



## UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

### TITULACIÓN: INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN

### CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS (2º CURSO)

Examen final: 19 de Junio de 2008

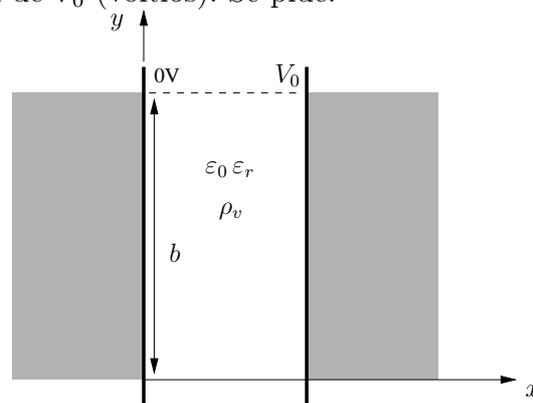
Profesores: Alejandro Álvarez Melcón, Fernando Quesada Pereira

### Puntuación: (10.0 puntos)

No se permite tener en la mesa ningún tipo de apuntes ni libros durante el examen. Deje su carné de estudiante o DNI en un lugar bien visible sobre la mesa. *No olvide poner el nombre en todas las hojas.* Tiempo 3 horas.

### Problema 1: (3.5 puntos)

Tenemos un condensador de placas paralelas, y en la zona interior se sitúa un semiconductor con una densidad de carga distribuida en el volumen  $\rho_v = 2x \text{ C/m}^3$ . Para las simetrías del campo puede considerar las placas infinitas a lo largo de los ejes  $y, z$ . Entre las placas se aplica una diferencia de potencial de  $V_0$  (voltios). Se pide:



**Figura 1:** Condensador de placas paralelas con densidad de carga en el interior.

- a) Calcular el potencial y el campo eléctrico en el interior del condensador usando métodos diferenciales (1.5p).

Dentro si hay carga, por lo que tendremos que utilizar la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1)$$

Como  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ;  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ;  $\phi = \phi(x)$ ; tenemos la ecuación común:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{2x}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (2)$$

Integrando una vez:

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{2}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{x^2}{2} + A = -\frac{x^2}{\epsilon_0 \epsilon_r} + A \quad (3)$$

Integrando dos veces:

$$\phi = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{x^3}{3} + Ax + B \quad (4)$$

donde A y B son las constante de integración.

Ahora imponemos las condiciones de contorno en las paredes del condensador:

$$\phi(x = 0) = B = 0 \quad (5)$$

$$\phi(x = a) = -\frac{a^3}{3\varepsilon_o\varepsilon_r} + A \cdot a = V_0$$

$$A \cdot a = V_0 + \frac{a^3}{3\varepsilon_o\varepsilon_r}$$

$$A = \frac{V_0}{a} + \frac{a^2}{3\varepsilon_o\varepsilon_r}$$

Luego,

$$\phi = -\frac{x^3}{3\varepsilon_o\varepsilon_r} + \left( \frac{V_0}{a} + \frac{a^2}{3\varepsilon_o\varepsilon_r} \right) x \quad (6)$$

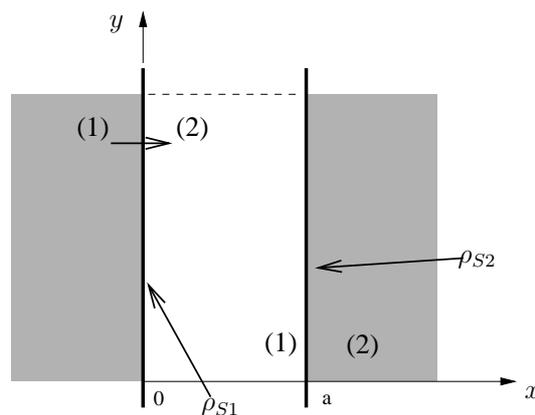
Ahora,

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (7)$$

$$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dx}\hat{e}_x = \frac{3x^2}{3\varepsilon_o\varepsilon_r} - \left( \frac{V_0}{a} + \frac{a^2}{3\varepsilon_o\varepsilon_r} \right) \hat{e}_x V/m$$

- b) Calcular la carga inducida en las placas metálicas del condensador por unidad de longitud (1.0p).

Podemos imponer las condiciones de contorno en  $x = 0$ , y en  $x = a$ , para sacar la carga en cada placa de metal:



**Figura 2**

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{x=0} &= \rho_{S1} \\ \vec{D}_1 &= 0 \\ - \underbrace{\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x}_1 \varepsilon_o \varepsilon_r \left( \frac{V_o}{a} + \frac{a^2}{3\varepsilon_o \varepsilon_r} \right) &= \rho_{S1} \\ \rho_{S1} &= -\frac{V_o}{a} \varepsilon_o \varepsilon_r - \frac{a^2}{3} \end{aligned} \quad (8)$$

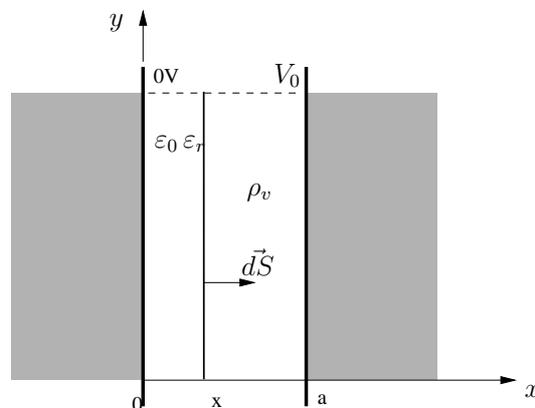
En la otra parte tendremos:

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{x=a} &= \rho_{S2} \\ \vec{D}_2 &= 0 \\ - \varepsilon_o \varepsilon_r \underbrace{\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x}_1 \left( \frac{a^2}{\varepsilon_o \varepsilon_r} - \frac{V_o}{a} - \frac{a^2}{3\varepsilon_o \varepsilon_r} \right) &= \rho_{S2} \\ - \varepsilon_o \varepsilon_r \left( \frac{2}{3} \frac{a^2}{\varepsilon_o \varepsilon_r} - \frac{V_o}{a} \right) &= \rho_{S2} \\ \rho_{S2} &= \frac{V_o}{a} \varepsilon_o \varepsilon_r - \frac{2}{3} a^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Carga inducida en la superficie de las dos placas paralelas:

$$\begin{aligned} Q_{S1} &= \int \rho_{S1} dS = -\frac{V_o}{a} \varepsilon_o \varepsilon_r bL - \frac{a^2}{3} bL \\ Q_{S2} &= bL \frac{V_o}{a} \varepsilon_o \varepsilon_r - \frac{2}{3} a^2 bL \end{aligned} \quad (10)$$

c) Volver a calcular el campo eléctrico pero usando el método de Gauss (1.0p).



**Figura 3**



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc} \quad (11)$$

$$Q_{enc} = \int_V \rho_v dv = \int_0^x 2\lambda d\lambda \int_0^b dy \int_0^L dz = b \cdot L2 \frac{\lambda^2}{2} \Big|_0^x = b \cdot Lx^2 \quad (12)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -E_x(x)\hat{e}_x; \quad d\vec{S} = dydz\hat{e}_x \quad (13)$$

Pero también encierra toda la carga en la superficie:

$$Q_{enc} = bLx^2 + Q_{S1} \quad (14)$$

$$Q_{enc} = bLx^2 + \frac{V_o}{a}\varepsilon_0\varepsilon_r bL - \frac{a^2}{3}bL$$
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0\varepsilon_r E_x \int_0^b dy \int_0^L dz \cdot \underbrace{(\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x)}_{=1} = \varepsilon_0\varepsilon_r E_x bL \quad (15)$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_r E_x bL = bLx^2 - \frac{V_o}{a}\varepsilon_0\varepsilon_r bL - \frac{a^2}{3}bL \quad (16)$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_r E_x = x^2 - \frac{V_o}{a}\varepsilon_0\varepsilon_r - \frac{a^2}{3}$$

$$E_x = \frac{x^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} - \frac{V_o}{a} - \frac{a^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\vec{E} = \left( \frac{x^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} - \frac{V_o}{a} - \frac{a^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} \right) \cdot \hat{e}_x \quad (17)$$

Si desconocemos  $Q_{S1}$ , también lo podemos calcular. En este caso tenemos:

$$Q_{enc} = bLx^2 + Q_{S1} \quad (18)$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_r E_x bL = bLx^2 + Q_{S1}$$

$$E_x = \frac{x^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{Q_{S1}}{\varepsilon_0\varepsilon_r bL}$$

$$\vec{E} = \left( \frac{x^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{Q_{S1}}{\varepsilon_0\varepsilon_r bL} \right) \cdot \hat{e}_x$$

## Problema 2: (3.5 puntos)

Se tiene el circuito con dos líneas de transmisión diferentes, tal y como se muestra en la Figura 4. Se pide ( $f = 5\text{GHz}$ ,  $Z_L = 100\ \Omega$ ,  $Z_{c1} = 100\ \Omega$ ,  $Z_{c2} = 50\ \Omega$ ,  $Z_g = 50\ \Omega$ ,  $V_g = 10\ \text{V}$ ):

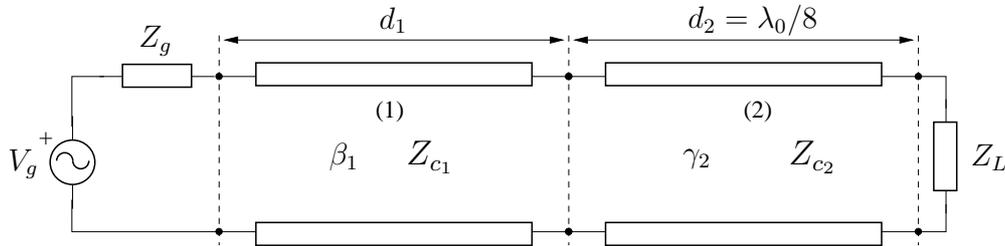


Figura 4: Circuito con líneas de transmisión.

- a) Hallar la longitud de la primera línea ( $d_1$ ) para que en el generador halla un mínimo de tensión. Suponer la línea (2) sin pérdidas (1.0p).

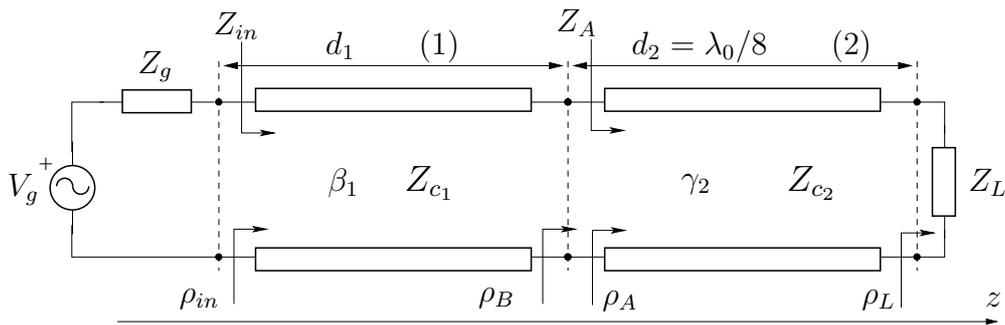


Figura 5

Tenemos que mover el coeficiente de reflexión  $\rho_B$  hasta que corte el eje horizontal negativo.

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_{C2}} = \frac{100}{50} = 2 \quad (19)$$

$$\frac{d_2}{\lambda_0} = \frac{1}{8} = 0,125 \quad (20)$$

hay que moverse hasta:  $0,25 + 0,125 = 0,375$ .

Esto resulta:  $\bar{Z}_{A2} = 0,8 - j0,6$ . Desnormalizamos:

$$Z_A = \bar{Z}_{A2} \cdot Z_{C2} = (0,8 - j0,6) \cdot 50 = 40 - j30\ \Omega \quad (21)$$

Normalizamos respecto de la primera línea:

$$\bar{Z}_{A1} = \frac{Z_A}{Z_{C1}} = \frac{40 - j30}{100} = 0,4 - j0,3 \quad (22)$$

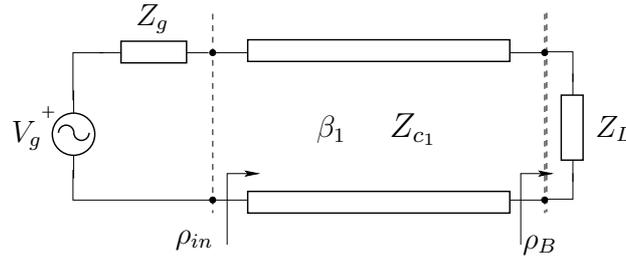


$$P_V = \frac{1}{2} V_o I_o^*; \quad P_V = \frac{1}{2} |I_o|^2 Z_{in} \quad (26)$$

$$I_o = \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}} = \frac{10}{50 + 36} = 0,11628$$

$$P_v = \frac{1}{2} |I_o|^2 Z_{in} = \frac{1}{2} (0,11628)^2 36 = 243,37 \text{ mWatt} \quad (27)$$

Este cálculo también se puede hacer trabajando con la línea:



**Figura 8:** Circuito equivalente con línea de transmisión

$$\rho_B = \frac{Z_A - Z_{C1}}{Z_A + Z_{C1}}; \quad |\rho_B| = 0,46852; \quad (28)$$

$$P_m = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_{C1}} (1 - |\rho_B|^2) \quad (29)$$

$$\rho_{in} = \frac{Z_{in} - Z_{C1}}{Z_{in} + Z_{C1}} = -0,47 \approx -0,46852 \quad (30)$$

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_{C1}}{Z_g + Z_{C1}} = -0,3333 \quad (31)$$

Ahora podemos usar:

$$A = \frac{V_g}{2} \frac{1 - \rho_g}{1 - \rho_{in}\rho_g} = 7,907 \text{ V} \quad (32)$$

$$P_m = \frac{1}{2} \frac{7,907^2}{100} (1 - 0,4685^2) = 243,9 \text{ mWatt} \quad (33)$$

- c) Considere las pérdidas en la línea (2)  $\alpha_2 = 11,6$  (Nep/m). Suponiendo que la línea (1) se diseña para que el generador entregue un potencia de 250 mWatt. ¿Cuanto valdrá la potencia que disipará la carga  $Z_L$ ? (1.5p).

La potencia de 250 mWatt se entrega a la línea (2). En esa línea tenemos:

$$P_m(z) = P_{in}^{(2)} e^{-2\alpha_2 z} (1 - |\rho(z)|^2) \quad (34)$$



En  $z=0$  se entrega la potencia que entrega el generador:

$$P_m(z = 0) = P_{in}^{(2)}(1 - |\rho_A|^2) = 250 \cdot 10^{-3} \text{ Watt} \quad (35)$$

$$\rho_A = \rho_L e^{-2\gamma_2 d_2} = \rho_L e^{-2\alpha_2 d_2} e^{-2j\beta_2 d_2} \quad (36)$$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_{C2}}{Z_L + Z_{C2}} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = 0,3333$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\lambda_2 = 0,125 \cdot 60 \text{mm} = 7,5 \text{ mm} \quad (37)$$

$$|\rho_A| = |\rho_L| e^{-2\alpha_2 d_2} = 0,3333 \cdot e^{-2 \cdot 11,6 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} = 0,3333 \cdot 0,8403 = 0,28 \quad (38)$$

$$P_{in}^{(2)} = \frac{250 \cdot 10^{-3}}{1 - |\rho_A|^2} = \frac{250 \cdot 10^{-3}}{1 - 0,28^2} = 0,27128 \text{ Watt} \quad (39)$$

La potencia a la salida será:

$$\begin{aligned} P_m(z = d_2) &= P_{in}^{(2)} e^{-2\alpha_2 d_2} (1 - |\rho_L|^2) \\ &= 0,27128 e^{-2 \cdot 11,6 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} (1 - 0,3333^2) = 202,6 \text{mWatt} \end{aligned} \quad (40)$$

$$At = \ln \sqrt{\frac{P_m(z = 0)}{P_m(z = d_2)}} = \ln \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_{C2}} (1 - |\rho_A|^2)}{\frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_{C2}} e^{-2\alpha_2 d_2} (1 - |\rho_L|^2)}} = \ln \sqrt{\frac{e^{2\alpha_2 d_2} (1 - |\rho_A|^2)}{(1 - |\rho_L|^2)}} = 0,105 \quad (41)$$

$$P_m(z = d) = P_m(z = 0) \cdot e^{2\alpha_2 d_2} = P_m(z = 0) \cdot e^{2At} = 202,63 \text{ mW} \quad (42)$$

### Problema 3: (3.0 puntos)

Consideramos el modo dominante  $TM_z$  que se propaga en la guía de placas paralelas de la Figura 9(a). Se pide ( $a = 3$  cm,  $f_0 = 10$  GHz).

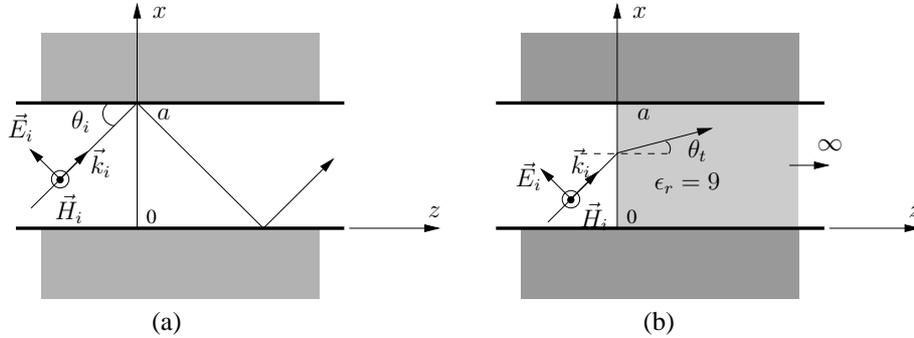


Figura 9: Modo dominante  $TM_z$  en guía de placas paralelas.

a) Encontrar la densidad de corriente inducida en las placas de la guía (1.0p).

El campo es:

$$E_z = C \cdot V(z) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

$$\vec{E}_t = -\frac{j\beta}{k_x^2}(\nabla_t E_z) = \frac{-j\beta a}{m\pi} CV(z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \hat{e}_x \quad (43)$$

$$\vec{H}_t = \frac{j\omega\epsilon}{k_x^2}[\nabla_t \times (E_z \hat{e}_z)] = \frac{-j\omega\epsilon a}{m\pi} CI(z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \hat{e}_y \quad (44)$$

Aplicamos la condición de contorno en  $x = 0$ :

$$\hat{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_{x=0} = \vec{J}_s \quad (45)$$

$$\vec{H}_1 = 0; \quad \vec{H}_2 \Big|_{x=0} = \frac{-j\omega\epsilon a}{m\pi} CI(z) \hat{e}_y$$

$$-(\hat{e}_x \times \hat{e}_y) \frac{j\omega\epsilon a}{m\pi} CI(z) = \vec{J}_s$$

$$\vec{J}_s = -\frac{j\omega\epsilon a}{m\pi} C e^{-j\beta z} \hat{e}_z A/m \quad (46)$$

b) Se pone un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_r = 9$ , tal y como se muestra en la Figura 9(b). Calcular el ángulo con el que se propaga la onda en el dieléctrico usando la ley de Snell, y usando las relaciones sobre el vector de propagación que impone la guía. Para diseñar un resonador de microondas, se requiere operar el circuito en una frecuencia a la que la onda se propague en el dieléctrico, pero no en el aire. ¿Qué margen de frecuencias debería escoger? (1.0p).



Usando la ley de Snell:

$$k_o \sin \theta_i = k_o \sqrt{\epsilon_r} \sin \theta_t; \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_x = k_o \sin \theta_i \quad (47)$$
$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Hay que calcular el ángulo de incidencia:

$$\sin \theta_i = \frac{m\lambda_o}{2a} = \frac{3 \text{ cm}}{2 \cdot 3 \text{ cm}} = \frac{1}{2} \quad (48)$$

$$\lambda_o = \frac{30}{10} = 3 \text{ cm}; \quad \theta_i = 30^\circ$$

$$\sin \theta_t = \frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow 9,6^\circ \quad (49)$$

en el medio (2):

$$\sin \theta_t = \frac{m\lambda_o}{2\sqrt{\epsilon_r}a} = \frac{3 \text{ cm}}{2 \cdot 3 \cdot 3 \text{ cm}} = \frac{1}{6} \rightarrow 9,6^\circ \quad (50)$$

Para calcular el margen de frecuencias a escoger, el límite de propagación se producirá para  $\theta_t = 90^\circ$ , así tenemos en el dieléctrico:

$$\sin \theta_t = \frac{m\lambda_{cd}}{2a\sqrt{\epsilon_r}} = 1 \quad (51)$$

$$\lambda_{cd} = 2a\sqrt{\epsilon_r} = 2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 3 = 18 \text{ cm}$$

$$f_{cd} = \frac{30}{\lambda_{cd}(\text{cm})} \text{ GHz} = \frac{30}{18} = 1,66 \text{ GHz} \quad (52)$$

Como en el dieléctrico se debe propagar, deberemos escoger  $f_o > 1,66 \text{ GHz}$ ; en el aire tenemos:

$$\sin \theta_i = \frac{m\lambda_{ca}}{2a} = 1 \quad (53)$$

$$\lambda_{ca} = 2a = 2 \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$f_{ca} = \frac{30}{\lambda_{ca}} = \frac{30}{6} = 5 \text{ GHz}$$

En el aire queremos que esté al corte, luego  $f_o < 5 \text{ GHz}$ .

Por tanto, el margen de frecuencias será de:  $1,66 \text{ GHz} < f < 5 \text{ GHz}$

- c) Demostrar el coeficiente de Fresnel de reflexión y transmisión, imponiendo las condiciones de contorno para las componentes tangenciales de los campos en la superficie del dieléctrico (1.0p).

En el medio (1) habría onda incidente y reflejada, luego:

$$\vec{E}_t^{(1)} = \hat{e}_x \frac{-j\beta_1 a}{m\pi} C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) (e^{-j\beta_1 z} + \rho e^{+j\beta_1 z}) \quad (54)$$

$$\vec{E}_t^{(2)} = \hat{e}_x \frac{-j\beta_2 a}{m\pi} C \tau \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_2 z}$$



en  $z=0$ ;  $\vec{E}_t^{(1)} = \vec{E}_t^{(2)}$

$$\begin{aligned} \frac{-j\beta_1 a}{m\pi} C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) (1 + \rho) &= \frac{-j\beta_2 a}{m\pi} C \tau \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \\ \beta_1(1 + \rho) &= \beta_2 \tau \end{aligned} \quad (55)$$

Siendo  $\beta_1 = k_o \cos\theta_i$ ;  $\beta_1 = k_o \sqrt{\epsilon_r} \cos\theta_t$

Para el campo magnético, también en (1) hay onda reflejada y la onda reflejada cambia de sentido:

$$\begin{aligned} \vec{H}_t^{(1)} &= \frac{-j\omega\epsilon_o a}{m\pi} C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) (e^{-j\beta_1 z} - \rho e^{+j\beta_1 z}) \hat{e}_y \\ \vec{H}_t^{(2)} &= \frac{-j\omega\epsilon_o \epsilon_r a}{m\pi} C \tau \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_2 z} \hat{e}_y \end{aligned} \quad (56)$$

en  $z=0$ ;  $\vec{H}_t^{(1)} = \vec{H}_t^{(2)}$

$$\begin{aligned} \frac{-j\omega\epsilon_o a}{m\pi} C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) (1 - \rho) &= \frac{-j\omega\epsilon_o \epsilon_r a}{m\pi} C \tau \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \\ (1 - \rho) = \epsilon_r \tau; \quad \longrightarrow \tau &= \frac{1 - \rho}{\epsilon_r} \end{aligned} \quad (57)$$

Sustituyendo el resultado anterior en (35):

$$\begin{aligned} \beta_1(1 + \rho) &= \beta_2 \frac{1 - \rho}{\epsilon_r} \\ \beta_1 + \beta_1 \rho &= \frac{\beta_2}{\epsilon_r} - \rho \frac{\beta_2}{\epsilon_r} \\ \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\epsilon_r}\right) \rho &= \frac{\beta_2}{\epsilon_r} - \beta_1 \\ (\beta_1 \epsilon_r + \beta_2) \rho &= \beta_2 - \epsilon_r \beta_1 \\ \rho &= \frac{\beta_2 - \epsilon_r \beta_1}{\beta_2 + \epsilon_r \beta_1} \\ \rho &= \frac{k_o \sqrt{\epsilon_r} \cos\theta_t - \epsilon_r k_o \cos\theta_i}{k_o \sqrt{\epsilon_r} \cos\theta_t + \epsilon_r k_o \cos\theta_i} = \frac{\cos\theta_t - \sqrt{\epsilon_r} \cos\theta_i}{\cos\theta_t + \sqrt{\epsilon_r} \cos\theta_i} \end{aligned} \quad (58) \quad (59)$$