$ tendremos el mínimo (podría ser al revés).

$$\omega(\tau + T/4) = \omega\tau + \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = \omega\tau + \frac{\pi}{2}$$

De la relación anterior resulta que **el eje mayor y menor son ortogonales**.

Ejemplo de cálculo de la polarización (Ej.1)

Cálculo de polarización

Sea una onda plana dada por su campo eléctrico que se propaga en espacio libre.

$$\vec{E} = (1 + j) \hat{e}_x - j\hat{e}_y = [(1 + j)\hat{e}_x - j\hat{e}_y] e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

En primer lugar hay que tener en cuenta que una onda plana tiene por **expresión general**:

$$\vec{E} = \vec{C} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \text{ Onda incidente}$$

Luego si nos dan un vector constante lo que realmente nos están dando es \vec{C} y el término de propagación se omite porque es siempre el mismo. La onda se **evalúa en el origen** $\vec{r} = 0$.

$$\vec{C} = (1 + j)\hat{e}_x - j\hat{e}_y$$

$$\vec{E} = \vec{C} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Cálculo de polarización

Podemos ver que pasa con esta onda en $\vec{r} = 0$.

$$\vec{E} = \vec{C}$$

Vamos a **separar parte real e imaginaria**.

$$\vec{E} = \hat{e}_x + j(\hat{e}_x - \hat{e}_y)$$

$$\vec{E}_{re} = \hat{e}_x$$

$$\vec{E}_{im} = \hat{e}_x - \hat{e}_y$$

Vamos a ver que tipo de polarización tiene esta onda. Calculamos el producto vectorial.

$$\vec{E}_{im} \times \vec{E}_{re} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-\hat{e}_z) = \hat{e}_z \neq 0$$

Ejemplo de cálculo de la polarización (Ej.1)

Cálculo de polarización

Vemos que $\vec{E}_{re} \times \vec{E}_{im} \neq 0$, luego la polarización **no es lineal**. Calculamos los módulos.

$$|\vec{E}_{re}| = 1$$

$$\vec{E}_{im} \cdot \vec{E}_{im} = |\vec{E}_{im}|^2 = 1+1 = 2; |\vec{E}_{im}| = \sqrt{2}$$

Luego $|\vec{E}_{re}| \neq |\vec{E}_{im}|$, resultando que la polarización **no es circular**. Por tanto, la polarización debe ser elíptica. Vamos a calcular los ejes de la elipse. El **instante en el que el campo eléctrico pasa por un máximo** es:

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{2\vec{E}_{im} \cdot \vec{E}_{re}}{|\vec{E}_{im}|^2 - |\vec{E}_{re}|^2} = \frac{2 \cdot 1}{2 - 1} = 2$$

Igualando,

$$2\omega\tau = \text{atan}(2) = 1,11 \text{ (rad)}$$

$$\omega\tau = 0,55 \text{ (rad)}$$

Cálculo de polarización

Ahora calculamos el campo eléctrico en este instante de tiempo ($t = \tau$).

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_{re} \cos(\omega t) - \vec{E}_{im} \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\tau) &= \hat{e}_x \cos(0,55) - (\hat{e}_x - \hat{e}_y) \sin(0,55) \\ &= \hat{e}_x 0,85 - (\hat{e}_x - \hat{e}_y) 0,52 = \hat{e}_x 0,33 + 0,52 \hat{e}_y\end{aligned}$$

El otro eje estará en $t = (\tau + T/4)$.

$$\begin{aligned}\omega(\tau + T/4) &= \omega\tau + \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = \omega\tau + \pi/2 \\ &= 0,55 + 1,57 = 2,12 \text{ (rad)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\tau + T/4) &= \hat{e}_x \cos(2,12) - (\hat{e}_x - \hat{e}_y) \sin(2,12) \\ &= -\hat{e}_x 0,52 - (\hat{e}_x - \hat{e}_y) 0,85 = -1,37 \hat{e}_x + 0,85 \hat{e}_y\end{aligned}$$

Podemos definir los **parámetros** de la elipse **relación axial (RA)** y **ángulo de polarización (Ψ)**:

- $RA = 20 \log_{10} \frac{|\vec{E}_{max}|}{|\vec{E}_{min}|} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{1,37^2 + 0,85^2}}{\sqrt{0,33^2 + 0,52^2}} = 8,36 \text{ dB}$
- $\tan\Psi = \frac{\vec{E}_{ymax}}{\vec{E}_{xmax}} = \frac{0,85}{-1,37} \Rightarrow \Psi = -0,55 \text{ rad} = -31,5^\circ$

Ejemplo de cálculo de la polarización (Ej.1)

Cálculo de polarización

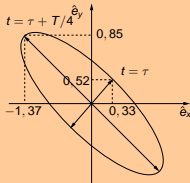


Figura: Campo eléctrico con polarización elíptica. Cálculo de los ejes.

La onda se propaga en \hat{e}_z , el plano transversal es (x, y) . Resulta ser: $\vec{E}(\tau)$ es el eje menor, $\vec{E}(\tau + T/4)$ es el eje mayor. Una comprobación es que **los ejes de la elipse deben ser perpendiculares**, luego:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\tau) \cdot \vec{E}(\tau + T/4) &= 0 \\ (\hat{e}_x 0,33 + 0,52\hat{e}_y)(-1,37\hat{e}_x + 0,85\hat{e}_y) \\ &= -0,45 + 0,45 = 0\end{aligned}$$

Una vez tenemos los ejes de la elipse ya podemos dibujarla.

Cálculo de la polarización

Además podemos ver la **evolución del campo eléctrico con el tiempo**.

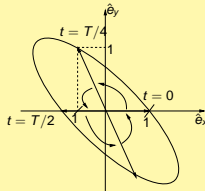


Figura: Campo eléctrico con polarización elíptica. Evolución temporal del campo.

$$\begin{aligned}t = 0 &; \vec{E}(t = 0) = \vec{E}_{re} \\ t = T/4 &; \vec{E}(t = T/4) = -\vec{E}_{im} = -\hat{e}_x + \hat{e}_y \\ t = T/2 &; \vec{E}(t = T/2) = -\vec{E}_{re} \\ t = 3T/4 &; \vec{E}(t = 3T/4) = -\vec{E}_{im}\end{aligned}$$

La polarización es **elíptica con giro a derechas**. También existe la polarización con **giro izquierdas**. Cualquier tipo de polarización puede **descomponerse en la suma de otras dos ondas de polarización distinta**.

Descomposición en suma de dos polarizaciones lineales (Ej.2)

Dos polarizaciones lineales

Descompondremos la polarización de la onda en dos polarizaciones **lineales** y **desfasadas en el tiempo** $\pi/2$. Este es el caso más sencillo.

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_r \cos(\omega t) - \vec{E}_i \sin(\omega t)$$

$$\vec{E}_1(t) = \vec{E}_r \cos(\omega t)$$

$$\vec{E}_2(t) = -\vec{E}_i \sin(\omega t)$$

Las expresiones están **desfasadas noventa grados**.
Las **polarizaciones son lineales** en ambos casos.

$$\vec{E}_1(t) = \hat{e}_x \cos(\omega t)$$

$$\vec{E}_2(t) = -(\hat{e}_x - \hat{e}_y) \sin(\omega t)$$

Cada campo está **polarizado linealmente** y están **desfasados $\pi/2$ en el tiempo**, además:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t).$$

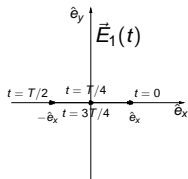


Figura: Descomposición de polarización elíptica en dos lineales, parte $\vec{E}_1(t)$.

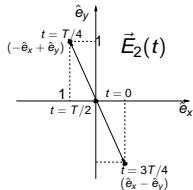


Figura: Descomposición de polarización elíptica en dos lineales, parte $\vec{E}_2(t)$.

Descomposición en dos polarizaciones lineales y perpendiculares (Ej.3)

Dos polarizaciones lineales

No son perpendiculares en el espacio, pero están desfasadas $\pi/2$ en el tiempo. Hay que descomponer en dos polarizaciones lineales y perpendiculares en el espacio.

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) &= \hat{e}_x \cos(\omega t) - (\hat{e}_x - \hat{e}_y) \sin(\omega t) \\ &= \hat{e}_x (\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) + \hat{e}_y \sin(\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(t) &= \hat{e}_x (\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \\ &= \hat{e}_x \cos(\omega t) - \hat{e}_x \sin \omega t\end{aligned}$$

$$\vec{E}_2(t) = \hat{e}_y \sin(\omega t)$$

Tenemos dos polarizaciones lineales y ortogonales.

Además $\vec{E}(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t)$.

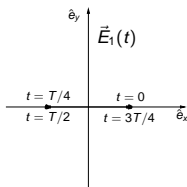


Figura: Descomposición de polarización elíptica en dos lineales ortogonales, parte $\vec{E}_1(t)$.

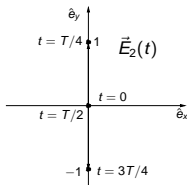


Figura: Descomposición de polarización elíptica en dos lineales ortogonales, parte $\vec{E}_2(t)$.

Onda plana como dos polarizaciones circulares (Ej.4)

Descomposición en polarizaciones circulares

Descomponemos en **dos polarizaciones circulares**, una que gira **a izquierdas** y otra **a derechas**. La forma más fácil de escribir un campo polarizado circularmente es:

$$\vec{E}_1 = \hat{e}_x + j\hat{e}_y$$

Se tienen polarizaciones ortogonales y desfasadas $\pi/2$ en el tiempo (**polarización circular a izquierdas**).

$$\vec{E}_{re1} = \hat{e}_x$$

$$\vec{E}_{im1} = \hat{e}_y$$

Podemos escribir otro campo con una **polarización circular a derechas**.

$$\vec{E}_2 = \hat{e}_x - j\hat{e}_y$$

$$\vec{E}_{re2} = \hat{e}_x$$

$$\vec{E}_{im2} = -\hat{e}_y$$

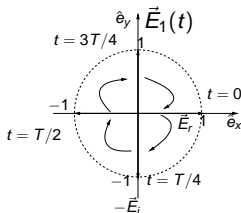


Figura: Descomposición de polarización elíptica en dos circulares, polarización circular a izquierdas $\vec{E}_1(t)$.

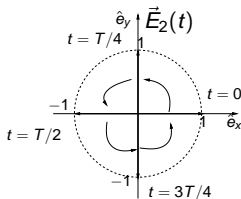


Figura: Descomposición de polarización elíptica en dos circulares, polarización circular a derechas $\vec{E}_2(t)$.

Onda plana como dos polarizaciones circulares (Ej.4)

Se trata de descomponer la onda original en dos **ondas con polarización circular a derechas y a izquierdas**. Luego vamos a expresar:

$$\vec{E} = A\vec{E}_1 + B\vec{E}_2 = A(\hat{e}_x + j\hat{e}_y) + B(\hat{e}_x - j\hat{e}_y) = (A + B)\hat{e}_x + j(A - B)\hat{e}_y = (1 + j)\hat{e}_x - j\hat{e}_y$$

Igualando términos obtenemos $A = j/2$ y $B = 1 + j/2$. Por lo que,

$$\vec{E} = \frac{j}{2}(\hat{e}_x + j\hat{e}_y) + (1 + j/2)(\hat{e}_x - j\hat{e}_y)$$

Comprobemos si sale nuestro campo:

$$\vec{E} = (1 + j)\hat{e}_x - \frac{1}{2}\hat{e}_y - j\hat{e}_y + \frac{1}{2}\hat{e}_y = (1 + j)\hat{e}_x - j\hat{e}_y$$

Finalmente obtenemos nuestro campo. Vemos efectivamente que **una polarización cualquiera puede ser descompuesta en varias ondas de polarización más simple**. Esta es la base teórica de los experimentos que se hicieron con la luz al hacerle atravesar cristales polarizantes separaban la luz en dos componentes polarizadas ortogonalmente.

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución directa con ondas planas

Onda plana normal a un dieléctrico

Vamos a estudiar ahora la propagación de un **onda que incide normalmente a un dieléctrico**. Hay que ver la fase de los campos electromagnéticos.

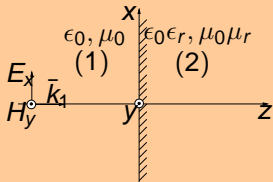


Figura: Propagación de onda plana que incide normalmente a un dieléctrico

Modelo equivalente de línea de transmisión

Sabemos que estas ondas se propagan como en una línea de transmisión, luego el **problema es equivalente al siguiente**.

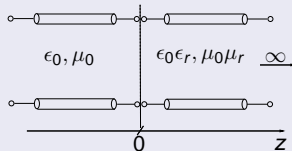


Figura: Modelo de línea de transmisión equivalente al de onda plana.

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución directa con ondas planas

Onda Plana

En la **primera línea** de transmisión ahora si que existirá **onda incidente y reflejada**:

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{C}_i e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{C}_r e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

Como la **segunda línea de transmisión es infinita**, entonces **sólo existe onda incidente**:

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{C}_T e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

El problema de la onda incidente sobre un dieléctrico puede **abordarse de forma vectorial sabiendo que el campo eléctrico es transversa a la dirección de propagación**.

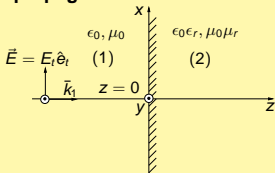


Figura: Propagación de onda plana resuelta de forma vectorial sabiendo que el campo eléctrico es transversa a la dirección de propagación

Modelo de línea equivalente

El campo \vec{E} puede tener cualquier dirección transversa a la dirección de propagación (\hat{e}_t). El problema también puede estudiarse así:

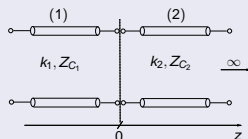


Figura: Modelo de línea de transmisión equivalente al de onda plana.

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución directa con ondas planas

Resolución

En el **medio (1)** tenemos onda incidente y onda reflejada:

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{C}_i e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{C}_r e^{j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$$

En el **medio (2)** sólo hay onda transmitida:

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{C}_T e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

Las **direcciones de los campos son siempre las mismas**. No cambian en este problema, todos los campos están dirigidos según la dirección transversal \hat{e}_t .

$$\vec{C}_i = C_i \hat{e}_t$$

$$\vec{C}_r = C_r \hat{e}_t$$

$$\vec{C}_T = C_T \hat{e}_t$$

Resolución (Medio (1))

Sacando factor común tenemos:

$$\vec{E}^{(1)} = C_i \hat{e}_t \left(e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + \frac{C_r}{C_i} e^{j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \right)$$

$$\rho = \frac{C_r \rightarrow \text{Onda Reflejada}}{C_i \rightarrow \text{Onda Incidente}}$$

Como las direcciones no cambian resulta ser escalar. Es un **coeficiente de reflexión es escalar**.

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución directa con ondas planas

Resolución

De forma similar definimos:

$$\tau = \frac{C_T \rightarrow \text{Onda Transmitida}}{C_i \rightarrow \text{Onda Incidente}}$$

Por tanto ahora escribimos:

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{C}_i \left(e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + \rho e^{j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \right)$$

$$\vec{E}^{(2)} = \tau \vec{C}_i e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

Para obtener el **campo magnético** utilizo:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_c} (\hat{e}_k \times \vec{E})$$

La expresión anterior es **válida sólo para ondas separadas**, no para el campo total.

Campo magnético

Empezamos con el **campo incidente**.

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_{C_1}} [\hat{e}_{k_1} \times \vec{E}_i^{(1)}] = \frac{1}{Z_{C_1}} (\hat{e}_{k_1} \times \vec{C}_i) e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$$

En expresiones anteriores sólo tenemos la **onda incidente**. El campo magnético total se escribirá añadiendo el **campo incidente y reflejado**, teniendo en mente que ahora es como una **corriente en la línea de transmisión**.

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{(\hat{e}_{k_1} \times \vec{C}_i)}{Z_{C_1}} \left(e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} - \rho e^{j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \right)$$

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{\hat{e}_{k_2} \times \vec{C}_i}{Z_{C_2}} \tau e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución directa con ondas planas

Resolución

Para nuestra geometría se tiene:

$$\hat{e}_{k_1} = \hat{e}_{k_2} = \hat{e}_z$$

Las ondas **no cambian de dirección**.

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{\hat{e}_z \times \vec{C}_i}{Z_{C_1}} \left(e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} - \rho e^{j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \right)$$

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{\hat{e}_z \times \vec{C}_i}{Z_{C_2}} \tau e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

De la teoría que sabemos podemos escribir los **vectores de propagación e impedancias características**.

$$\vec{k}_1 = k_0 \hat{e}_z$$

$$\vec{k}_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \hat{e}_z = k_1 \hat{e}_z$$

$$Z_{C_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0$$

$$Z_{C_2} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Resolución

Se tiene que $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, y que

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = k_0 z$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k_1 z$$

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{C}_i \left(e^{-jk_0 z} + \rho e^{jk_0 z} \right)$$

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{C}_i \tau e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{\hat{e}_z \times \vec{C}_i}{Z_{C_1}} \left(e^{-jk_0 z} - \rho e^{jk_0 z} \right)$$

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{\hat{e}_z \times \vec{C}_i}{Z_{C_2}} \tau e^{-jk_1 z}$$

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución directa con ondas planas

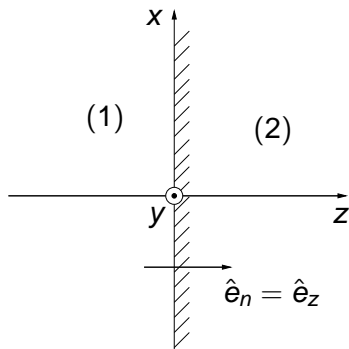


Figura: Condiciones de contorno para el campo en la frontera entre medios

Resolución

Ahora hay que imponer las **condiciones de contorno para el campo eléctrico** (ver la figura).

$$\hat{e}_n \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) \Big|_S = 0$$

$$\hat{e}_z \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) \Big|_{z=0} = 0$$

$$\hat{e}_z \times \vec{E}^{(1)} = (\hat{e}_z \times \vec{C}_i) \left(e^{-jk_0 z} + \rho e^{jk_0 z} \right)$$

$$\hat{e}_z \times \vec{E}^{(2)} = (\hat{e}_z \times \vec{C}_t) e^{-jk_t z}$$

En $z = 0$ deben ser iguales:

$$1 + \rho = \tau$$

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución directa con ondas planas

Resolución

Para el **campo magnético las condiciones** son:

$$\hat{e}_n \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)})|_S = \vec{J}_s$$

Pero **no hay densidades superficiales de corriente**, por tanto:

$$\hat{e}_z \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)})|_{z=0} = 0$$

$$\hat{e}_z \times \vec{H}^{(1)} = \frac{\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \vec{C}_i)}{Z_{C_1}} \left(e^{-jk_0 z} - \rho e^{jk_0 z} \right)$$

$$\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \vec{C}_i) = (\hat{e}_z \cdot \vec{C}_i) \hat{e}_z - \vec{C}_i (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z) = -\vec{C}_i$$

$$\hat{e}_z \times \vec{H}^{(1)} = -\frac{\vec{C}_i}{Z_{C_1}} \left(e^{-jk_0 z} - \rho e^{jk_0 z} \right)$$

$$\hat{e}_z \times \vec{H}^{(2)} = -\frac{\vec{C}_i}{Z_{C_2}} \tau e^{-jk_1 z}$$

Resolución

En $z = 0$ deben ser iguales:

$$-\frac{\vec{C}_i}{Z_{C_1}} (1 - \rho) = -\frac{\vec{C}_i}{Z_{C_2}} \tau$$

Introduciendo τ :

$$\frac{1 - \rho}{Z_{C_1}} = \frac{1 + \rho}{Z_{C_2}}$$

Despejando ρ :

$$\begin{aligned} Z_{C_2} - \rho Z_{C_2} &= Z_{C_1} + \rho Z_{C_1} \\ \rho(Z_{C_1} + Z_{C_2}) &= Z_{C_2} - Z_{C_1} \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Z_{C_2} - Z_{C_1}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} \\ \tau = 1 + \rho &= \frac{2Z_{C_2}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} \end{aligned}$$

Onda plana con incidencia normal a un dieléctrico

Resolución con modelo de línea de transmisión

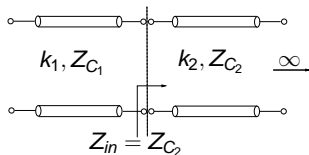


Figura: Modelo de línea de transmisión equivalente al de onda plana.

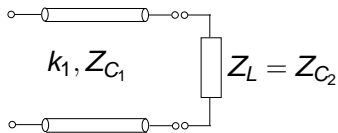


Figura: Modelo de línea de transmisión equivalente al de onda plana. La **segunda** línea de transmisión se reemplaza por una **carga equivalente**.

Resolución

$$\rho = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}}$$

$$\tau = 1 + \rho = \frac{2Z_{C2}}{Z_{C2} + Z_{C1}}$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = k_0$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} = k_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

$$Z_{C1} = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = Z_0$$

$$Z_{C2} = Z_0 \sqrt{\mu_r / \epsilon_r}$$

Incidencia de una onda sobre un conductor no perfecto

- Vamos a ver ahora que sucede si una **onda incide sobre un conductor no perfecto**.
- Sabemos que una **onda incidente en un medio puede modelarse como la propagación de líneas de transmisión**.
- Ahora en el conductor, pondremos una **línea de transmisión con pérdidas**, al tener un **conductor no perfecto**. Sabemos que en una **línea de transmisión con pérdidas** debemos hallar la **función de propagación compleja**.

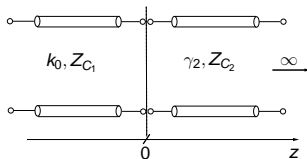
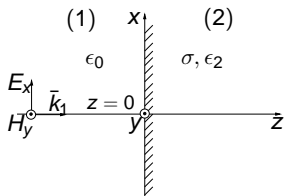


Figura: Propagación de **onda plana** que **incide sobre un conductor no perfecto**.

Figura: **Modelo** de línea de transmisión **equivalente al de onda plana**.

Onda incidente sobre un conductor no perfecto

Análisis (aprox. altas pérdidas)

$$\gamma_2 = j\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} \text{ En el medio (2)}$$

También sabemos que las pérdidas de un medio estaban ligadas al carácter de ϵ_2 . Es decir, pérdidas en el dieléctrico y en el conductor.

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \epsilon'_2 - j\epsilon''_2 - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon'_2 - j\left(\epsilon''_2 + \frac{\sigma}{\omega}\right) \\ &= \epsilon'_2(1 - j\tan\delta)\end{aligned}$$

También sabemos que en el caso más general, $\tan\delta$ llevan las pérdidas tanto en el dieléctrico como en el conductor perfecto. Es decir, sabemos:

$$\tan\delta = \frac{\epsilon''_2 + \frac{\sigma}{\omega}}{\epsilon'_2}$$

Si tenemos un **buen conductor**, entonces $\sigma \gg 1$ (conductividad alta) y entonces $\tan\delta \gg 1$, $\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'_2}$.

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= j\omega\sqrt{\mu_2\epsilon'_2(1 - j\tan\delta)} \\ &= j\omega\sqrt{\mu_2\epsilon'_2}\sqrt{1 - j\tan\delta}\end{aligned}$$

Análisis

Saco factor común ($j\tan\delta$). Sabiendo que $\epsilon'_2 = \epsilon_0\epsilon_r$ y $\mu_2 = \mu_0\mu_r$.

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= j\omega\sqrt{\mu_2\epsilon'_2}\sqrt{j\tan\delta}\sqrt{\frac{1}{j\tan\delta} - 1} \\ &= \omega\sqrt{\mu_2\epsilon'_2}\sqrt{j\tan\delta}\sqrt{1 - \frac{1}{j\tan\delta}}\end{aligned}$$

Pero como $\tan\delta \rightarrow \infty$ entonces $\tan\delta \gg 1$, entonces tenemos la aproximación de buen conductor.

$$\gamma_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon'_2}\sqrt{j\tan\delta}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{j} &= \sqrt{e^{j\pi/2}} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = e^{j\pi/4} \\ &= \cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)\end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon'_2}\tan\delta\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

Onda incidente sobre un conductor no perfecto

Análisis

Usando el valor de $\tan \delta$.

$$\gamma_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2' \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2'}} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + j) = \sqrt{\mu_2 \omega \sigma} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + j)$$

Por otra parte $\omega = 2\pi f$.

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \sqrt{\mu_2 2\pi f \sigma} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + j) = \sqrt{\mu_2 f \pi \sigma} \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + j) \\ &= (1 + j) \sqrt{\mu_2 f \pi \sigma} = \alpha_2 + j\beta_2 \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu_2 f \pi \sigma} \text{ Constante de atenuación}$$

$$\beta_2 = \sqrt{\mu_2 f \pi \sigma} \text{ Constante de fase}$$

Se llama **profundidad de penetración de la onda**:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{\sqrt{\mu_2 f \pi \sigma}} \\ \gamma_2 &= \frac{(1 + j)}{\delta} \end{aligned}$$

Análisis

Tenemos que $\alpha_2 = \frac{1}{\delta}$ es la **constante de atenuación**. Se ve que si $\sigma \uparrow \uparrow$ entonces $\alpha \uparrow \uparrow$. Si $f \uparrow \uparrow$ entonces también $\alpha \uparrow \uparrow$. Por otra parte, $\beta_2 = \frac{1}{\delta}$. En el conductor el campo puede escribirse como:

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{C}_T e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}$$

Tensión de una onda incidente en una línea de transmisión.

Si $\alpha \uparrow \uparrow$ entonces la magnitud del campo decae muy deprisa. Se tiene una atenuación muy fuerte. Las ondas penetran menos cuanto mayor sea σ y mayor sea f .

Onda incidente sobre un conductor no perfecto

Análisis

Queremos ver como se **atenúa el campo eléctrico dentro del conductor**.

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{C}_T e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta}$$

Cuando la onda penetra $z = \delta$ (metros), entonces,

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{C}_T e^{-1} e^{-j}$$

El módulo ha decrecido $(1/e) = 0,368$, es decir ahora es el (36,8 %) del valor inicial. Cuando la onda recorre $z = 10\delta$ entonces

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{C}_T e^{-10} e^{-j10}$$

El campo ha decrecido $(1/e^{10} = 0,004 \%)$, el campo ahora es el 0,004 % de lo que valía en $z = 0$, luego vemos que es prácticamente cero.

Impedancia característica

Para terminar el problema debemos calcular la **impedancia característica de la línea**.

$$Z_{C_2} = \frac{j\omega\mu_2}{\gamma_2} = \frac{j\omega\mu_2\delta}{1+j}$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador.

$$Z_{C_2} = \frac{(1-j)j\omega\mu_2\delta}{2} = \frac{1+j}{2}\omega\mu_2\delta$$

$$Z_{C_2} = \frac{1+j}{2}\omega\mu_2 \frac{1}{\sqrt{\mu_2\pi f\sigma}} = \frac{1+j}{2} \frac{2\pi f\mu_2}{\sqrt{\mu_2\pi f\sigma}}$$

$$Z_{C_2} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu_2}{\sigma}} = (1+j)\frac{\sqrt{\sigma\pi f\mu_2}}{\sigma} = \frac{(1+j)}{\sigma\delta}$$

Onda incidente sobre un conductor no perfecto

Este es el **circuito equivalente**.

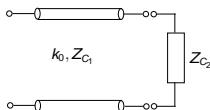


Figura: Modelo circuital equivalente.

La **parte real de Z_{C_2}** tiene que ver con la **potencia media** que entreguemos.

$$R_{C_2} = \frac{1}{\sigma \delta}$$

Vemos que si $\sigma \rightarrow \infty$, $R_{C_2} \rightarrow 0$. Si $R_{C_2} \rightarrow 0$ es difícil entregar potencia activa.

Vemos que Z_{C_2} tiene un ángulo de 45° y tiene **carácter inductivo**.

Si $\sigma = \infty$ tenemos un conductor perfecto, entonces $R_{C_2} = 0$, potencia media entregada cero y además $\delta = 0$, profundidad de penetración nula, la onda no penetra nada.

Este es el problema de las **comunicaciones con un submarino**. El agua del mar tiene una conductividad alta, de modo que $\delta \rightarrow 0$ y la onda penetra a poca profundidad. La solución es bajar la frecuencia para que δ aumente un poco. Por este motivo **se usan ondas de frecuencias muy bajas**. También se usan **ondas acústicas** que se propagan mejor en el agua (**SONAR**).

Incidencia oblicua de ondas sobre dieléctricos

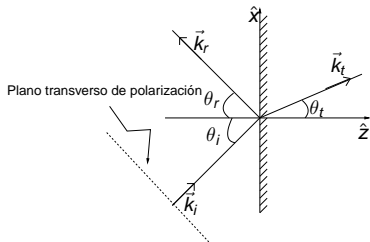


Figura: Incidencia con onda oblicua sobre un dieléctrico. En este caso las **direcciones de las ondas cambian**, por lo que el problema no es tan sencillo como para incidencia normal. En el **plano transverso de polarización se mueve el campo eléctrico**.

Incidencia oblicua en dieléctricos

Para este problema es importante definir el llamado **plano de incidencia**. Un plano está definido por dos rectas. El plano de incidencia queda definido por:

- La normal al dieléctrico.
- El propio rayo incidente.

En nuestro caso el plano de incidencia es el plano del papel.

El campo eléctrico \vec{E}_i puede estar **polarizado de forma elíptica o circular**, de modo que en cada instante de tiempo puede girar en el plano transverso. Estudiar este problema es muy complejo. Sin embargo, nosotros sabemos que **podemos descomponer cualquier tipo de polarización en dos polarizaciones lineales y ortogonales en el espacio**. Vamos a escoger estos dos tipos de polarizaciones.

Incidencia oblicua de ondas sobre dieléctricos

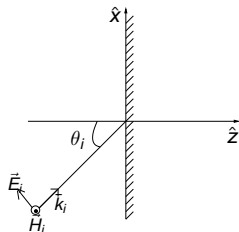


Figura: El campo eléctrico incidente está contenido en el plano de incidencia, se trata de **polarización paralela**.

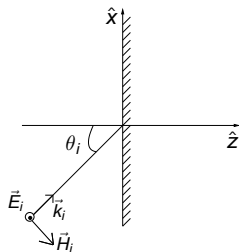


Figura: El campo eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia, se trata de **polarización perpendicular**.

Si el campo eléctrico incidente está contenido en el plano de incidencia tenemos **polarización paralela**. Por otra parte, si el campo eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia tenemos **polarización perpendicular**. Vamos a estudiar estos dos casos, puesto que **cualquier onda podrá descomponerse en dos ondas con estos tipos de polarizaciones**.

Polarización paralela

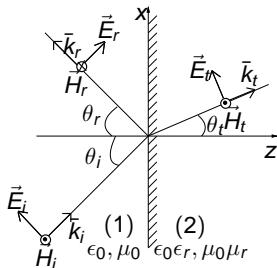


Figura: Resolución del problema de incidencia oblicua con **polarización paralela**.

Análisis

Como \vec{H} es la corriente, la onda reflejada sufre 180° de desfase con respecto a la onda incidente.

$$\vec{k}_i = k_i \hat{e}_{k_i} = k_0 \hat{e}_{k_i}$$

$$\vec{k}_r = k_r \hat{e}_{k_r} = k_0 \hat{e}_{k_r}$$

$$\vec{k}_t = k_t \hat{e}_{k_t} = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \hat{e}_{k_t}$$

Trabajando en un sistema cartesiano, vamos a hallar las componentes de los **vectores unitarios**:

$$\hat{e}_{k_i} = \cos \theta_i \hat{e}_z + \sin \theta_i \hat{e}_x$$

$$\hat{e}_{k_r} = -\cos \theta_r \hat{e}_z + \sin \theta_r \hat{e}_x$$

$$\hat{e}_{k_t} = \cos \theta_t \hat{e}_z + \sin \theta_t \hat{e}_x$$

Polarización paralela

Análisis

Vamos a escribir el **campo magnético** en primer lugar. Como la corriente en una línea de transmisión. Vemos que el campo magnético sólo tiene componente según el eje y , luego:

$$\vec{H}_i = \hat{e}_y \frac{C_{y_i}}{Z_{C_1}} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \text{Onda incidente en la línea}$$

$$\vec{H}_r = -\hat{e}_y \frac{C_{y_r}}{Z_{C_1}} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \quad \text{Onda reflejada en la línea}$$

El término \vec{k}_r ya lleva el signo negativo dentro. Por otra parte,

$$Z_{C_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0$$

$$Z_{C_2} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

$$\vec{H}_t = \hat{e}_y \frac{C_{y_t}}{Z_{C_2}} e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad \text{Onda transmitida en la línea}$$

Análisis

Vamos a definir unos **coeficientes de reflexión y transmisión** a partir de estas ondas de cortocircuito.

$$\rho_l = \frac{C_{y_r}}{C_{y_i}}$$

$$\tau_l = \frac{C_{y_t}}{C_{y_i}}$$

$$\vec{H}_i = \hat{e}_y \frac{C_{y_i}}{Z_{C_1}} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = H_{y_i} \hat{e}_y$$

$$\vec{H}_r = -\hat{e}_y \frac{C_{y_i}}{Z_{C_1}} \rho_l e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = H_{y_r} \hat{e}_y$$

$$\vec{H}_t = \hat{e}_y \frac{C_{y_i}}{Z_{C_2}} \tau_l e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} = H_{y_t} \hat{e}_y$$

Análisis

Haciendo el **producto escalar**:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = k_0(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)$$

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = k_0(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)$$

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_t(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)$$

Imponemos la **continuidad de las componentes tangenciales** del campo magnético. No hay corrientes de superficie.

$$\hat{e}_z \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

$$\hat{e}_z \times \vec{H}_2 = \hat{e}_z \times \vec{H}_1$$

Análisis

La componente y es tangencial al dieléctrico luego:

$$H_{y_i}(z=0) + H_{y_r}(z=0) = H_{y_t}(z=0)$$

$$\frac{C_{y_i}}{Z_{C_1}} e^{-jk_0 x \sin \theta_i} - \frac{C_{y_i}}{Z_{C_1}} \rho_l e^{-jk_0 x \sin \theta_r}$$

$$= \frac{C_{y_i}}{Z_{C_2}} \tau_l e^{-jk_t x \sin \theta_t}$$

Esta ecuación debe cumplirse para todos los puntos x de la superficie, luego las **tres exponenciales deben ser iguales**.

$$k_0 x \sin \theta_i = k_0 x \sin \theta_r$$

Leyes de Snell

Leyes de Snell

Del estudio anterior resulta que $\theta_i = \theta_r$. Esta es la **ley de reflexión que surge de las leyes de óptica**. Además,

$$k_0 x \sin \theta_i = k_t x \sin \theta_t$$

$$k_0 \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t$$

En las relaciones anteriores tenemos la **ley de refracción de Snell**. Las **leyes de la óptica** también están contenidas en las **ecuaciones de Maxwell**.

$$k_0 \sin \theta_i = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_i = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sin \theta_t$$

La relación previa es otra forma de escribir la **ley de Snell**. Como las exponenciales ahora son iguales queda la condición:

$$\frac{1}{Z_{C_1}} - \frac{\rho_l}{Z_{C_1}} = \frac{\tau_l}{Z_{C_2}}$$

Polarización paralela

Ahora tratamos de obtener el **campo eléctrico**. Sabemos que para la onda incidente:

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_{C_1}} (\hat{e}_{k_i} \times \vec{E}_i)$$

$$(\hat{e}_{k_i} \times \vec{H}_i) = \frac{1}{Z_{C_1}} [\hat{e}_{k_i} \times (\hat{e}_{k_i} \times \vec{E}_i)]$$

Tenemos la relación vectorial:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\hat{e}_{k_i} \times (\hat{e}_{k_i} \times \vec{E}_i) = \hat{e}_{k_i}(\hat{e}_{k_i} \cdot \vec{E}_i) - \vec{E}_i(\hat{e}_{k_i} \cdot \hat{e}_{k_i})$$

$$\vec{E}_i = -Z_{C_1} (\hat{e}_{k_i} \times \vec{H}_i)$$

Calculamos entonces:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{k_i} \times \vec{H}_i &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \\ 0 & H_{y_i} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{e}_x[-H_{y_i} \cos \theta_i] + \hat{e}_z[H_{y_i} \sin \theta_i] \end{aligned}$$

Polarización paralela

Leyes de Snell

$$\vec{E}_i = Z_{C_1} \frac{C_{y_i}}{Z_{C_1}} e^{-jk_i \cdot \vec{r}} (\cos \theta_i \hat{e}_x - \sin \theta_i \hat{e}_z)$$

El **campo reflejado** es:

$$\hat{e}_{k_r} \times \vec{H}_r = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \sin \theta_r & 0 & -\cos \theta_r \\ 0 & H_{y_r} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{e}_x [H_{y_r} \cos \theta_r] + \hat{e}_z [H_{y_r} \sin \theta_r]$$

$$\vec{E}_r = Z_{C_1} \rho_l \frac{C_{y_i}}{Z_{C_1}} e^{-jk_r \cdot \vec{r}} (\cos \theta_r \hat{e}_x + \hat{e}_z \sin \theta_r)$$

Igual para el **campo transmitido**:

$$\hat{e}_{k_t} \times \vec{H}_t = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \sin \theta_t & 0 & \cos \theta_t \\ 0 & H_{y_t} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{e}_x [-H_{y_t} \cos \theta_t] + \hat{e}_z [H_{y_t} \sin \theta_t]$$

Leyes de Snell

$$\vec{E}_t = Z_{C_2} \tau_l \frac{C_{y_i}}{Z_{C_2}} e^{-jk_t \cdot \vec{r}} (\cos \theta_t \hat{e}_x - \hat{e}_z \sin \theta_t)$$

Ahora imponemos la **continuidad de las componentes tangenciales en $z = 0$** . Las componentes tangenciales son x , pero no z , puesto que z es normal al dieléctrico.

$$E_{x_i}(z=0) + E_{x_r}(z=0) = E_{x_t}(z=0)$$

Como en $z = 0$ las exponenciales son iguales obtenemos:

$$C_{y_i} \cos \theta_i + \rho_l C_{y_i} \cos \theta_r = \tau_l C_{y_i} \cos \theta_t$$

Donde como siempre las **impedancias características** tienen los valores:

$$Z_{C_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0$$

$$Z_{C_2} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

$$\theta_r = \theta_i$$

Polarización paralela

Leyes de Snell

Substituyendo τ_l por su valor:

$$\cos \theta_i (1 + \rho_l) = \cos \theta_t \left(\frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1}} - \rho_l \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1}} \right)$$

$$\cos \theta_i + \rho_l \cos \theta_i = \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1}} \cos \theta_t - \rho_l \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1}} \cos \theta_t$$

$$\rho_l \left(\cos \theta_i + \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1}} \cos \theta_t \right) = \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1}} \cos \theta_t - \cos \theta_i$$

$$\rho_l \frac{Z_{C_1} \cos \theta_i + Z_{C_2} \cos \theta_t}{Z_{C_1}} = \frac{Z_{C_2} \cos \theta_t - Z_{C_1} \cos \theta_i}{Z_{C_1}}$$

Obtenemos:

$$\rho_l = \frac{Z_{C_2} \cos \theta_t - Z_{C_1} \cos \theta_i}{Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i}$$

Operando saldrá:

$$\tau_l = \frac{2Z_{C_2} \cos \theta_i}{Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i}$$

Leyes de Snell

$$\frac{1}{Z_{C_1}} - \frac{\rho_l}{Z_{C_1}} = \frac{\tau_l}{Z_{C_2}}$$

Si multiplicamos por Z_{C_1} tenemos:

$$1 - \frac{Z_{C_2} \cos \theta_t - Z_{C_1} \cos \theta_i}{Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i} = \frac{\tau_l}{Z_{C_2}} Z_{C_1}$$

$$\frac{Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i - Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i}{Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i} = \tau_l \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_2}}$$

$$\frac{2Z_{C_1} \cos \theta_i}{Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i} = \tau_l \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_2}}$$

A partir de aquí tenemos:

$$\tau_l = \frac{2Z_{C_2} \cos \theta_i}{Z_{C_2} \cos \theta_t + Z_{C_1} \cos \theta_i}$$

A esto se llama **coeficientes de Fresnel**, utilizados en óptica, y vemos que también están contenidos en las ecuaciones de Maxwell. Estos coeficientes se hallaron experimentalmente haciendo experimentos con la luz sobre lentes dieléctricas.