UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

TITULACIÓN: INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS (2º CURSO)

Examen final: 22 de Enero de 2008

Profesores: Alejandro Álvarez Melcón, Fernando Quesada Pereira

Puntuación: (10.0 puntos)

No se permite tener en la mesa ningún tipo de apuntes ni libros durante el examen. Deje su carné de estudiante o DNI en un lugar bien visible sobre la mesa. *No olvide poner el nombre en todas las hojas.* Tiempo 3 horas.

Problema 1: (3.0 puntos)

Tenemos un conductor infinito en la dirección (z), y de sección transversa en forma de sector, tal y como se muestra en la Figura 1. Se supone que existe una carga distribuida en el volumen del conductor de forma uniforme, y con densidad de carga (ρ_o C/m^3). Para aplicar las simetrías del campo, suponga que el radio ($a \to \infty$), y que ($\partial/\partial\rho = 0$). Tomar como origen de potenciales el eje (x). Se pide:

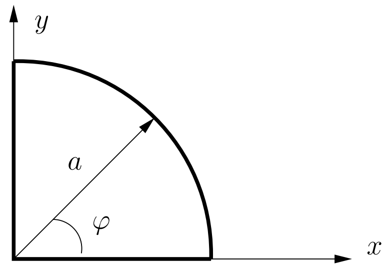

Figura 1: Conductor infinito, de sección sectorial.

a) Usando el método de Gauss, calcular el campo eléctrico en el interior del conductor (1.5p). El teorema de Gauss nos dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga encerrada Q_{enc} en el volumen que delimita esa superfice.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc} \tag{1}$$

Primero tenemos que aplicar las simetrías del problema:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial \rho} = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} \neq 0; \tag{2}$$

Por tanto,

$$\vec{E} = -\nabla\phi \tag{3}$$

$$\nabla\phi = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{e_\rho}}_{=0} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e_\varphi} + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e_z}}_{=0} \tag{4}$$

Así queda: $\boxed{\vec{E} = E_\varphi(\varphi)\hat{e_\varphi}}$

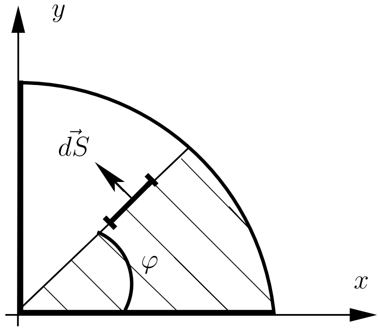

Figura 2

Tenemos que escoger un volumen cerrado por una superficie de manera que $\vec{E}$ sea constante a través de las superficies. Podemos tomar el volumen sectorial rallado, y en $\hat{z}$ una unidad de longitud L.
La única superfice importante es la marcada en la figura, en las otras $\vec{E} \perp \vec{dS}$ y la integral sería cero. Esto también ocurre en las tapas de arriba y abajo: $\vec{dS} = d\rho dz\hat{e_\varphi}$.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_o E_\varphi \int_0^L dz \int_0^a d\rho \underbrace{\hat{e_\rho}\hat{e_\varphi}}_{=1} = \epsilon_o E_\varphi La \tag{5}$$

La carga encerrada en el volumen será:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int_V \rho_V dv = \rho_o \int_0^L dz \int_0^a \rho d\rho \int_0^\varphi dx \\ dv &= \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\varphi \longrightarrow x$ para la integración

$$Q_{enc} = \rho_o L \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^a \varphi = \rho_o L \frac{a^2}{2}\varphi \qquad C \tag{7}$$

Igualando tenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_o E_\varphi La &= \rho_o L \frac{a^2}{2}\varphi \\ E_\varphi &= \frac{1}{\epsilon_o}\rho_o \frac{a}{2}\varphi \end{aligned} \tag{8}$$

Por tanto: $\boxed{\vec{E} = \rho_o \frac{a}{2\epsilon_o}\varphi\hat{e_\varphi} \text{ V/m}}$

b) Tomando como referencia de potencial el eje (x), calcular el potencial en el interior del conductor. Calcular la capacidad del hilo por unidad de longitud (1.5p).

Usamos la integral de campo

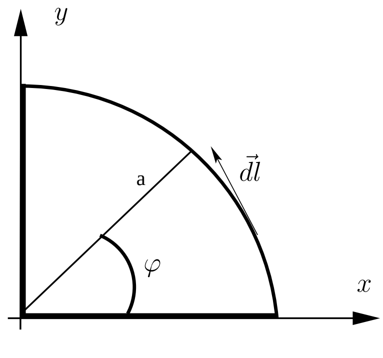

Figura 3

$$\phi(\varphi) - \underbrace{\phi(\varphi = 0)}_{=0} = \int_{\varphi=0}^{\varphi} \vec{E}\vec{dl} \tag{9}$$

pero $\vec{dl} = \hat{e_\varphi} a d\varphi$, además, $\varphi \longrightarrow x$ para la integración.

$$\begin{aligned} \phi(\varphi) =& \int_0^{\varphi} \rho_o \frac{a}{2\epsilon_o} x \underbrace{\hat{e_\varphi}\hat{e_\varphi}}_{=1} a dx = \rho_o \frac{a}{2\epsilon_o} \int_0^{\varphi} x dx = \rho_o \frac{a}{2\epsilon_o} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\varphi} \\ \phi(\varphi) =& \rho_o \frac{a}{4\epsilon_o} \varphi^2 \qquad V \end{aligned} \tag{10}$$

Para hallar la capacidad C del hilo por unidad de longitud, la vamos a definir como la relación entre la carga total almacenada y el voltage total: $C = \frac{Q_T}{V_T}$.

$$\begin{aligned} Q_T =& \rho_0 L \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} = \rho_0 L \frac{a^2 \pi}{4} \\ V_T =& \rho_0 \frac{a^2}{4\epsilon_o} \frac{\pi^2}{4} = \rho_0 \frac{a^2 \pi^2}{16\epsilon_o} \\ C =& \frac{\rho_0 L a^2 \frac{\pi}{4}}{\rho_0 \frac{a^2\pi^2}{16\epsilon_o}} \longrightarrow \frac{C}{L} = \frac{\epsilon_o 16}{4\pi} = \frac{\epsilon_o 4}{\pi} \qquad F/m \end{aligned} \tag{11}$$

Problema 2: (3.5 puntos)

Se quiere adaptar impedancias al generador con el circuito mostrado en la Figura 6, donde la primera línea actúa como un transformador en cuarto de onda. Se pide ($f = 5$GHz, $Z_L = (70 + j\,30)\,\Omega$, $Z_{c_1} = 79'057\,\Omega$, $Z_{c_2} = 100\,\Omega$, $Z_g = 50\,\Omega$, $V_g = 10$ V):

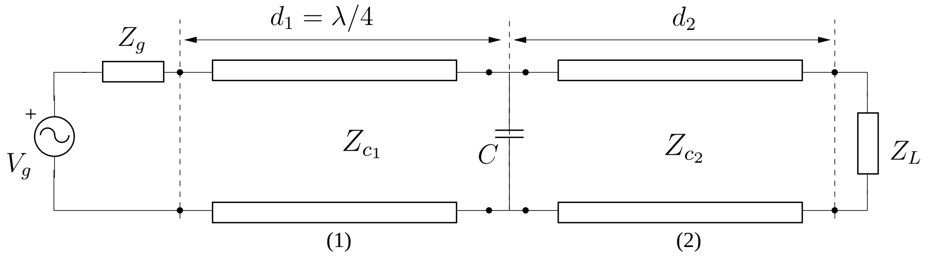

Figura 4: Circuito de adaptación de impedancias.

a) Calcular la longitud de la segunda línea (d_2) y el valor de la capacidad (C) para adaptar impedancias al generador (2.0p).
Primero empezamos desde el generador hacia la carga. Aquí vemos un transformador en $\lambda/4$, y por tanto: $Z_{in} = Z_g^* = 50\Omega$

$$Z_{in} = \frac{Z_{c1}^2}{Z_B}; \qquad Z_B = \frac{Z_{c1}^2}{Z_{in}} = \frac{79'057^2}{50} \tag{12}$$

$$Z_B = 125\Omega$$

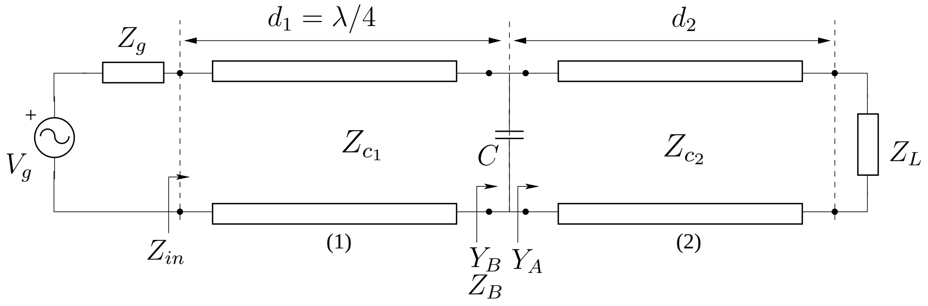

Figura 5: Circuito de adaptación de impedancias.

En este punto tenemos que trabajar con admitancias, ya que el condensador está conectado en paralelo: $Y_B = \frac{1}{Z_B} = 8 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$.

$$Y_B = +jB_x + Y_A \tag{13}$$

$$Y_A = Y_B - jB_x \tag{14}$$

$$Y_A = 8 \cdot 10^{-3} - jB_x$$

donde B_x es la susceptancia del condensador.

Para trabajar en la primera línea de transmisión debemos normalizar respecto de su impedancia característica:

$$\bar{Y_A} = \frac{Y_A}{Y_{C1}}; \qquad Z_{C2} = 100\Omega \qquad Y_{C2} = 10^{-2}\Omega^{-1} \tag{15}$$
$$\bar{Y_A} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} - j\bar{B_x} = 0'8 - j\bar{B_x}$$
$$\bar{B_x} = \frac{B_x}{10^{-2}} = B_x \cdot 100$$

Luego $\bar{Y_A}$ tiene que tener parte real 0'8. Para llegar a $\bar{Y_A}$ partimos de Z_L, calculamos Y_L, y nos desplazamos hasta que corte el círculo de parte real 0'8.
Usando la carta de Smith se obtiene: $\bar{Z_L} = 0'7 + j0'3$; $\bar{Y_L} = 1'2 + j0'52$.
desde Y_L nos desplazamos hacia el generador hasta cortar el círculo de 0'8, y parte imaginaria negativa (como indica (15)).

$$\bar{Y_L} = 1'2 + j0'52; \qquad \bar{B_X} = 0'4 \tag{16}$$

Nos hemos movido

$$\frac{d}{\lambda} = 0'395 - 0'328 = 0'067 \tag{17}$$
$$\lambda = 30/5 = 6cm = 60mm$$
$$d = 0'067\lambda = 4'02mm$$

$$Z_x = \frac{1}{j\omega C}; \qquad Y_X = j\omega C = jB_X; \qquad \omega C = B_X \tag{18}$$
$$B_X = \bar{B_X} \cdot 10^{-2} = 0'4 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$$
$$C = \frac{B_X}{2\pi f} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2\pi 5} 10^{-9} = 0'127pF$$

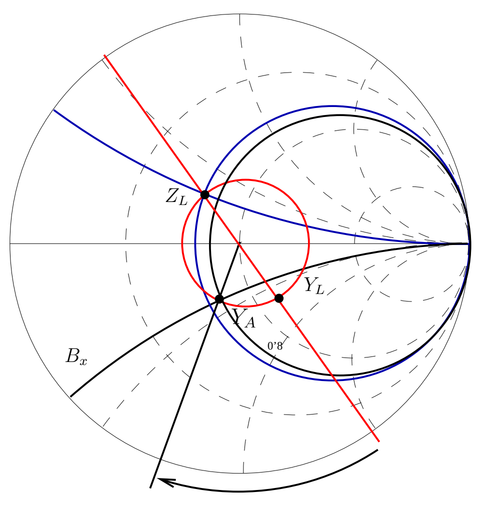

Figura 6

b) Coeficiente de onda estacionaria que soporta cada línea. Distancia a la que aparecerá el primer máximo de tensión en la segunda línea. Amplitud de la onda incidente en la primera línea (1.5p).

El coeficiente de onda estacionaria en la seguna línea lo podemos leer directamente de la carta de Smith:

$$\frac{1}{S_2} = 0'6; \qquad S_2 = 1{,}6667 \tag{19}$$

Para la primera linea tenemos que hallar el coeficiente de reflexión:

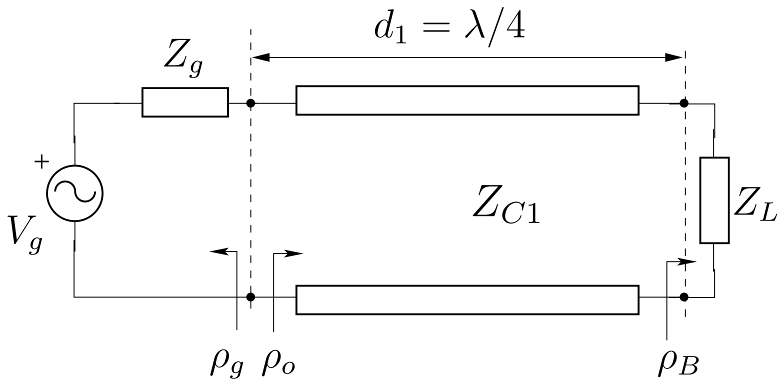

Figura 7

$$\rho_B = \frac{Z_B - Z_{C1}}{Z_B + Z_{C1}} = \frac{125 - 79'057}{125 + 79'057} = 0'225 \tag{20}$$

$$S_1 = \frac{1 - |\rho_B|}{1 + |\rho_B|} = \frac{1 - 0'225}{1 + 0'225} = 1'58 \tag{21}$$

- Distancia a la que aparecerá el primer máximo de tensión en la línea 2:

Los mínimos de tensión aparecen en el semieje real derecho. Nos desplazamos desde Z_L hasta el semieje real derecho:

$$\frac{l}{\lambda} = 0'25 - 0'076 = 0'174 \tag{22}$$
$$l = 0'174 \cdot 60mm = 10'44mm$$

La longitud de la línea es de $4mm$ (17), menor que el resultado en (22), por lo tanto nunca llega a aparecer.

- Amplitud de la onda incidente en la línea 1:

Se puede resolver de dos formas:

$$A = \frac{V_g}{2}\frac{1 - \rho_g}{1 - \rho_g \rho_o} \tag{23}$$

Se observa que si $\rho_B = 0'225$, entonces $\rho_o = -0'225$, ya que la longitud de la línea es $\lambda/4$.

Además:

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_{C1}}{Z_g + Z_{C1}} = \frac{50 - 79'057}{50 + 79'057} = -0'225 \tag{24}$$

$$A = \frac{10}{2}\frac{1 + 0'225}{1 - 0'225^2} = 6'45V \tag{25}$$

También se puede resolver con cálculos de potencias:

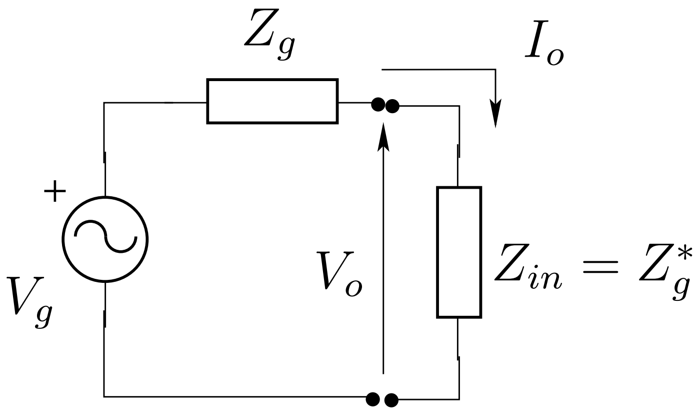

Figura 8

$$\begin{aligned} P_V &= \frac{1}{2}V_o I_o; \qquad P_V = \frac{1}{2}|I_o|^2 Z_{in} \\ P_m &= \frac{1}{2}|I_o|^2 Re[Z_{in}] \\ I_o &= \frac{V_g}{Z_g + Z_g^*} = \frac{V_g}{2\cdot Z_g} = \frac{V_g}{2\cdot 50} \\ P_m &= \frac{1}{2}\frac{|V_g|^2}{4\cdot 50^2}50 = \frac{1}{8}\frac{10^2}{50} = 0'25Watt \longrightarrow 250mWatt \end{aligned} \tag{26}$$

Pero en una línea, la potencia activa transmitida es:

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{2}\frac{|A|^2}{Z_{C1}}\left(1 - |\rho_B|^2\right) = 0'25 \\ |A|^2 &= \frac{2\cdot Z_{C1}\cdot 0'25}{1 - |\rho_B|^2} = \frac{2\cdot 79'057\cdot 0'25}{1 - 0'225^2} = 41'636 \\ A &= 6'4525V \end{aligned} \tag{27}$$

Problema 3: (3.5 puntos)

Vamos a tratar de hacer un protector reflectante para proteger nuestros equipos de la radiación de un transmisor próximo que produce interferencias. Para ello podemos usar varias capas de pintura dieléctrica.

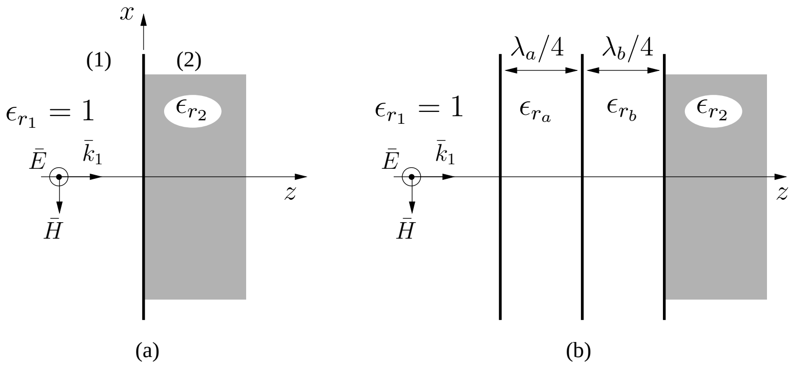

Figura 9: Onda plana incidente sobre un medio dieléctrico.

a) En primer lugar consideramos una onda electromagnética que incide normalmente a un dieléctrico semi-infinito, de permitividad ($\epsilon_{r_2} = 9$, ver Figura 9(a)). Calcular el porcentaje de potencia que es reflejada por el dieléctrico (0.5p).
Estamos en el caso de incidencia normal u onda TEM:

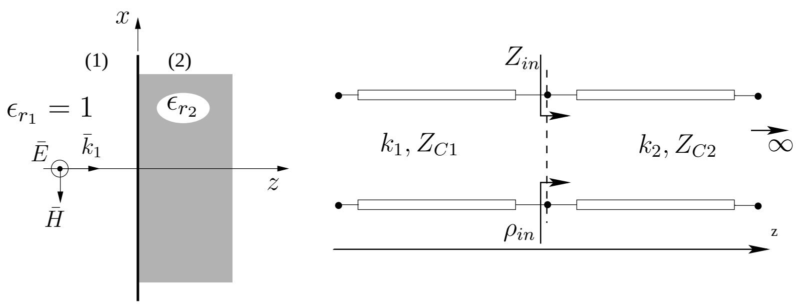

Figura 10: Onda plana incidente sobre un medio dieléctrico y equivalente circuital.

$$Z_{in} = Z_{C2} = \sqrt{\frac{\mu_o}{9\epsilon_o}} = \frac{Z_o}{3} \tag{28}$$

$$k_2 = \underbrace{\omega\sqrt{\epsilon_o\mu_o}}_{=k_o}\sqrt{9} = 3k_o$$

$$Z_{C1} = Z_o; \qquad k_1 = k_o$$

$$\rho_{in} = \frac{Z_{in} - Z_{C1}}{Z_{in} + Z_{C1}} = \frac{\frac{Z_o}{3} - Z_o}{\frac{Z_o}{3} + Z_o} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-1}{2}$$

La fracción de potencia que se refleja: $|\rho_{in}|^2 = \frac{1}{4} = 0'25 \longrightarrow 25\,\%$

b) Ver qué sucede con la potencia reflejada si la onda incide al dieléctrico con un ángulo de 30^o (1.0p).
Es una onda con polarización TE:

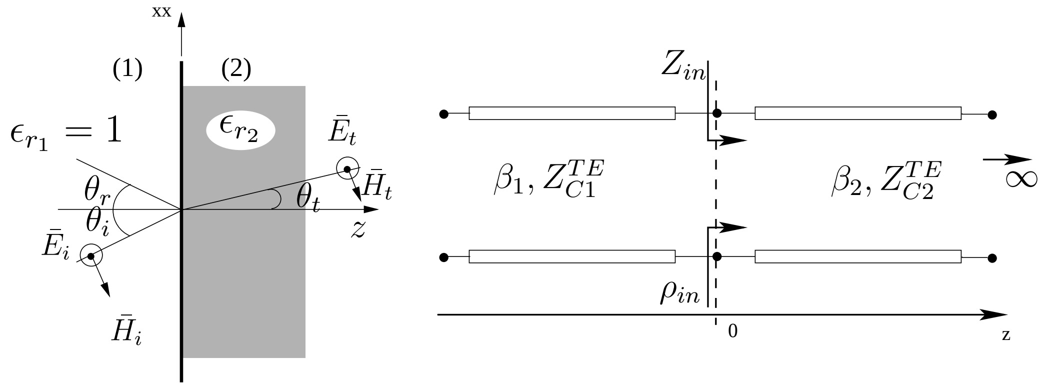

Figura 11: Onda plana incidente con un ángulo de 30^o y equivalente circuital.

$$Z_{in} = Z_{C2}^{TE} = \frac{\omega\mu_o}{\beta_2} \tag{29}$$
$$\beta_2 = k_2 cos\theta_t = 3k_o cos\theta_t$$
$$Z_{in} = \frac{\omega\mu_o}{3k_o cos\theta_t} = \frac{\omega\mu_o}{3\omega\sqrt{\epsilon_o\mu_o}cos\theta_t} = \frac{Z_o}{3cos\theta_t} = \frac{Z_o/3}{cos\theta_t}$$

$$Z_{C1}^{TE} = \frac{\omega\mu_o}{\beta_1}; \qquad \beta_1 = k_o cos\theta_i \tag{30}$$
$$Z_{C1}^{TE} = \frac{\omega\mu_o}{k_o cos\theta_i} = \frac{\omega\mu_o}{\omega\sqrt{\epsilon_o\mu_o}cos\theta_i} = \frac{Z_o}{cos\theta_i}$$

Por tanto,

$$\rho_{in} = \frac{Z_{in} - Z_{C1}^{TE}}{Z_{in} + Z_{C1}^{TE}} = \frac{\frac{Z_o/3}{cos\theta_t} - \frac{Z_o}{cos\theta_i}}{\frac{Z_o/3}{cos\theta_t} + \frac{Z_o}{cos\theta_i}} = \frac{\frac{cos\theta_i}{3} - cos\theta_t}{\frac{cos\theta_i}{3} + cos\theta_t} \tag{31}$$

Además tenemos la Ley de Snell:

$$k_1 sin\theta_i = k_2 sin\theta_t \tag{32}$$
$$k_0 sin\theta_i = 3k_o sin\theta_t$$
$$sin\theta_t = \frac{sin\theta_i}{3} = \frac{sin35^o}{3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\theta_t = 0'167rad \longrightarrow 9'59^o$$

Por tanto:

$$\rho_{in} = \frac{\frac{cos\theta_i}{3} - cos9'59^o}{\frac{cos\theta_i}{3} + cos9'59^o} = -0'547 \tag{33}$$
$$|\rho_{in}|^2 = 0'299 \longrightarrow 30\,\%$$

30 % representa la fracción de potencia que se refleja, es decir, hay un aumento de la reflexión, luego se transmite menos.

c) Con el fin de evitar la penetración de la onda, intercalamos entre el aire y el sustrato un sandwitch formado por dos capas dieléctricas de espesor cuarto de onda y permitividades ($\epsilon_{r_a} = 12$) y ($\epsilon_{r_b} = 2$, ver Figura 9(b)). En el caso peor, encontrar el porcentaje de potencia transmitida (1.0p).
El peor caso es cuando la onda incide normalmente al dieléctrico:

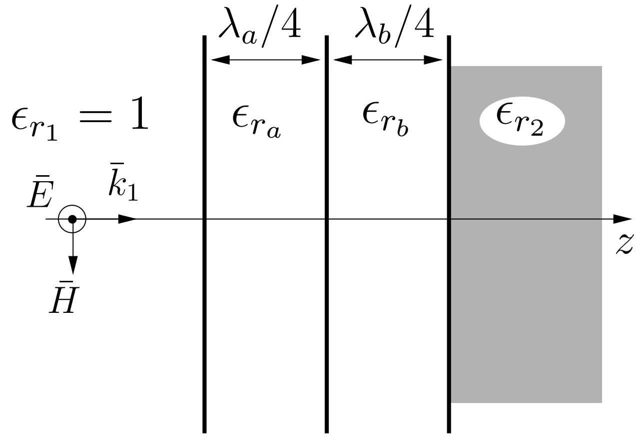

Figura 12: Onda plana incidente sobre varias capas dieléctricas.

Para incidencia normal tenemos el siguiente circuito equivalente:

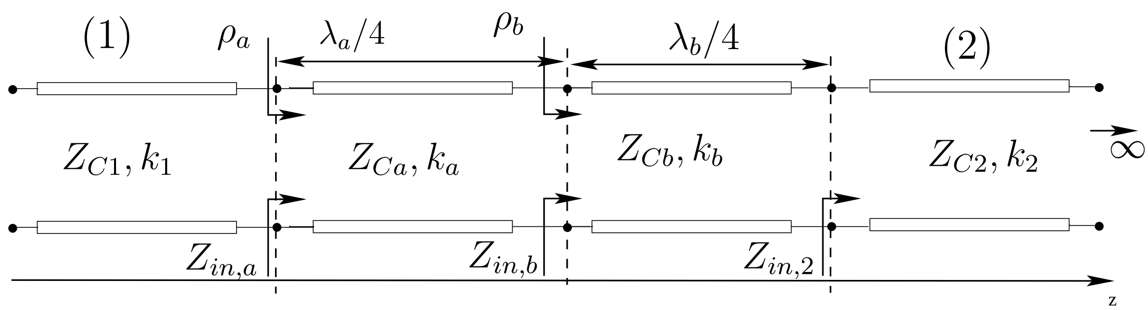

Figura 13: Onda plana incidente sobre varias capas dieléctricas.

$$
\begin{aligned}
Z_{C1} &= \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = Z_o; \qquad Z_{Ca} = \sqrt{\frac{\mu_o}{12\epsilon_o}} = \frac{Z_o}{\sqrt{12}}; \\
Z_{Cb} &= \sqrt{\frac{\mu_o}{2\epsilon_o}} = \frac{Z_o}{\sqrt{2}}; \qquad Z_{C2} = \sqrt{\frac{\mu_o}{9\epsilon_o}} = \frac{Z_o}{3} = Z_{in2};
\end{aligned} \tag{34}
$$

Ahora utilizamos las fórmulas del transformador en $\lambda/4$:

$$
\begin{aligned}
Z_{inb} &= \frac{Z_{Cb}^2}{Z_{in2}} = \frac{Z_o^2/2}{Z_{in2}}; \\
Z_{ina} &= \frac{Z_{Ca}^2}{Z_{inb}} = \frac{Z_o^2/12}{Z_o^2/2} Z_{in2} = \frac{2}{12} Z_{in2}; \\
Z_{ina} &= \frac{Z_{in2}}{6};
\end{aligned} \tag{35}
$$

El sandwich reduce por 6 la impedancia. Finalmente:

$$Z_{ina} = \frac{Z_o/3}{6} = \frac{Z_o}{18} \tag{36}$$

El coeficiente de reflexión será:

$$\rho_a = \frac{Z_{ina} - Z_{C1}}{Z_{ina} + Z_{C1}} = \frac{Z_o/18 - Z_o}{Z_o/18 + Z_o} = \frac{1-18}{1+18}; \tag{37}$$
$$\rho_a = -0'894 \qquad \longrightarrow |\rho_a|^2 = 0'799$$

El 80 % de la potencia es reflejada, con lo que hemos mejorado nuestra protección

d) ¿Cuántos sandwitches debemos poner para que la potencia reflejada sea superior al 99 % (1.0p).

Con un sandwich tenemos:

$$Z_{ina} = \frac{Z_{in2}}{6} = \frac{Z_o}{18} \tag{38}$$

Con N sandwiches tendremos:

$$Z_{ina} = \frac{Z_{in2}}{6^N} = \frac{Z_o/3}{6^N} \tag{39}$$

Queremos:

$$|\rho_a|^2 = 0'990; \qquad \rho_a = \pm\sqrt{0'99} = \pm 0'995; \tag{40}$$
$$\rho_a = \frac{Z_{ina} - Z_{C1}}{Z_{ina} + Z_{C1}} = \frac{Z_o/(3\cdot 6^N) - Z_o}{Z_o/(3\cdot 6^N) + Z_o} = \frac{1 - 3\cdot 6^N}{1 + 3\cdot 6^N} = 0'995$$
$$1 - 3\cdot 6^N = \pm 0'995(1 + 3\cdot 6^N)$$
$$1 - 3\cdot 6^N = \pm 0'995 \pm 2'985 \cdot 6^N$$
$$(1 \mp 0'995) = (3 \pm 2'985)\cdot 6^N$$

tomando el signo de arriba:

$$0'005 = 5'985 \cdot 6^N; \qquad 6^N = \frac{0'005}{5'985} \tag{41}$$
$$N \cdot ln6 = ln\frac{0'005}{5'985} = -7'0876$$

En estas condiciones se obtendría un N negativo, no es válido. Tomando el signo de abajo:

$$1'995 = 0'015 \cdot 6^N; \qquad 6^N = \frac{1'995}{0'015} \tag{42}$$
$$N \cdot ln6 = ln\frac{1'995}{0'015}$$
$$N \cdot 1'972 = 4'89$$

$$N = \frac{4'89}{1'972} = 2'72 \qquad \longrightarrow N = 3 \qquad \textit{sandwiches}$$