

Ondas Electromagnéticas

Bloque II. Líneas de Transmisión

David Cañete Rebenaque
Fernando D. Quesada Pereira¹

¹Grados en Ingeniería Telemática y en Sistemas de Telecomunicación
Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Universidad Politécnica de Cartagena

21 de octubre de 2013

Índice de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Modelo circuital
 - Condiciones de Contorno
 - Coeficientes de reflexión y de transmisión
- 3 Longitud necesaria para dar una vuelta completa a la fase
 - Potencia media o activa en la línea
 - Tensión y corriente en una línea cortocircuitada
 - Onda Estacionaria
- 4 Onda estacionaria producida por una impedancia genérica
- 5 Línea de transmisión con pérdidas
 - Introducción
 - Potencia en líneas con pérdidas
- 6 Línea de transmisión con generador y carga
 - Impedancias de entrada de líneas de transmisión útiles
- 7 Carta de Smith
 - Ejemplo práctico de línea de transmisión
 - Otros conceptos importantes
 - Ejemplo de utilización de la carta de Smith con elementos concentrados

Introducción a las líneas de transmisión

Línea de transmisión

- Caso más simple que podemos tratar de campos con variación temporal es del la **línea de transmisión ideal**.
- Suponemos que el **campo eléctrico y el magnético tienen una sola componente**.
- Se **desprecia cualquier variación con las coordenadas transversales**.
- Suponemos que la **única variación que existe es con la coordenada longitudinal Z** hacia donde se dirige la línea.

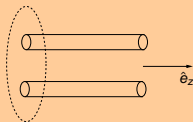


Figura: Esquema de una línea de transmisión. Se desprecian las variaciones del campo en las direcciones del plano transversal (línea punteada).

Potencial escalar eléctrico

Se **desprecia la forma concreta de la línea** (coaxial, bifilar) y suponemos que no existen variaciones con respecto a estas coordenadas.

$$\vec{E} = E_x \hat{e}_x$$

$$\vec{H} = H_y \hat{e}_y$$

Además suponemos que estamos en una **versión sin fuentes**, es decir **lejos existen las fuentes que generan los campos, pero en la región donde estoy no hay fuentes**. Las **ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia** quedan como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

Se considera que $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial y} = 0$. Al **final del curso se considerará el caso de la forma concreta de la línea**, es decir las **variaciones respecto al plano transversal**.

Introducción a las líneas de transmisión. Modelo circuital

Introducción Líneas de Transmisión

En coordenadas cartesianas los rotacionales se calculan fácilmente:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = +\hat{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\hat{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \hat{e}_y$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y$$

Modelo circuital

- ⇒ **Desaparece el caracter vectorial del problema**, tenemos un problema escalar.
- ⇒ Las líneas de campo eléctrico definen un voltaje entre los dos conductores de la línea.
- ⇒ A E_x se le llama **onda de voltaje $V(z)$** .
- ⇒ El **campo magnético produce una corriente en cada conductor de la línea**. El campo magnético rodea a los conductores.
- ⇒ El **campo magnético se modela por una onda de corriente $H_y \rightarrow I(z)$** .

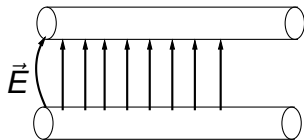


Figura: Líneas de campo eléctrico en la línea de transmisión. Estas líneas se generan debido a la diferencia de potencial entre los dos conductores.

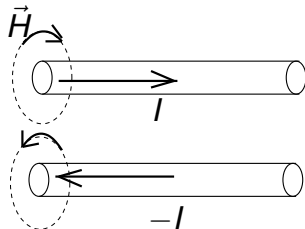


Figura: Líneas de campo magnético en una línea de transmisión. El campo magnético se genera debido a la circulación de corriente en cada conductor de la línea.

Modelo circuital de la línea de transmisión

Modelo Circuital

El **problema es escalar** y puede escribirse como:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -j\omega\mu I(z) \quad \text{D. frecuencia}$$

Haciendo **lo mismo para la ecuación de rotacional**:

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$-\hat{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = -j\omega\mu E_x \hat{e}_x$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -j\omega\mu E_x$$

Modelo Circuital

Escribiendo la ecuación en términos de las variables de la línea de transmisión tenemos:

$$\frac{dI(z)}{dz} = -j\omega\epsilon V(z) \quad \text{D. frecuencia}$$

Tenemos que encontrar las **ondas de tensión y corriente**. Derivando:

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = -j\omega\mu \frac{dI(z)}{dz}$$

Sustituyendo se llega a:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -j\omega\mu(-j)\omega\epsilon V(z) = -\omega^2 \mu\epsilon V(z)$$

Modelo circuital de la línea de transmisión

Modelo circuital. Constante de propagación β

Podemos definir una **constante que depende de la frecuencia y el medio** $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ (constante de propagación en el medio). Teniendo en cuenta lo anterior queda:

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} + \beta^2 V(z) = 0$$

La expresión anterior es una **ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes** que se puede resolver de forma **analítica**. El **polinomio característico** de la ecuación diferencial es:

$$x^2 + \beta^2 = 0$$

Las **raíces del polinomio** característico son:

$$x^2 = -\beta^2$$

$$x = \pm j\beta$$

Si consideramos $e^{-j\beta z}$ la **exponencial de una transformación entre los dominios $z \rightarrow \beta$** , el término $e^{-j\beta z}$ **representa un desplazamiento en el espacio z** . La solución de la ecuación diferencial se escribe como:

$$V(z) = Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}$$

Físicamente el primer término de la expresión anterior ($e^{-j\beta z}$) representa una onda que se propaga en dirección z (**onda incidente**). El **segundo término** representa físicamente una onda que se propaga en dirección $-z$ (**onda reflejada**). Las **constantes A y B** se calculan suponiendo las **condiciones de contorno del problema**.

Modelo circuital de la línea de transmisión

Onda de Corriente

Para hallar la **onda de corriente** se puede utilizar:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -j\omega\mu I(z)$$

Sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dV(z)}{dz} &= A(-j\beta)e^{-j\beta z} + B(j\beta)e^{j\beta z} \\ &= j\beta \left[-Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z} \right]\end{aligned}$$

$$j\beta \left[-Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z} \right] = -j\omega\mu I(z)$$

$$I(z) = \frac{\beta}{\omega\mu} \left[Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z} \right]$$

Se define $Z_c = \frac{\omega\mu}{\beta}$ como la **impedancia característica de la línea de transmisión**. Es diferente a las impedancias localizadas con las que se trabaja en teoría de circuitos.

Impedancia característica

Se trata de una **impedancia** porque sirve para **pasar de la corriente a la tensión**.

$$Z_c = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

De esta forma se tiene:

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} \left[Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z} \right]$$

$$V(z) = Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}$$

Para **pasar al dominio del tiempo** se hace la siguiente operación:

$$i(z, t) = \text{Re} \left[I(z)e^{j\omega t} \right]$$

$$v(z, t) = \text{Re} \left[V(z)e^{j\omega t} \right]$$

Las relaciones anteriores se tratan de **ondas reales en el tiempo**.

Aplicación de las condiciones de contorno

Condiciones de Contorno

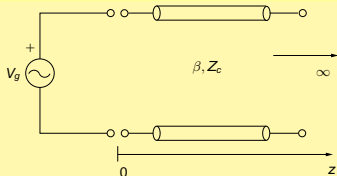


Figura: Modelo de línea de transmisión.

Como no existe nada donde pueda existir reflexión la **onda reflejada es cero y por tanto $B = 0$** , resultando:

$$V(z) = Ae^{-j\beta z}$$

La **tensión total en $z = 0$** es V_g impuesta por el generador $V(z = 0) = A = V_g$. Luego, **resulta que $A = V_g$** .

$$V(z) = V_g e^{-j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V_g}{Z_c} e^{-j\beta z} = \frac{V(z)}{Z_c}$$

El término Z_c convierte **tensión en corriente cuando sólo hay onda incidente**. Por ese motivo se llama **impedancia característica**.

Línea terminada por impedancia

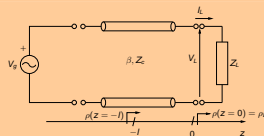


Figura: Línea cargada con una impedancia Z_L .

$$V(z) = Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}; I(z) = \frac{1}{Z_c} [Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z}]$$

Hay que tener en cuenta la **onda reflejada**.

$$V(z = 0) = V_L; V(z = 0) = A + B = V_L$$

$$I(z = 0) = I_L; I(z = 0) = \frac{1}{Z_c}(A - B) = I_L$$

En la terminación **se cumple la ley de Ohm**:

$$I_L = \frac{V_L}{Z_L}; Z_L = \frac{V_L}{I_L}$$

$$A \left(1 + \frac{B}{A}\right) = V_L; \frac{A}{Z_c} \left(1 - \frac{B}{A}\right) = I_L$$

Dividiendo las ecuaciones se llega a:

$$Z_c \frac{1 + \frac{B}{A}}{1 - \frac{B}{A}} = \frac{V_L}{I_L} = Z_L$$

Coefficientes de reflexión y de transmisión

Coefficientes de reflexión

$\rho_L = \frac{B}{A} \rightarrow$ Es el coeficiente de reflexión en la carga ($z = 0$).

$B \rightarrow$ Es la amplitud de la onda reflejada en $z = 0$.

$A \rightarrow$ Es la amplitud de la onda incidente en $z = 0$.

$$Z_c \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} = Z_L$$

$$Z_c(1 + \rho_L) = Z_L(1 - \rho_L)$$

$$Z_c \rho_L + Z_L \rho_L = Z_L - Z_c$$

$$\rho_L(Z_c + Z_L) = Z_L - Z_c$$

A partir de las relaciones anteriores, el **coeficiente de reflexión** (número complejo) queda:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$$

Teniendo en cuenta la relación:

$$V(z) = A \left[e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z} \right]$$

$$I(z) = \frac{A}{Z_c} \left[e^{-j\beta z} - \rho_L e^{j\beta z} \right]$$

Coefficiente de Transmisión

El **coeficiente de transmisión** se define como $\tau = \frac{V_L}{A}$. El término $V_L = A + B$ es la **tensión que hay en la carga** (transmitida a la carga), mientras que A es la **amplitud de la tensión incidente**.

$$V_L = V(z = 0) = A + B; \quad \frac{V_L}{A} = 1 + \frac{B}{A}$$

$$\tau = 1 + \rho_L = 1 + \frac{B}{A} = \frac{V_L}{A}$$

$$\frac{I_L}{A} = \frac{1}{Z_c}(1 - \rho_L) = \frac{1}{Z_c} \left(1 - \frac{B}{A} \right)$$

$$1 - \frac{B}{A} = 1 - \rho_L = \frac{2Z_c}{Z_L + Z_c}$$

Se tiene,

$$\tau = 1 + \rho_L = 1 + \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_c}$$

resulta de la relación anterior que,

$$\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_c}; \quad 1 - \rho_L = \frac{2Z_c}{Z_L + Z_c} = \tau \frac{Z_c}{Z_L}$$

El **coeficiente de transmisión** τ tiene menos utilidad que el **coeficiente de reflexión** ρ_L , ya que **este último mantiene una relación con las potencias**. La relación anterior corresponde al **coeficiente de transmisión de la carga**.

Impedancia de entrada en un punto de la línea

Impedancia Z_{in} en un lugar de la línea

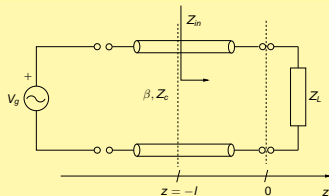


Figura: Cálculo de la impedancia de entrada Z_{in} en un punto de la línea

$$Z_{in}(z = -l) = \frac{V(z = -l)}{I(z = -l)} = Z_c \frac{A(e^{j\beta l} + \rho_L e^{-j\beta l})}{A(e^{j\beta l} - \rho_L e^{-j\beta l})}$$

Usando la relación $\rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$ se llega a:

$$Z_{in}(z = -l) = Z_c \frac{e^{j\beta l} + \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} e^{-j\beta l}}$$

$$Z_{in}(z = -l) = Z_c \frac{(Z_L + Z_c)e^{j\beta l} + (Z_L - Z_c)e^{-j\beta l}}{(Z_L + Z_c)e^{j\beta l} - (Z_L - Z_c)e^{-j\beta l}} = Z_c \frac{Z_L(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_c(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{Z_L(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}) + Z_c(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})}$$

$$Z_{in}(z = -l) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)}$$

Longitud para dar una vuelta completa a la fase

Coefficiente de reflexión a distancia l

El coeficiente de reflexión para una distancia dada será,

$$\begin{aligned}\rho(z = -l) &= \frac{Be^{-j\beta l}}{Ae^{j\beta l}} \\ &= \frac{B}{A} e^{-j2\beta l} = \rho(z = 0) e^{-j2\beta l}\end{aligned}$$

Luego vemos que la fase del coeficiente de reflexión se mueve como $(2\beta l)$ con la distancia.

¿Qué longitud debo moverme para que la fase de una vuelta completa (2π) ?

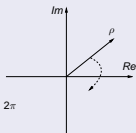


Figura: Longitud que hay que desplazarse para moverse una vuelta completa (2π) . El sentido es alejándose de la carga.

Longitud para vuelta completa

$$2\beta l = 2\pi; l = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$$

Cada $\lambda/2$ la fase de ρ de una vuelta completa. Resulta que $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. La velocidad de la luz es $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, luego $\beta = \frac{\omega}{c}$.

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \left(\frac{m/seg}{1/seg} \right) \quad m$$

$$\lambda = cT; T = \frac{1}{f}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\lambda} T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; T\omega = 2\pi$$

De las relaciones anteriores resulta $l = \frac{\lambda}{2} = 0,5\lambda$. Al moverme en una línea de transmisión $(0,5\lambda)$, el coeficiente ha dado una vuelta completa.

Potencia media o activa en la línea

Definición

Como estamos trabajando con **señales sinusoidales**, podemos definir la potencia media o activa en un determinado punto de la siguiente forma:

$$P_m(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V(z) \cdot I^*(z)]$$

$$P_v(z) = \frac{1}{2} [V(z) \cdot I^*(z)]$$

Usando las **expresiones de tensión y corriente**:

$$P_v(z) = \frac{A}{2} [e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z}] \frac{A^*}{Z_c^*} [e^{j\beta z} - \rho_L^* e^{-j\beta z}]$$

$$P_v(z) = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c^*} [1 - |\rho_L|^2 + \rho_L e^{j2\beta z} - \rho_L^* e^{-j2\beta z}]$$

La potencia media quedará, teniendo en cuenta que $\rho_L e^{j2\beta z} - \rho_L^* e^{-j2\beta z} = 2j \operatorname{Im}[\rho_L e^{j2\beta z}]$, como:

$$P_m = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c^*} [1 - |\rho_L|^2] \quad \text{Es independiente de } z$$

Potencia transmitida

Según la expresión de la potencia media se deduce que en una línea sin pérdidas **la potencia transmitida no depende de la longitud de la línea**.

La potencia incidente es $P_i = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c^*}$, mientras que la potencia reflejada será $P_r = P_i |\rho_L|^2$, relación en la que tenemos el módulo al cuadrado de la fracción de potencia reflejada. La **potencia transmitida en la carga** es:

$$P_t = P_i - P_r = P_i (1 - |\rho_L|^2)$$

Ley de conservación de potencia.

Un **error grave** sería decir que $P_t = |\tau|^2 P_i$ (nunca se debe usar esta expresión), puesto que $\tau = 1 + \rho_L$ y $|\tau|^2 = |1 + \rho_L|^2 \neq 1 - |\rho_L|^2$.

Tensión y corriente en una línea cortocircuitada

Línea acabada en cortocircuito

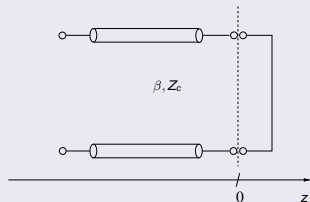


Figura: Línea de transmisión acabada en cortocircuito

Sabemos que:

$$V(z) = A \left[e^{-j\beta z} + \rho e^{j\beta z} \right]$$

$$I(z) = \frac{A}{Z_c} \left[e^{-j\beta z} - \rho e^{j\beta z} \right]$$

Tensión y corriente

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = \frac{-Z_c}{Z_c} = -1$$

El valor $\rho_L = -1$ corresponde al **coeficiente de reflexión en un cortocircuito**.

$$\begin{aligned} V(z) &= A \left[e^{-j\beta z} - e^{j\beta z} \right] = A 2j \frac{e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}}{2j} \\ &= -2jA \sin(\beta z) \end{aligned}$$

$$I(z) = \frac{A}{Z_c} \left[e^{-j\beta z} + e^{j\beta z} \right] = \frac{2A}{Z_c} \cos(\beta z)$$

Onda estacionaria producida por un cortocircuito

Tensión

Tensión y corriente tienen forma sinusoidal en función de la distancia.

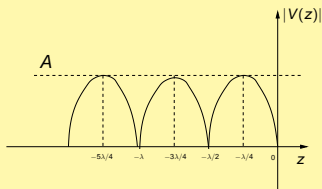


Figura: Distribución de tensión en una línea cortocircuitada

$$\sin(\beta z) \quad ; \quad \beta z = n\pi \quad ; \quad z = -\frac{n\pi}{\beta} = \frac{n\pi}{2\pi} \lambda = -\frac{n}{2} \lambda$$

En la expresión anterior se toma el valor negativo porque la línea está en $z < 0$. Luego vemos que en función de z la tensión total pasa por máximos y mínimos. Esto es debido a la interacción entre onda incidente y onda reflejada y se denomina **onda estacionaria**.

Corriente

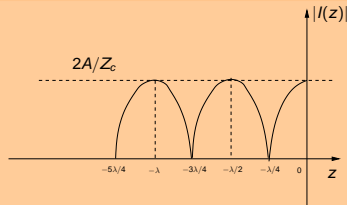


Figura: Distribución de corriente en una línea cortocircuitada

$$\cos(\beta z) = 0$$

$$\beta z = \pm(2n - 1)\pi/2$$

$$z = -\frac{(2n - 1)\pi}{22\pi} \lambda = -\frac{2n - 1}{4} \lambda$$

En la expresión anterior se toma signo negativo al estar la línea en $z < 0$. Vemos que la corriente está desfasada ($\pi/2$) con respecto a la distancia z .

Onda estacionaria producida por un cortocircuito

Análisis temporal

$$v(z, t) = \text{Re} \left[V(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[-2jA \sin(\beta z) (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \right] = 2A \sin(\beta z) \sin(\omega t)$$

$$i(z, t) = \text{Re} \left[I(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\frac{2A}{Z_c} \cos(\beta z) (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \right] = \frac{2A}{Z_c} \cos(\beta z) \cos(\omega t)$$

Corriente y tensión también están desfasados ($\pi/2$) en el tiempo. Para $t = 0$ resulta:

$$v(z, t) = 0; \quad i(z, t) = \frac{2A}{Z_c} \cos(\beta z)$$

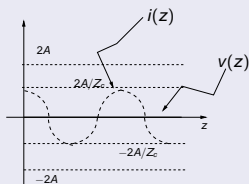


Figura: Distribución de tensión y corriente en $t = 0$

Evolución temporal

Según la expresión anterior la corriente evoluciona hasta hacerse cero entre $t = 0$ y $t = T/4$. Para $t = T/4$, tenemos que $\omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$v(z, t) = 2A \sin(\beta z); \quad i(z, t) = 0$$

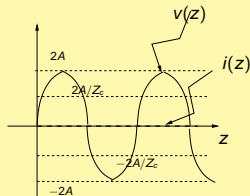


Figura: Distribución de tensión y corriente en $t = T/4$

La tensión evoluciona desde cero hasta obtener lo que se ve en la última figura, la corriente evoluciona desde la figura de la izquierda hasta cero.

Onda estacionaria producida por una impedancia genérica

Impedancia genérica

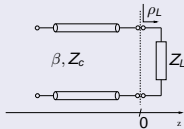


Figura: Onda estacionaria producida por una impedancia cualquiera Z_L

$$\begin{aligned} V(z) &= Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z} = Ae^{-j\beta z} \left(1 + \frac{B}{A} e^{j2\beta z} \right) \\ &= Ae^{-j\beta z} \left(1 + \rho_L e^{j2\beta z} \right) \end{aligned}$$

El coeficiente de reflexión es en general un complejo $\rho_L = |\rho_L| e^{j\theta_L}$, por lo que podemos escribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} V(z) &= Ae^{-j\beta z} \left(1 + |\rho_L| e^{j(2\beta z + \theta_L)} \right) \\ &= Ae^{-j\beta z} \left[1 + |\rho_L| \cos(2\beta z + \theta_L) \right. \\ &\quad \left. + j|\rho_L| \sin(2\beta z + \theta_L) \right] \end{aligned}$$

Onda Estacionaria

Queremos hallar el **módulo de la tensión**:

$$\begin{aligned} |V(z)|^2 &= |A|^2 \left[\left(1 + |\rho_L| \cos(2\beta z + \theta_L) \right)^2 + |\rho_L|^2 \sin^2(2\beta z + \theta_L) \right] \\ &= |A|^2 \left[1 + |\rho_L|^2 \cos^2(2\beta z + \theta_L) \right. \\ &\quad \left. + 2|\rho_L| \cos(2\beta z + \theta_L) + |\rho_L|^2 \sin^2(2\beta z + \theta_L) \right] \\ &= |A|^2 \left[1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(2\beta z + \theta_L) \right] \end{aligned}$$

El **valor máximo** en función de z se obtiene cuando:

$$\begin{aligned} \cos(2\beta z + \theta_L) &= 1 \\ 2\beta z + \theta_L &= \pm 2n\pi \\ 2\beta z &= \pm 2n\pi - \theta_L \\ z &= \frac{\pm 2n\pi - \theta_L}{2\beta} = \frac{\pm 2n\pi - \theta_L}{4\pi} \lambda; n = 0, 1 \end{aligned}$$

El **valor mínimo** se dará para:

$$\begin{aligned} \cos(2\beta z + \theta_L) &= -1 \\ 2\beta z + \theta_L &= \pm(2n - 1)\pi \\ 2\beta z &= \pm(2n - 1)\pi - \theta_L \\ z &= \frac{\pm(2n - 1)\pi - \theta_L}{4\pi} \lambda; n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En las relaciones anteriores **se toma el valor negativo** porque la línea está en $z < 0$.

Onda estacionaria producida por una impedancia genérica

Onda Estacionaria

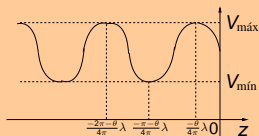


Figura: Onda de tensión estacionaria para una línea acabada en una carga genérica Z_L

$$V_{\text{máx}}^2 = |A|^2 [1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L|]$$

$$V_{\text{mín}}^2 = |A|^2 [1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L|]$$

Si $\rho_L = 0$ entonces $V_{\text{máx}} = V_{\text{mín}}$ y no hay onda estacionaria. No hay onda reflejada, se trata del mejor caso.

$$V_{\text{máx}}^2 = |A|^2 (1 + |\rho_L|)^2 \rightarrow V_{\text{máx}} = (1 + |\rho_L|)|A|$$

$$V_{\text{mín}}^2 = |A|^2 (1 - |\rho_L|)^2 \rightarrow V_{\text{mín}} = (1 - |\rho_L|)|A|$$

Coefficiente de onda estacionaria

Se define el **coeficiente de onda estacionaria** como:

$$S = \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

Sólo obtenemos el módulo, no la fase.

$$|\rho_L| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

Para hallar la fase **hay que medir la distancia al primer máximo o mínimo**. Por ejemplo, si medimos un cero en $z = -L_{\text{mín}}$ entonces:

$$\frac{\pi + \theta}{4\pi} \lambda = L_{\text{mín}}$$

$$\pi + \theta = \frac{4\pi}{\lambda} L_{\text{mín}}$$

Con lo que la **fase del coeficiente de reflexión será:**

$$\theta = \frac{4\pi}{\lambda} L_{\text{mín}} - \pi$$

Punto de Partida

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = -\omega^2 \mu \epsilon V(z)$$

Las pérdidas ahora serán por: $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$. Como el término $(\omega^2 \mu \epsilon)$ resulta complejo, es mejor definir la siguiente constante $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$, de forma que entonces:

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z)$$

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0$$

El **polinomio característico**:

$$x^2 - \gamma^2 = 0; x^2 = \gamma^2; x = \pm \gamma$$

Soluciones

Las **soluciones** serán:

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}$$

Pero, veamos ahora lo que vale la constante γ .

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon; \gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon' \left(1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right) \\ &= \epsilon' (1 - j \tan \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= j\omega \sqrt{\mu \epsilon' (1 - j \tan \delta)} \\ &= j\omega \sqrt{\mu \epsilon'} \sqrt{1 - j \tan \delta} \end{aligned}$$

Línea de transmisión con pérdidas

Línea con pérdidas

Se asumen **pequeñas pérdidas** tan $\delta \ll 1$.
Veamos el desarrollo de Taylor:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots$$

La expresión anterior es válida para $x \ll 1$
(para pequeñas pérdidas, $x = -j \tan \delta$).

$$\sqrt{1 - j \tan \delta} = 1 - \frac{j \tan \delta}{2}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= j\omega \sqrt{\mu\epsilon'} \left(1 - \frac{j \tan \delta}{2}\right) \\ &= \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu\epsilon'} \tan \delta + j\omega \sqrt{\mu\epsilon'}\end{aligned}$$

Luego obtenemos $\gamma = \alpha + j\beta$.

$\alpha \rightarrow$ **Constante de atenuación.**

$\beta \rightarrow$ **Constante de fase.**

Línea con pérdidas

Para una **línea infinita** sabemos que no hay **onda reflejada** y que $B = 0$.

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} = Ae^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

El término $e^{-\gamma z}$ es una exponencial real que atenúa la onda según se propaga. Por esto $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$. El signo debe ser negativo para que la exponencial real sea decreciente. Ahora hallamos la **onda de corriente**:

$$\begin{aligned}\frac{dV(z)}{dz} &= -j\omega\mu I(z) = -A\gamma e^{-\gamma z} + B\gamma e^{\gamma z} \\ &= -\gamma [Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}]\end{aligned}$$

$$I(z) = \frac{\gamma}{j\omega\mu} [Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}]$$

Líneas de transmisión con pérdidas

Impedancia característica

Definimos ahora la **impedancia característica** $Z_c = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$.

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} [Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}]$$

Para **bajas pérdidas** tenemos:

$$Z_c = \frac{j\omega\mu}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}(1 - j\frac{\tan\delta}{2})} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \frac{1 + j\frac{\tan\delta}{2}}{1 + \frac{\tan^2\delta}{4}}$$

El término $\frac{\tan^2\delta}{4}$ es despreciable para $\tan\delta \ll 1$. De esta forma resulta:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + j\frac{\tan\delta}{2}\right)$$

En la expresión anterior **la impedancia característica puede ser compleja cuando existen pérdidas**. Aún así en muchos casos pondremos Z_c real si las pérdidas son bajas. Al igual que antes podemos usar el **coeficiente de reflexión**.

$$V(z) = A [e^{-\gamma z} + \rho_L e^{\gamma z}]$$

$$I(z) = \frac{A}{Z_c} [e^{-\gamma z} - \rho_L e^{\gamma z}]$$

Potencia en líneas de transmisión con pérdidas

Potencia transmitida en la línea

$$\begin{aligned}P_v(z) &= \frac{1}{2} V(z) I^*(z) \\&= \frac{1}{2} A \left[e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \rho_L e^{\alpha z} e^{j\beta z} \right] \cdot \frac{A^*}{Z_c} \left[e^{-\alpha z} e^{j\beta z} - \rho_L^* e^{\alpha z} e^{-j\beta z} \right] \\&= \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c} \left[e^{-2\alpha z} - |\rho_L|^2 e^{2\alpha z} + \rho_L e^{j2\beta z} - \rho_L^* e^{-j2\beta z} \right]\end{aligned}$$

La **potencia media o activa** será:

$$P_m(z) = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c} \left[e^{-2\alpha z} - |\rho_L|^2 e^{2\alpha z} \right] = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c} e^{-2\alpha z} \left[1 - |\rho(z)|^2 \right]$$

La **potencia incidente** será:

$$P_i(z) = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c} e^{-2\alpha z}$$

Por otra parte, la **potencia reflejada** es:

$$P_r(z) = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c} |\rho_L|^2 e^{2\alpha z}$$

La **potencia incidente se atenúa debido al término $e^{-2\alpha z}$** . Ahora hay que tener cuidado porque si tomo una línea muy grande me quedo sin potencia.

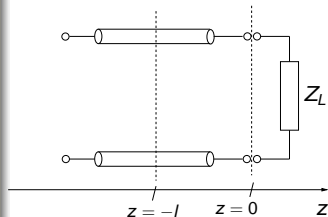


Figura: Atenuación en una línea cargada con Z_L .

Coefficiente de reflexión al alejarse de la carga

$$\rho(z=0) = \rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$$

$$\rho(z=-l) = \frac{Be^{-\gamma l}}{Ae^{\gamma l}} = \frac{B}{A}e^{-2\gamma l} = \frac{B}{A}e^{-2\alpha l}e^{-2j\beta l} = \rho_L e^{-2\alpha l}e^{-2j\beta l}$$

$$|\rho(z=-l)| = |\rho_L|e^{-2\alpha l}$$

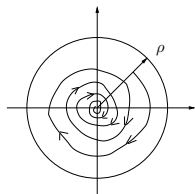


Figura: Atenuación del coeficiente de reflexión ρ a lo largo de la línea. Las flechas indican el sentido de giro.

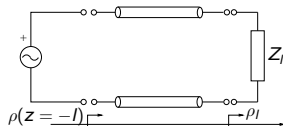


Figura: La potencia que no se refleja es porque se pierde en la línea. No hay reflexión a la entrada, ya que toda la potencia que entra se atenúa antes de llegar a la carga. La energía se disipa en la línea de transmisión.

Línea de transmisión con generador y carga

Resolución circuito total

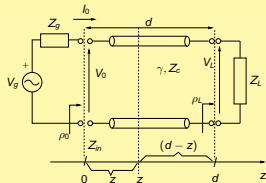


Figura: Problema de generador y una carga

En el punto de generador $\rho_0 = \frac{B}{A} = \frac{Z_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c}$.

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} [Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}]$$

En la carga,

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$$

Resolución circuito total

Si muevo este coeficiente **hacia el generador** obtengo:

$$\rho(z) = \rho_L e^{-j2\beta(d-z)}$$

para $z = 0$ obtenemos $\rho(z = 0) = \rho_0 = \rho_L e^{-j2\beta d}$. En el generador,

$$V_{(z=0)} = V_0 = A \left(1 + \frac{B}{A}\right) = A(1 + \rho_0) = A \frac{2Z_{in}}{Z_{in} + Z_c}$$

$$I_{(z=0)} = I_0 = \frac{A}{Z_c} \left(1 - \frac{B}{A}\right) = \frac{A}{Z_c} (1 - \rho_0)$$

En el **generador** tenemos:

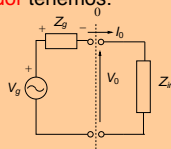


Figura: Problema equivalente

$$V_0 = A \frac{2Z_{in}}{Z_{in} + Z_c} = V_g \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g} \Rightarrow A = \frac{V_g}{2} \frac{Z_{in} + Z_c}{Z_{in} + Z_g}$$

Línea de transmisión con generador y carga

Resolución circuito total

$$V_g = I_0 Z_g + V_0$$

Introduzco los valores de V_0 y de I_0 en la ecuación.

$$\begin{aligned} V_g &= Z_g \frac{A}{Z_c} (1 - \rho_0) + A(1 + \rho_0) = A \left[1 + \rho_0 + \frac{Z_g}{Z_c} (1 - \rho_0) \right] \\ &= \frac{A}{Z_c} (Z_c + Z_c \rho_0 + Z_g - Z_g \rho_0) = \frac{A}{Z_c} [Z_c + Z_g - \rho_0 (Z_g - Z_c)] \\ &= A \frac{Z_g + Z_c}{Z_c} \left[1 - \rho_0 \frac{Z_g - Z_c}{Z_g + Z_c} \right] \end{aligned}$$

Defino un **coeficiente de reflexión** que mira hacia el generador:

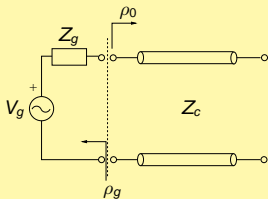


Figura: Coeficiente de reflexión hacia el generador ρ_g

Resolución circuito total

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_c}{Z_g + Z_c}$$

$$V_g = A \frac{Z_g + Z_c}{Z_c} (1 - \rho_0 \rho_g)$$

$$A = V_g \frac{Z_c}{Z_g + Z_c} \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_g}$$

$$1 - \rho_g = 1 - \frac{Z_g - Z_c}{Z_g + Z_c} = \frac{2Z_c}{Z_g + Z_c}$$

$$A = \frac{V_g}{2} \frac{1 - \rho_g}{1 - \rho_0 \rho_g}$$

Si $Z_g = Z_c$ entonces $\rho_g = 0$ y entonces $A = \frac{V_g}{2}$ que es lo que obtuvimos antes.

Línea de transmisión con generador y carga

Atenuación

Se define la atenuación de un cable en neperios de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} At|_{nep} &= \ln \sqrt{\frac{\text{Potencia que entrega en la línea}}{\text{Potencia en un punto a una distancia } Z}} \\ &= \ln \sqrt{\frac{P(z=0)}{P(z)}} \end{aligned}$$

Suponemos una línea sin reflexión $|\rho_l| = 0$.

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c} e^{-2\alpha z}$$

La potencia que entra en la línea $z = 0$.

$$P(z=0) = \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_c}$$

Para líneas adaptadas,

$$P(z) = P(z=0) e^{-2\alpha z}$$

$$At|_{nep} = \ln \sqrt{\frac{1/2 |A|^2 / Z_c}{1/2 |A|^2 / Z_c} e^{2\alpha z}} = \ln e^{\alpha z} = \alpha z$$

Atenuación

De la expresión anterior resulta que:

$$\alpha = \frac{At|_{nep}}{z} \quad (\text{nep/m})$$

Luego α es la atenuación en neperios de la línea por unidad de longitud. La atenuación también puede medirse en dB.

$$\begin{aligned} At|_{dB} &= 20 \log_{10} \sqrt{\frac{P(z=0)}{P(z)}} = 10 \log_{10} \left[\frac{P(z=0)}{P(z)} \right] \\ &= 10 \log_{10} (e^{2\alpha z}) = 20 \alpha z (\log_{10} e) = \alpha z 8,686 \end{aligned}$$

$$At|_{dB} = At|_{nep} 8,686$$

La expresión anterior es la forma de convertir la atenuación en neperios en atenuación en dBs. Es un parámetro importante a la hora de planificar sistemas de transmisión. Llamando,

$$\alpha (\text{nep/m}) = \frac{At|_{nep}}{z}$$

$$\alpha (\text{dB/m}) = \frac{At|_{dB}}{z}$$

$$\alpha (\text{dB/m}) = \alpha (\text{nep/m}) 8,686$$

En las ecuaciones que hemos visto hay que operar en (nep/m) para α .

Línea acabada en cortocircuito

Línea acabada en cortocircuito

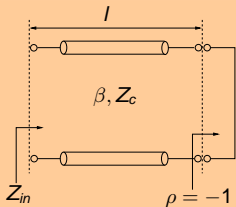


Figura: Línea de transmisión de longitud l acabada en cortocircuito

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)}$$

Si $Z_L = 0$ se tiene que:

$$Z_{in} = Z_c \frac{jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c} = jZ_c \tan(\beta l)$$

Si $l = \frac{\lambda}{4}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{4}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \infty$

Impedancia y admitancia

Esto es lo que ocurre en un circuito LC paralelo en resonancia:

$$\begin{aligned} Y_{in} &= j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\ &= j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \end{aligned}$$

De la ecuación resulta que:

$$Z_{in} = \frac{\omega L}{(\omega^2 LC - 1) j}$$

en $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tenemos que $Z_{in} \rightarrow \infty$. La **condición** $l = \lambda/4$ sólo ocurre a una frecuencia, alrededor de esa frecuencia la línea se comporta como un **circuito resonante paralelo**.

Línea en circuito abierto

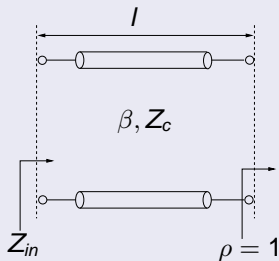


Figura: Línea de transmisión de longitud l acabada en circuito abierto

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)}$$

Impedancia y admitancia

Si $Z_L \rightarrow \infty$ resulta:

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L}{jZ_L \tan(\beta l)} = \frac{Z_c}{j \tan(\beta l)}$$

De la ecuación tenemos que:

$$Y_{in} = jY_c \tan(\beta l)$$

Para $l = \lambda/4$ se comporta como un **circuito resonante serie**. Para $l = \lambda/4$, $Y_{in} \rightarrow \infty$, $Z_{in} = 0$. Luego la línea alrededor de la frecuencia en la que $l \simeq \lambda/4$ se comporta como un **resonador en serie**.

Características

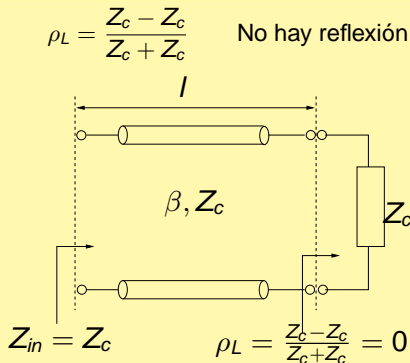


Figura: Línea adaptada.

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_c + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_c \tan(\beta l)} = Z_c \quad \text{Condición de adaptación}$$

Esta situación $Z_L = Z_c$ es la **misma que en una línea infinita al no existir reflexión.**

Línea transformadora en $\lambda/4$

Transformador en $\lambda/4$

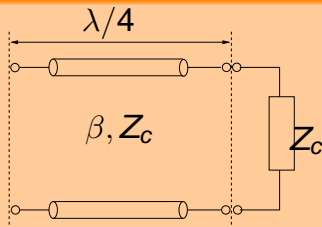


Figura: Línea en $\lambda/4$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)}$$

Adaptación de impedancias

Se cumple que $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \pi/2$ y $\tan(\pi/2) \rightarrow \infty$.

$$Z_{in} = Z_c \frac{jZ_c \tan(\beta l)}{jZ_L \tan(\beta l)} = \frac{Z_c^2}{Z_L}$$

$$Z_{in} = \frac{Z_c^2}{Z_L}$$

Transformador de impedancias en $\lambda/4$. Podemos **usar este transformador para adaptar impedancias**.

Línea transformadora en $\lambda/4$

Adaptación de impedancias

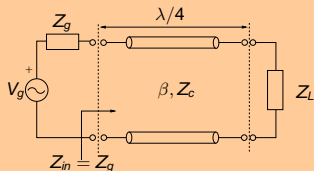


Figura: Transformador de impedancias con línea en $\lambda/4$.

$$Z_{in} = Z_g$$

Queremos esto para que la **potencia entregada sea máxima**. Por tanto:

$$Z_{in} = Z_g$$

$$Z_c = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_L} = \sqrt{Z_g \cdot Z_L}$$

Adaptación de impedancias

Escogiendo una línea de la impedancia característica anterior adaptamos el circuito. Se tiene un **circuito equivalente** como el representado en la figura.

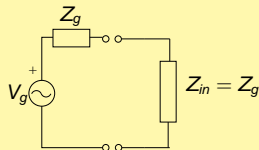


Figura: Circuito equivalente del transformador en $\lambda/4$

Luego vemos la importancia del **adaptador de impedancias para evitar reflexiones**.

Introducción

Para ayudarnos en este proceso de adaptación podemos utilizar la llamada **Carta de Smith**. La carta de Smith es simplemente la **representación en el plano complejo del coeficiente de reflexión ρ** , donde además **se representan la parte real e imaginaria de impedancias**, con el fin de adaptar en los problemas de adaptación de impedancias. En el **plano de ρ es interesante ver impedancias**.

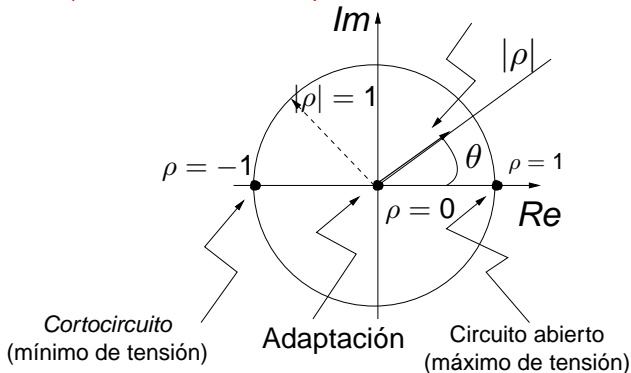


Figura: Coeficiente de reflexión en el plano complejo

Representación de impedancias en el plano complejo

Representación de impedancias

Para representar impedancias en este plano tomamos la ecuación que liga el coeficiente de reflexión con las impedancias.

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$$

Si trabajamos con **impedancias normalizadas** (\bar{Z}_L) respecto al de la impedancia característica de la línea tenemos:

$$\rho = \frac{\bar{Z}_L - 1}{\bar{Z}_L + 1}$$

A partir de esta expresión obtenemos las siguientes relaciones:

$$\rho \bar{Z}_L + \rho = \bar{Z}_L - 1$$

$$\rho + 1 = \bar{Z}_L(1 - \rho)$$

$$\bar{Z}_L = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Representación de impedancias

Ahora consideramos \bar{Z}_L y ρ complejos:

$$\bar{Z}_L = x + jy$$

$$\rho = \mu + j\nu$$

$$\begin{aligned} x + jy &= \frac{1 + \mu + j\nu}{1 - \mu - j\nu} = \frac{(1 + \mu + j\nu)(1 - \mu + j\nu)}{(1 - \mu)^2 + \nu^2} \\ &= \frac{(1 + \mu)(1 - \mu) - \nu^2 + j\nu[(1 - \mu) + (1 + \mu)]}{(1 - \mu)^2 + \nu^2} \\ &= \frac{1 - \mu^2 - \nu^2 + j\nu 2}{(1 - \mu)^2 + \nu^2} \end{aligned}$$

A partir de la relación anterior, igualando parte real e imaginaria tenemos:

$$x = \frac{1 - (\mu^2 + \nu^2)}{(1 - \mu)^2 + \nu^2}$$

$$y = \frac{2\nu}{(1 - \mu)^2 + \nu^2}$$

Parte real

Curva parte real

Vamos a suponer $x = cte$, y vemos que curva resulta:

$$(1 - \mu)^2 x + x v^2 = 1 - (\mu^2 + v^2)$$

$$(1 + \mu^2 - 2\mu)x + x v^2 = 1 - \mu^2 - v^2$$

$$x + x\mu^2 - 2\mu x + x v^2 = 1 - \mu^2 - v^2$$

$$(x + 1)\mu^2 - 2\mu x + (x + 1)v^2 = 1 - x$$

$$\mu^2 - 2\mu \frac{x}{(x + 1)} + v^2 = \frac{1 - x}{1 + x}$$

En vista de este resultados vamos a calcular:

$$\left(\mu - \frac{x}{x + 1}\right)^2 = \mu^2 - 2\mu \frac{x}{x + 1} + \frac{x^2}{(x + 1)^2}$$

$$\left(\mu - \frac{x}{x + 1}\right)^2 - \frac{x^2}{(x + 1)^2} = \mu^2 - 2\mu \frac{x}{x + 1}$$

$$\left(\mu - \frac{x}{x + 1}\right)^2 + v^2 = \frac{1 - x}{1 + x} + \frac{x^2}{(x + 1)^2}$$

$$\frac{1 - x}{1 + x} + \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(1 - x)(1 + x) + x^2}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2 + x^2}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

Parte real

$$\left(\mu - \frac{x}{x + 1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

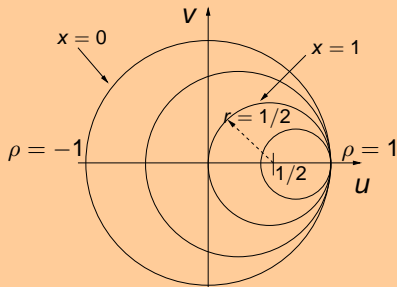


Figura: Carta de Smith, parte real.

En el plano complejo de $\rho = \mu + jv$ esto es un círculo de centro $\left(\frac{x}{x+1}, 0\right)$ y radio $r = \frac{1}{(x+1)}$. Luego valores de **impedancia de parte real constante** se transforman en estos círculos.

Obtención de la curva

$$y(1 - \mu)^2 + yv^2 = 2v$$

Tomamos $y = cte$, parte imaginaria de la impedancia constante y vemos la curva en el plano (μ, v) :

$$(\mu - 1)^2 + v^2 - \frac{2v}{y} = 0$$

En virtud de esto calculamos:

$$\left(v - \frac{1}{y}\right)^2 = v^2 - 2\frac{v}{y} + \frac{1}{y^2}$$

$$\left(v - \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{1}{y^2} = v^2 - 2\frac{v}{y}$$

$$(\mu - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2}$$

Obtención de la curva

Tenemos un círculo con centro $(1, 1/y)$ y con radio $r = \frac{1}{y^2}$.

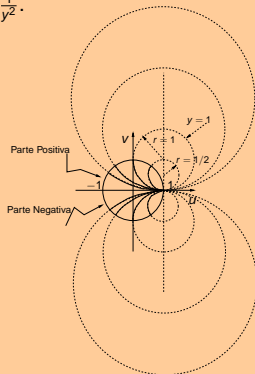


Figura: Carta de Smith, parte imaginaria

La **parte imaginaria** de una impedancia puede ser negativa.

Ejemplo de línea de transmisión

Utilización de la carta de Smith

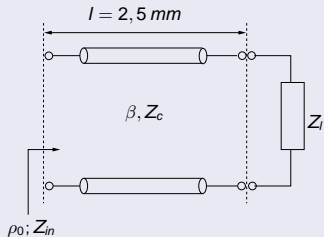


Figura: Línea cargada como ejemplo de utilización de la carta de Smith.

- ⇒ Utilizaremos la siguiente **configuración para la línea**:
 $Z_L = 65 + j37,5$, $Z_c = 50\Omega$, $f = 10$ GHz, $\lambda = \frac{30}{f(\text{GHz})}$ (cm), $\lambda = \frac{30}{10} = 3$ cm, $l = \lambda/12 = 30/12 = 2,5$ mm.
- ⇒ En primer lugar normalizamos la **impedancia de carga** $\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_c} = 1,3 + j0,75$. Vamos a situar esta impedancia en la carta de Smith.
- ⇒ El **coeficiente de reflexión** ρ_L lo podemos calcular **midiendo la longitud y la fase**. Las longitudes se escriben en **fracciones de longitud de onda**.

Ejemplo de línea

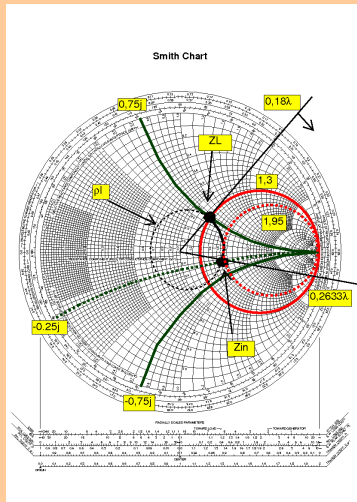


Figura: Resolución con carta de Smith

Ejemplo de línea de transmisión

Utilización de la carta de Smith

Ahora debo desplazarme hasta el generador y sabemos que el coeficiente de reflexión ρ lo que hace es girar (suponiendo que no hay pérdidas). El giro es en el sentido de las agujas del reloj. Vemos que distancia debo moverme. Las longitudes son $\lambda = 30/10 = 3$ cm y $\lambda = 30$ mm, hay que **expresarlas en fracciones de la longitud de onda** resultando $l/\lambda = \frac{2,5}{30} = \frac{1}{12}$ y $l = \frac{\lambda}{12} = 0,0833\lambda$. Luego debo girar hasta el punto:

$$0,18\lambda + 0,0833\lambda = 0,2633\lambda$$

Luego $\bar{Z}_{in} = 1,95 - j0,25$, $Z_{in} = 97,5 - j12,5$. El **coeficiente de reflexión ρ** se obtiene midiendo el nuevo vector que da Z_{in} . Vamos a calcular el coeficiente de reflexión en la entrada. El módulo es el mismo y vale la longitud del vector (no hay pérdidas). La fase en fracciones de λ es: $0,2633\lambda - 0,25\lambda = 0,0133\lambda$. Veamos cuanto es el ángulo: $2\beta l = 2\frac{2\pi}{\lambda}0,0133\lambda = 0,052\pi \simeq -9,6^\circ$, es una fase negativa. Se ve que si $l = \lambda/2$, $2\beta l = 2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = 2\pi$, se tiene un **giro completo en la carta de Smith**.

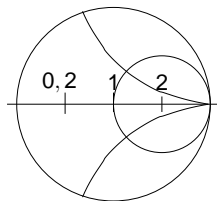


Figura: Impedancias reales carta de Smith

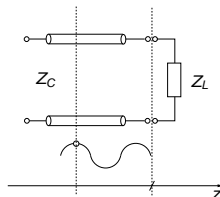


Figura: Onda estacionaria en una línea con una carga Z_L

Cuando existe **desadaptación de impedancias se produce una onda estacionaria**. Nosotros hemos calculado los puntos máximos y mínimos. Sabemos que en un **máximo de tensión**, la tensión vale: $V_{\text{máx}} = A(1 + |\rho|)$ y además en este punto hay un **mínimo de corriente** que vale:

$$I_{\text{mín}} = \frac{A}{Z_c}(1 - |\rho|).$$

La impedancia en este punto vale:

$$Z_{in} = \frac{V_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} Z_c \quad \text{Obtenemos una impedancia real}$$

$$\bar{Z}_{in} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = S \quad \text{Precisamente, el coeficiente de onda estacionaria}$$

La impedancia es real y mayor que uno. Luego, la **impedancia es un máximo de tensión**.

Onda Estacionaria

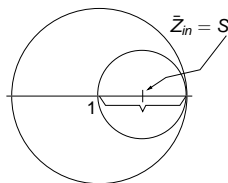


Figura: Tramo donde se encuentran los puntos **máximos de tensión**, además del coeficiente de onda estacionaria

Se encontrará en esta región. En este tramo se encuentran las impedancias en los puntos máximos de tensión. Además da el **coeficiente de onda estacionaria**. Vemos en un punto mínimo de tensión:

$$V_{\min} = |A|(1 - |\rho|); I_{\max} = \frac{|A|}{Z_c}(1 + |\rho|)$$
$$Z_{in} = \frac{V_{\min}}{I_{\max}} = Z_c \frac{1 - |\rho|}{1 + |\rho|}; \bar{Z}_{in} = \frac{1 - |\rho|}{1 + |\rho|} = \frac{1}{S}$$

Vemos que la **impedancia en un mínimo es real y menor que uno**, luego estará la impedancia en (ver la figura). En este tramo se encuentran las **impedancias en los mínimos de tensión**.

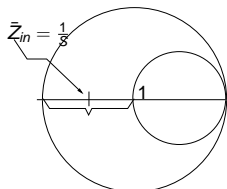


Figura: Tramo en el que se encuentran las impedancias en los **mínimos de tensión**

Ejemplo de utilización de la carta de Smith

Ejemplo

Se mide un **coeficiente de onda estacionaria** $S = \frac{|V_{\text{máx}}|}{|V_{\text{mín}}|} = 2,5$. Además se mide un mínimo que se encuentra a $0,5833\lambda$ de la carga. Para medir el valor de la impedancia, debo desplazarme $0,5833\lambda$ desde el mínimo hasta llegar a la carga. Como $0,5833\lambda$ es mayor que $0,5\lambda$, suponiendo $0,5\lambda$ dar una vuelta entera, lo que haremos es dar una vuelta entera $0,5\lambda$ más lo que quede hasta completar la distancia de $0,5833\lambda$ hasta llegar a la carga.

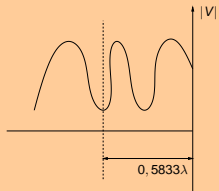


Figura: Desplazamiento de $0,5833\lambda$ hasta llegar a la carga

Representación Carta de Smith

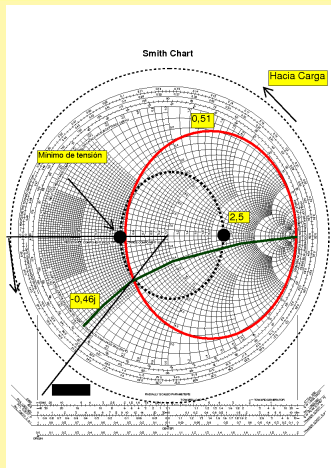


Figura: Resolución del problema encontrando la impedancia de entrada con la carta de Smith

Ejemplo de utilización de la carta de Smith

Análisis carta de Smith

$$0,5\lambda + x\lambda = 0,5833\lambda$$
$$x = (0,5833 - 0,5)\lambda = 0,0833\lambda$$

$$\bar{Z}_L = 0,51 - j0,46 \quad \text{para } Z_c = 50$$
$$Z_L = (25,5 - j23)\Omega \quad \text{Impedancia capacitiva}$$

En la carta de Smith **también podemos usar admitancias:**

$$\rho = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = \frac{1/Y_L - 1/Y_c}{1/Y_L + 1/Y_c}$$
$$= \frac{Y_c - Y_L}{Y_c + Y_L} = -\frac{Y_L - Y_c}{Y_L + Y_c}$$

Podemos reemplazar impedancias por admitancias, pero entonces hay que **cambiar el signo al coeficiente de reflexión ρ** lo que supone **añadir 180°**.

Representación

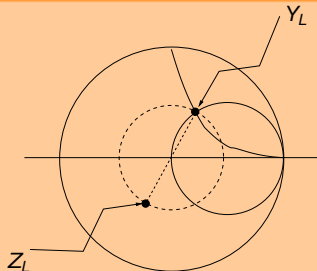


Figura: Resolución del problema con admitancias. Se añaden 180° al coeficiente de reflexión

Carta de Smith con elementos concentrados

Impedancia de entrada

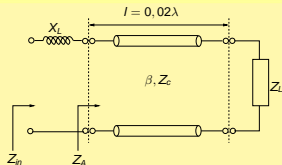


Figura: Línea cargada con inductancia concentrada a la entrada X_L

El valor de la inductancia concentrada es $X_L = 70$, que normalizada es $\bar{X}_L = 1,4\Omega$. Por otra parte, la impedancia de carga normalizada es $\bar{Z}_L = 0,5 + j0,4$. Ahora me muevo una longitud $0,02\lambda$. $(0,073 + 0,02)\lambda = 0,093\lambda$ hay que moverse hacia el generador. $\bar{Z}_A = 0,62 + j0,55$, $Z_{in} = jX_L + 0,62 + j0,55 = 0,62 + j(0,55 + X_L)$. Misma parte real y la parte imaginaria varía $Z_{in} = 0,62 + j1,95\Omega$. La resolución se obtiene manejando la carta de Smith como se muestra en la figura.

Carta de Smith

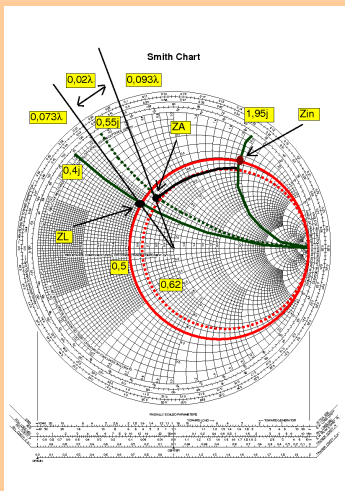


Figura: Resolución con la carta de Smith

Carta de Smith para adaptación de impedancias

Adaptación de impedancias

La carta de Smith también sirve para adaptar impedancias.

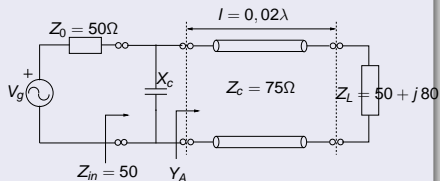


Figura: Línea cargada con una capacitancia concentrada a la entrada X_c

Adaptación de impedancias

Los datos de configuración de la línea son $f = 1$ GHz, $Z_c = \frac{1}{j\omega C} = -jX_c$, $Y_c = -\frac{1}{-jX_c} = jB_c$. Hay que **normalizar** con respecto de la impedancia característica de la línea.

$$\bar{Z}_L = \frac{50 + j80}{75} = 0,67 + j1,07$$

Queremos llegar a una impedancia de entrada normalizada de $\bar{Z}_{in} = 50/75 = 0,67$. En primer lugar vemos que es **más sencillo trabajar con admitancias** ya que $Y_{in} = jB_c + Y_A$. ¿Cómo se podría hacer un condensador en RF?, con una línea terminada en circuito abierto. Tenemos $\bar{Y}_{in} = 1,5 = \frac{1}{\bar{Z}_{in}}$, luego $\bar{Y}_{in} = j\bar{B}_c + \bar{Y}_A = 1,5$, $\bar{Y}_A = 1,5 - j\bar{B}_c$.

Carta de Smith para adaptación de impedancias

Adaptación de impedancias

Luego \bar{Y}_A debe tener parte real 1,5, además \bar{Y}_A se obtiene moviendo Y_L una longitud determinada por la línea. Moveré Y_L hasta encontrar el círculo de parte real 1,5. Tengo dos posibilidades, sin embargo, vemos que \bar{Y}_A debe tener parte imaginaria negativa, luego debemos tomar la segunda posibilidad. Sale

$\bar{Y}_A = 1,5 - j1,7$, entonces vemos que $\bar{B}_C = 1,7$,
 $Z_{com} = \frac{1}{j\omega C}$, $Y_{com} = j\omega C$, $\bar{Y}_{com} = j\bar{B}_C$.

$\bar{Z} = \frac{Z}{Z_C} = \frac{1/Y}{1/Y_C} = 1/\bar{Y}$, $1/\bar{Y} = \frac{Y_C}{Y}$. Vemos que \bar{Y} también se normaliza con admitancia.

Luego, $\bar{B}_C = \frac{B_C}{Y_C}$, $B_C = \bar{B}_C \cdot Y_C$, $B_C = 1,7/75$.

Finalmente se tiene: $Y_{cond} = j\omega C = jB_C$, $B_C = \omega C$,
 $\frac{1,7}{75} = 2\pi f C$, $C = \frac{1,7}{75 \cdot 2\pi f} = \frac{1,7}{75 \cdot 2\pi f} = 3,6 \text{ pF}$. Se

puede ver el **movimiento reflejado en la carta de Smith**.

Adaptación de impedancias

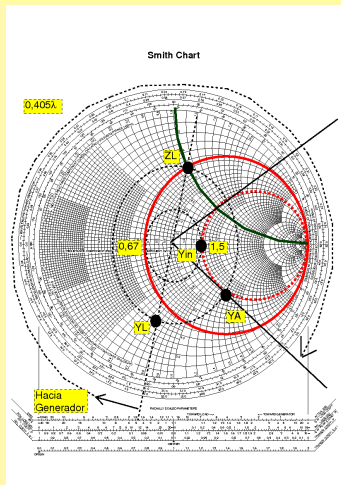


Figura: Adaptación de impedancias con carta de Smith