Ondas Electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell y campos electromagnéticos con variación temporal

Fernando D. Quesada Pereira[1]

[1]Grados de Ingeniería Telemática y de Sistemas de Telecomunicación
Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Universidad Politécnica de Cartagena

5 de octubre de 2011

Índice de Contenidos

Punto de partida de la asignatura

Análisis hecho en Sistemas y Circuitos

- Hasta ahora sólo se han estudiado circuitos sin variación espacial como bobinas, condensadores y resistencias.
- La corriente y la tensión sólo dependian del tiempo ($i(t)$,$v(t)$), y no de las variables espaciales.
- Se realizaba también un análisis fasorial, estudiando los circuitos en frecuencia tras la aplicación de la transformada de Fourier (T.F.) (se estudia en Sistemas Lineales).

$$v(t) \rightarrow V(\omega) \qquad \text{(Relación tiempo-frecuencia mediante T.F.)}$$

$$i(t) \rightarrow I(\omega) \qquad \text{(Relación tiempo-frecuencia mediante T.F.)}$$

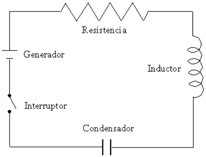

Figura: Circuito eléctrico (no depende de variables espaciales)

Punto de partida de la asignatura

Análisis en Ondas Electromagnéticas

- Los fenómenos eléctricos no tienen lugar en un punto del espacio, sino en un volumen o región de éste. Se comienzan a introducir las variaciones con las coordenadas espaciales de los fenómenos eléctricos. En lugar de medir voltios (*V*) para la tensión se miden voltios por metro (*V/m*) para el campo eléctrico ($\vec{E}$).

$$v(t)(Vol) \rightarrow \vec{E}(x,y,z,t)\,(V/m) \qquad \text{(Intensidad de Campo eléctrico)}$$

- En cuanto a la intensidad de corriente, ésta pasa de medirse en amperios a medirse en amperios por metro *A/m*, se trata de la (intensidad de campo magnético $\vec{H}$).

$$i(t)(Amp) \rightarrow \vec{H}(x,y,z,t)\,(A/m) \qquad \text{(Intensidad de Campo magnético)}$$

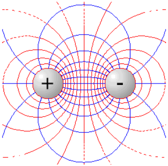

Figura: Campos electromagnéticos(Dependen de variables espaciales)

Definición de campo eléctrico

Campo Eléctrico

- Dirigido a partir de la fuerza (Newton) que experimentan dos cargas entre sí.
- La fuerza tiene una determinada dirección.
- El campo eléctrico (y también el magnético) es una magnitud vectorial (campos de fuerzas).
- La fuerza entre dos cargas viene ejercida por la ley de Coulomb.

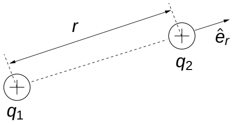

Figura: Ley de Coulomb (fuerza entre cargas).

$$\vec{F} = \frac{q_1 \, q_2}{4\pi\epsilon_0 \, r^2} \hat{e}_r$$

Campo eléctrico como fuerza por unidad de carga en cada punto del espacio:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \, r^2} \hat{e}_r$$

Se define $\epsilon_0 \approx 1/(36\pi)10^{-9}$ como la permitividad del vacío o la constante dieléctrica del vacío (*F/m*).

Definición de Campo Magnético

Campo magnético

- El campo magnético se define de manera similar al eléctrico (es también una magnitud vectorial). La magnitud fundamental es la densidad de campo magnético o flujo magnético $\vec{B}$.
- El flujo magnético se mide en $(Weber/m^2)$.
- La fuerza a la que está sometida una carga q en un campo electromagnético es:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ (Newton) \quad \text{Fuerza elestrostática y de Lorentz}$$

- $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{e}_v$ es el vector velocidad de la carga, siendo $\hat{e}_v$ el vector unitario en la dirección de movimiento y $|\vec{v}|$ la magnitud de la velocidad.
- El campo magnético se relaciona con el flujo magnético como:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \quad (A/m)$$

- $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ es la permeabilidad del vacío o constante magnética del vacío (H/m) (Henrios por metro).

Ecuaciones de Maxwell

- Fueron formuladas en 1873 James Clerk Maxwell, sintetizan el trabajo de investigadores como Ampere, Faraday o Gauss, y el suyo propio.
- El formalismo matemático actual más simple fue introducido por Oliver Heaviside de 1885 a 1887.
- La teoría de Maxwell predecía la existencia de ondas electromagnéticas, lo cual fue probado experimentalmente por Hertz.
- Introducimos cantidad conocida como densidad de campo eléctrico o flujo eléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad ; \quad (C/m^2)$$

- De nuevo una magnitud vectorial (imprescindible dominar el análisis vectorial).

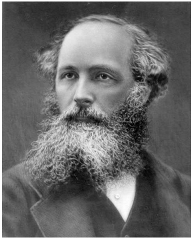

Figura: James Clerk Maxwell

Figura: Heinrich Hertz

Índice de Contenidos

Fuentes rotacionales y divergentes

En todo campo de fuerzas vectorial existen dos tipos de fuentes: rotacionales y divergentes.

Fuentes rotacionales

Las fuentes de carácter rotacional hacen girar el campo ($\nabla \times \vec{A}$, rotacional de una función vectorial).

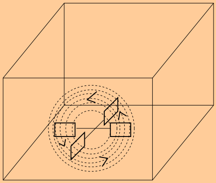

Figura: Concepto de rotacional.

La fuente rotacional para el campo eléctrico es la variación del campo magnético con el tiempo (ley de Faraday): $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Fuentes divergentes

Las fuentes de carácter divergente hacen converger y diverger al campo ($\nabla \cdot \vec{A}$, divergencia de una función vectorial).

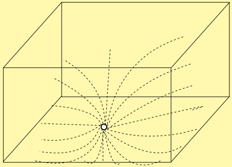

Figura: Concepto de divergencia.

La carga es la fuente divergente para el campo eléctrico. Se tiene que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, siendo ρ la densidad de carga (C/m^3 si es volumétrica)

Fuentes rotacionales y divergentes

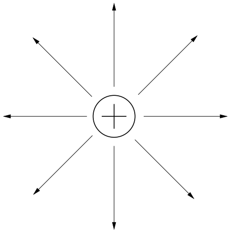

Figura: Carga como fuente divergente del campo eléctrico

Fuentes del campo magnético

- Las fuentes rotacionales para el campo magnético:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v \text{ (Ley de Ampere)}$$

- $\vec{J}_v$ es densidad de corriente volumétrica A/m^2 (existen tres tipos diferentes de corriente eléctrica).
- Las cargas magnéticas serían las fuentes de tipo divergente para el campo magnético. No existen en la naturaleza, siendo normalmente $\rho_m = 0$:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Tipos de Corriente Eléctrica

Tipos de corriente eléctrica

- $\vec{J}_i \rightarrow$ **Corriente de conducción** ocasionada por el movimiento de cargas en el metal (tipo de corriente de circuitos).
- $\vec{J}_c \rightarrow$ **Corriente de convección** correspondiente al movimiento de cargas en el vacío (ej. tubos de vacío de televisiones antiguas).
- $\vec{J}_d \rightarrow$ **Corriente de desplazamiento** generada de forma inducida por una variación temporal del campo eléctrico (ej. condensadores). $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (A/m^2). Término introducido por Maxwell en sus ecuaciones.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_i + \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{ley de Ampere distinguiendo corrientes}$$

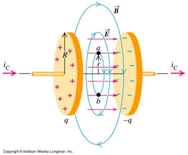

Figura: Corriente desplazamiento en condensador

Ecuaciones de Maxwell

Sintetizando se llega a cuatro ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Maxwell y que describen todas las interacciones eléctricas y magnéticas:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad \text{Ley de Ampere}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad \text{Ley de Gauss}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Los campos electromagnéticos dependen tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo.

Ley de Conservación de la carga

Deducción

Se deduce como combinación de las ecuaciones de Maxwell. Si se toma la divergencia de la ley de Ampere tenemos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_v$$

La divergencia de un rotacional es siempre cero:$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$, por lo que resulta:

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_v = 0$$

De la ley de Gauss sabemos que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$, por lo que:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_v = 0$$

La variación temporal de la carga se debe a que está se movido fuera de la región tomada en consideración creando corrientes.

Interpretación de la ley de variación de la carga

Integramos la ley de conservación en una región cerrada donde existan cargas:

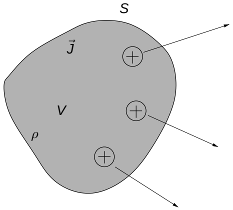

Figura: Cargas dentro de un volumen V delimitado por una superficie S.

Desarrollo

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}_V \, dV + \int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} \, dV = 0$$

Tras la aplicación del teorema de Gauss la integral de volumen de la divergencia se transforma en una integral de superficie:

$$\int_S \vec{J}_V \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ - \int_V \rho_v \, dV \right\}$$

Donde el primer término de la igual es la corriente I total que sale por la superficie S (flujo), mientras que el segundo es la variación carga total Q en el volumen V.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La variación de la carga es la corriente como se estudió en sistemas y circuitos.

Índice de Contenidos

Sistema de coordenadas cartesiano

Localización en Cartesianas

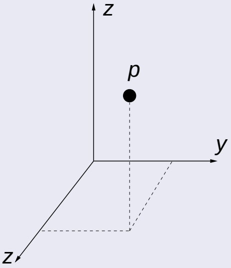

Figura: Sistema de coordenadas cartesiano.

Vector de posición

$$\vec{R} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

En este caso los vectores directores unitarios ($\hat{e}_x$,$\hat{e}_y$,$\hat{e}_z$) no cambian de dirección sea cual sea el punto P que consideremos.

Los diferenciales de longitud, superficie y volumen quedan de la forma en los casos más simples:

$$d\vec{l} = dx\hat{x}\ ;\ d\vec{l} = dy\hat{y}\ ;\ d\vec{l} = dz\hat{z}$$

$$d\vec{S} = dxdy\hat{z}; d\vec{S} = dxdz\hat{y}; d\vec{S} = dydz\hat{x}$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

Sistema de coordenadas cilíndrico

Localización en cilíndricas

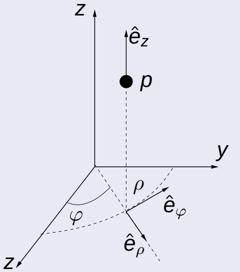

Figura: Sistema de coordenadas cilíndricas

Vector de posición

$$\vec{R} = \rho\hat{e}_\rho + \varphi\hat{e}_\varphi + z\hat{z}$$

La coordenada φ no es una distancia sino un ángulo. El vector unitario $\hat{e}_\varphi$ no es una constante puesto que su dirección cambia (el módulo si que es siempre 1 al ser unitario). Lo mismo sucede con el vector unitario $\hat{e}_\rho$.

Los diferenciales de longitud, superficie y volumen quedan de la forma en los casos más simples:

$$d\vec{l} = d\rho\hat{e}_\rho \,;\ d\vec{l} = \rho d\varphi\hat{e}_\varphi \,;\ d\vec{l} = dz\hat{z}$$

$$d\vec{S} = d\rho dz\hat{e}_\varphi; d\vec{S} = \rho d\varphi dz\hat{e}_\rho; d\vec{S} = \rho d\rho d\varphi\hat{z}$$

$$dV = \rho d\rho\, d\varphi\, dz$$

Sistema de coordenadas esférico

Localización en esféricas

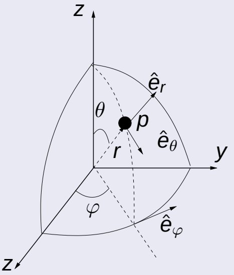

Figura: Sistema de coordenadas esféricas.

Vector de posición

$$\vec{R} = r\hat{e}_r + \varphi\hat{e}_\varphi + \theta\hat{e}_\theta$$

Las coordenadas φ y θ son ángulos y no distancias, mientras que $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$ y $\hat{e}_\theta$ no son constantes, pues su dirección cambia con el punto donde nos encontremos.
Los diferenciales de longitud, superficie y volumen quedan de la forma en los casos más simples:

$$d\vec{l} = dr\hat{e}_r \; ; \; d\vec{l} = r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi \; ; \; d\vec{l} = r\, d\theta\hat{\theta}$$

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta\hat{e}_\rho ; d\vec{S} = r\sin\theta dr d\varphi\hat{e}_\theta ;$$

$$d\vec{S} = rdr\, d\theta\hat{\varphi}$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr\, d\varphi\, d\theta$$

Operador rotacional en los distintos sistemas coordenados

Cartesianas

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Cilíndricas

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{e}_\rho}{\rho} & \hat{e}_\varphi & \frac{\hat{e}_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

esféricas

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{e}_r}{r^2 \sin\theta} & \frac{\hat{e}_\theta}{r \sin\theta} & \frac{\hat{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

Operador gradiente y divergencia en los distintos sistemas coordenados

Cartesianas

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Cilíndricas

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

esféricas

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Fuentes de carga volumétricas, superficiales y lineales

Densidad volumétrica de carga

$$\rho_v \, (C/m^3)$$

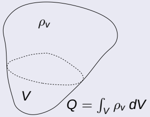

Figura: Carga distribuída en un volumen

Densidad superficial de carga

$$\rho_s \, (C/m^2)$$

$$Q = \int_S \rho_s \, dS$$

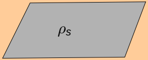

Figura: Carga distribuída en un superficie

Densidad lineal de carga

$$\rho_l \, (C/m)$$

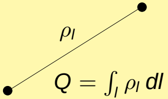

Figura: Carga distribuída en un hilo

Densidad de corriente volumétrica y superficial

Si una densidad tiene carácter vectorial se convierte en densidad de flujo (flujo total que atraviesa una sueperficie o línea)

Densidad volumétrica de corriente

$$\vec{J}_v \; (A/m^2)$$

$$I = \int_S \vec{J}_v \, d\vec{S}$$

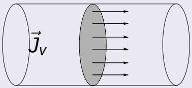

Figura: Corriente en un volumen.

Densidad superficial de corriente

$$\vec{J}_s \; (A/m)$$

$$I = \int_l \vec{J}_s \cdot \hat{e}_n \, dl$$

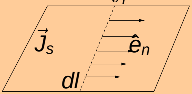

Figura: Corriente en un superficie $d\vec{l} = \hat{e}_n \, dl$

Densidad lineal de corriente (no existe)

En un hilo no hay densidad de corriente. Sólo puede haber corriente que circula por el hilo.

Índice de Contenidos

Ecuaciones de Maxwell en el tiempo

Ec. Maxwell completas

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Añadimos la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J}_v + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

Las magnitudes dependen del tiempo (t) y el espacio (x, y, z) aunque no lo pongamos. Los campos están acoplados (no se puede obtener por separado $\vec{E}$ y $\vec{H}$).

Obtención del vector de Poynting

Combinamos las ecuaciones de Maxwell. Multiplicamos la ley Faraday por $\vec{H}$ y la de Ampere por $\vec{E}$:

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J}_v + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Aplicando la identidad de la divergencia del producto vectorial y utilizando las dos ecuaciones anteriores:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$
$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J}_v - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{E} \times \vec{H}$ es conocido como el vector de Poynting.

Vector de Poynting

Vector de Poynting

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \text{ Poynting}$$

El módulo $|\vec{S}(t)|$ indica la cantidad de potencia que lleva el campo, mientras que la dirección nos dice hacia donde va esa potencia (propagación de la energía).

$$\nabla \cdot \vec{S} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J}_v - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Corrientes de excitación y de conducción

- En un sistema pueden existir corrientes que son fuentes de campo (estas corrientes son producidas por un generador) para generar energía electromagnética. Se llaman corrientes impresas o de excitación ($\vec{J}_{ex}$).
- Asimismo, pueden existir corrientes de conducción (circulan por una resistencia y provocan que la energía se transforme en calor) o de convección.

$$\vec{J}_v = \vec{J}_{ex} + \sigma \vec{E}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_v = \vec{E} \cdot \vec{J}_{ex} + \sigma(\vec{E} \cdot \vec{E}) = -S_p + S_q$$

- El término $\vec{E} \cdot \vec{J}_{ex}$ representa la densidad de potencia que se convierte en energía electromagnética.
- $\sigma(\vec{E} \cdot \vec{E})$ es la densidad de potencia electromagnética que se convierte en calor disipado o en otras formas de energía (energía necesaria para acelerar cargas en corrientes de convección).

Vector de Poynting

Términos de energía almacenada

$$\nabla \cdot \vec{S} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = S_p - S_q$$

Desarrollando el término del campo magnético $\vec{B} = \mu \vec{H}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H} \cdot \vec{B}) = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\vec{H} \cdot \vec{H}) = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 2\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 2\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

De forma que y también para el campo eléctrico:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2}\right) \quad ; \quad \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}\right)$$

- La densidad de energía almacenada por el campo eléctrico es:

$$W_{de} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$$

- La densidad de energía almacenada por el campo magnético es:

$$W_{dm} = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2}$$

- La integral en un volumen de estas magnitudes nos da la energía total.

Vector de Poynting

Balance de potencias

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial W_{de}}{\partial t} + \frac{\partial W_{dm}}{\partial t} = S_p - S_q \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}(W_{de} + W_{dm}) = S_p - S_q$$

Integrando en un volumen para hallar la potencia total:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{S}\, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V (W_{de} + W_{dm})\, dV = \int_V (S_p - S_q)\, dV$$

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V (W_{de} + W_{dm})\, dV = \int_V (S_p - S_q)\, dV$$

$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$. Es el flujo de potencia que atraviesa la región V a través de su superficie S.

$\int_V (W_{de} + W_{dm})\, dV$. Es la energía almacenada total del campo eléctrico y magnético. El término $\partial/\partial t$ representa la variación de esta energía con el tiempo y da la potencia almacenada por el campo eléctrico y magnético.

$\int_V (S_p - S_q)\, dV$. Es la densidad de potencia. Representa el balance de potencia total entre la energía eléctrica que se genera y la que se pierde en forma de calor.

Ley de conservación de la energía

$$\int_V S_p \, dV = \int_V S_q \, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V (W_{de} + W_{dm}) \, dV + \int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$$

$\int_V S_p \, dV$. Potencia electromagnética que generamos con corrientes externas(por ejemplo, tubo de microondas alimentado con corriente continua)

$\int_V S_q \, dV$. Potencia disipada transformada en calor o en otro tipo de energía.

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (W_{de} + W_{dm}) \, dV$. Potencia que almacenan los campos eléctricos y magnéticos.

$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$. Potencia que atraviesa la superficie (sale por las paredes).

Vector de Poynting

Figura: Horno Microondas

Interesa que la potencia que salga al exterior sea pequeña $\int_S \vec{S} \cdot d\vec{S} \to 0$ y que la disipada sea máxima $\int_V S_q dV \uparrow\uparrow$.

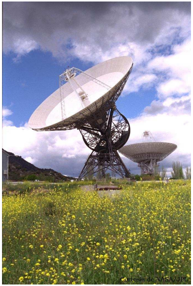

Figura: Antena

Interesa que la potencia que salga al exterior sea grande $\int_S \vec{S} \cdot d\vec{S} \uparrow\uparrow$ y que la disipada sea mínima $\int_V S_q dV \to 0$.

Ejemplo de aplicación de la ley de conservación de la energía

Circuito bajo estudio

Tomamos una resistencia y la conectamos a un generador.

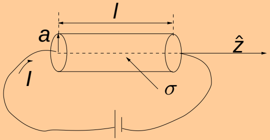

Figura: Resistencia conectada a un generador

- En el caso magnetostático se permite que $\partial\rho/\partial t$ para tener I constantes y así aplicar el teorema de Poynting.
- Suponemos corrientes constantes I y Consideramos variaciones pequeñas de tiempo ($\frac{\partial}{\partial t} \to 0$) para usar la situación de magnetostática.

Análisis del circuito

La densidad volumétrica de corriente que circula por la superficie será:

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{e}_z \qquad (A/m^2)$$

El campo eléctrico se calcula fácilmente a partir de la relación $\vec{J} = \sigma\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{I}{\sigma\pi a^2}\hat{e}_z \qquad (V/m)$$

Aplicación de la ley de conservación de la energía

Análisis del circuito

El campo magnético se halla mediante la ley de Ampere.

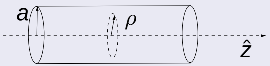

Figura: Campo magnético en el interior aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

La corriente que atraviesa la superficie definida por el círculo es:

$$I_{enc} = \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 \qquad (A)$$

Obtención del campo magnético

Además $\vec{A} = A_z\hat{e}_z$ y por tanto $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, por lo que $\vec{H} = H_\varphi(\rho)\hat{e}_\varphi$. El campo magnético es constante en la integración:

$$I_{enc} = H_\varphi 2\pi\rho \quad ; \quad \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 = H_\varphi 2\pi\rho$$

$$H_\varphi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\hat{e}_\varphi$$

Calculamos ahora el vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I}{\sigma\pi a^2}(\hat{e}_z \times \hat{e}_\varphi)\frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

$$\vec{S} = \frac{I^2\rho}{\sigma 2(\pi a^2)^2}(\hat{e}_z \times \hat{e}_\varphi) = \frac{I^2\rho}{\sigma 2(\pi a^2)^2}(-\hat{e}_\rho)$$

El módulo da la densidad de potencia que entra a la resistencia y la dirección por dónde entra.

Aplicación de la ley de conservación de la energía

Interpretación vector de Poynting

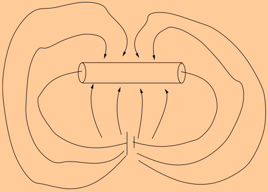

Figura: Potencia radial en la resistencia

- La potencia no sigue el mismo camino que la corriente.
- La potencia entra de forma radial a la resistencia.
- La corriente crea los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ necesarios para que exista transporte de potencia.

Aplicación teorema de Poynting

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Si $\partial/\partial t \to 0$ tenemos $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \vec{J}$. Integramos en un volumen que encierra la resistencia:

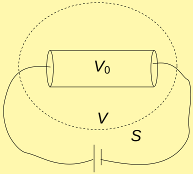

Figura: Volumen que encierra a la resistencia

Aplicación de la ley de conservación de la energía

Teorema de Poynting

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, dV = -\int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia (Gauss):

$$\int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = -\int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV$$

EL primer término es la potencia que entra en la región. En el segundo término $\vec{J}$ sólo existe dentro de la resistencia. Tenemos un intercambio de energía electromagnética en energía calorífica.

$$\int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV = \frac{I}{\sigma \pi a^2} \frac{I}{\pi a^2} \pi a^2 L = \frac{I^2}{\sigma \pi a^2} L$$

Energía disipada

La resistencia de un hilo cilíndrico es:

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{\pi a^2}$$

La potencia que entra se disipa en la resistencia es:

$$\int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV = R\, I^2$$

Existe una conversión de energía electromagnética en calor disipado en una resistencia.

Materiales con campos que cambian con el tiempo

Características

- En los conductores existen cargas libres que circulan si aplicamos un campo eléctrico.
- Un dieléctrico no tiene cargas libres por lo que la conductividad es cero $\sigma \to 0$.
- Los cargas positivas (protones) y negativas (electrones) están ligadas entre sí por fuerzas moleculares. Los electrones orbitan alrededor de los protones fuertemente ligados por fuerzas moleculares y no pueden viajar libremente.
- Si aplicamos un campo eléctrico la carga negativa se ve sometida a una fuerza contraria a la positiva y ambas se separan una distancia d formándose dipolos eléctricos.

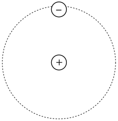

Figura: Cargas ligadas mediante fuerzas moleculares

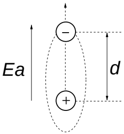

Figura: Dipolo Eléctrico (aumenta la permitividad del dieléctrico $\epsilon\epsilon_r$)

Campo eléctrico en dieléctrico

Vector momento dipolar $\vec{P}$

Si no existen dipolos eléctricos en las moléculas se cumple:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

Los dipolos producen un campo eléctrico adicional. Si el momento dipolar es $\vec{P}$ (C/m^2) (momento dipolar por unidad de volumen):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{P}$ es el efecto de millones de dipolos que se forman en el interior del dieléctrico. Para dieléctricos lineales se puede asumir que $\vec{P}$ es proporcional al campo total:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica

Permitividad relativa ϵ_r

La densidad de campo eléctrico es:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}(1 + \chi_e)$$

Si $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$
$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e = \epsilon_r$$

ϵ_r es la constante dieléctrica relativa.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Materiales magnéticos

Características

- En este caso también existen electrones orbitando alrededor del núcleo atómico.
- El efecto más importante en un material magnético es la corriente asociada al movimiento del electrón.
- Los elementos que producen importantes corrientes a nivel atómico se denominan magnéticos.
- Salvo los materiales magnéticos permantes todos estos dipolos magnéticos estan desordenados de forma que los efectos magnéticos se cancelan.
- Al aplicar un campo magnético los dipolos magnéticos se ordenan.

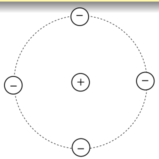

Figura: Electrones orbitando alrededor del núcleo atómico

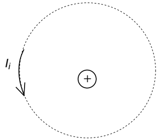

Figura: Lazo de corriente en una molécula

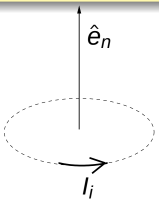

Figura: Esquema eléctrico del lazo

Susceptibilidad magnética y momento dipolar magnético

Aumenta campo magnético

- Los dipolos magnéticos al ordenarse producen un campo magnético adicional.
- La magnetización o el momento dipolar magnética se expresa como $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, siendo χ_m la susceptibilidad magnética.
- En los materiales lineales la magnetización es proporcional al campo magnético.
- Con sólo corrientes reales el flujo magnético se calcula como $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Con los la infinidad de lazos de corriente se produce el campo magnético adicional.

Permeabilidad relativa μ_r

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$$

Tenemos que $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ con lo que $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi_m) = \mu_r$$

μ_r es la permabilidad relativa del medio.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

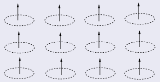

Figura: Lazos magnéticos ordenados

Efecto de campos cambiantes con el tiempo

Variación temporal del campo eléctrico

- Si el campo varía con el tiempo, los electrones tratan de seguir al campo, pero estas partículas tienen inercia y si el campo varía muy rápidamente las particulas no pueden seguir instantáneamente al campo.
- El flujo de campo $\vec{D}$ depende de instantes anteriores con respecto del material o medio.

$$\vec{D}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{t} \epsilon(x,y,z,t-\tau)\vec{E}(x,y,z,\tau)\,d\tau$$

- Se puede interpretar como un sistema lineal en el que introducimos una intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ y vemos la densidad de flujo que aparece en el dieléctrico.

$$\vec{D}(x,y,z,t) = \epsilon(x,y,z,t) * \vec{E}(x,y,z,t)$$

- Se trata de una convolución en el tiempo.
- Para simplificar el análisis podemos tomar transformadas de Fourier y estudiar el problema en el dominio de la frecuencia.

$$\vec{D}(x,y,z,\omega) = \epsilon(x,y,z,\omega)\,\vec{E}(x,y,z,\omega)$$

Pérdidas en el dieléctrico

- Al tratarse de una transformada de Fourier $\epsilon(x,y,z,\omega)$ es ahora un complejo.

$$\epsilon(x,y,z,\omega) = \epsilon'(x,y,z,\omega) - j\epsilon''(x,y,z,\omega)$$

- ϵ es la constante dieléctrica compleja que en general depende de la frecuencia.

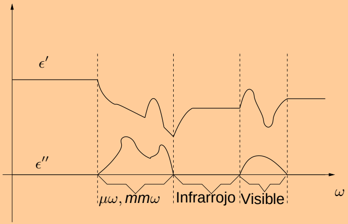

Figura: Pérdidas en función de la frecuencia

- Vemos que si ϵ' es constante $\epsilon'' = 0$.
- ϵ'' está relacionada con las pérdidas del material.

Tangente de pérdidas dieléctrica

- Definiremos la tangente de pérdidas ($\tan\delta_e = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$).

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'\left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) = \epsilon'(1 - j\tan\delta_e)$$

- δ es la fase de la constante dieléctrica compleja.
- Si no hay pérdidas entonces $\epsilon'' = 0$ y $\tan\delta = 0$, $\delta = 0$.
- También se define la constante dieléctrica relativa:

$$\epsilon' = \epsilon_0\epsilon_r$$

$\epsilon_0 \rightarrow$ Permitividad del vacío.
$\epsilon_r \rightarrow$ Constante dieléctrica relativa.

$\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r(1 - j\tan\delta_e)$ Permitividad en el dominio de la frecuencia

Efecto de campos cambiantes con el tiempo

Tangente de pérdidas magnética $\tan\delta_m$

- Con la permeabilidad sucede algo similar que con la permitividad.

$$\mu = \mu_0\mu_r(1 - j\tan\delta_m)$$

- $\mu' = \mu_0\mu_r$ y además $\tan\delta_m = \frac{\mu''}{\mu'}$ (fase de la permeabilidad compleja)

Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega$)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$
$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

- ✔ $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{J}$ son vectores complejos.
- ✔ μ y ϵ son complejas por ser la Transformada de Fourier de ϵ y μ en el tiempo.

Se añade además la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega\rho = 0 \qquad \text{Ecuación de continuidad}$$

Efecto de las corrientes

- Suponemos que existen corrientes externas $\vec{J}_{ext}$ que crean el campo eléctrico y magnético.
- Además existen corrientes de conducción (también pueden existir de convección).

$$\vec{J} = \vec{J}_{ext} + \sigma\vec{E}$$

- Sustituyendo en la ley de Ampere:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_{ext} + \sigma\vec{E}$$

- Sacando factor común:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{E}\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right) + \vec{J}_{ext}$$

Constante dieléctrica total

- ✔ Se define la constante dieléctrica total ϵ_T como:

$$\epsilon_T = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

- ✔ Si el dieléctrico es con pérdidas:

$$\epsilon_T = \epsilon' - j\epsilon'' - j\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\epsilon_T = \epsilon' - j\left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

- ✔ La tangente de pérdidas queda:

$$\tan\delta_{eq} = \frac{\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}{\epsilon'}$$

Efecto de campos cambiantes con el tiempo

Ley de Ampere modificada

- Podemos escribir teniendo en cuenta lo anterior la ley de Ampere como sigue:
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ext} + j\omega\epsilon_T\vec{E}$$
- En ϵ_T están todos los efectos de pérdidas en el dieléctrico y en los conductores.
- La $\vec{J}_{ext}$ ahora son las fuentes que generan los campos electromagnéticos.
- Los demás fenómenos están incluidos en la constante compleja ϵ_T.
- A veces se utiliza $\vec{J}_{ext} = \vec{J}$ como las verdaderas fuentes, y los demás efectos están dentro de ϵ_T (corriente de desplazamiento, de conducción y pérdidas en el dieléctrico).

Teorema de Poynting en el dominio frecuencial

Planteamiento

- Partimos de las leyes de Faraday y de Ampere.

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$
$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_{ext} + \sigma\vec{E}$$

- Tomando el conjugado en la ley de Ampere.

$$\nabla \times \vec{H}^* = -j\omega\epsilon^*\vec{E}^* + \vec{J}^*_{ext} + \sigma\vec{E}^*$$

- Haciendo el producto escalar de la ley de Faraday por $\vec{H}^*$ y de la ley de Ampere conjugada por $\vec{E}$:

$$\vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu\,(\vec{H} \cdot \vec{H}^*)$$
$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*) = -j\omega\epsilon^*\,(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) + \vec{J}^*_{ext} \cdot \vec{E} + \sigma\,(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)$$

Teorema de Poynting en el dominio frecuencial

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^*(\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*)$$

Sustituyendo las relaciones previas se tiene:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = -j\omega\mu(\vec{H} \cdot \vec{H}^*) + j\omega\epsilon^*\vec{E} \cdot \vec{E}^* - \vec{J}^*_{ext} \cdot \vec{E} - \sigma(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)$$

Índice de Contenidos

Campos con variación temporal armónica

Campos sinusoidales

Caso muy importante en electromagnetismo y para el ingeniero de telecomunicaciones. Trabajamos con dos componentes aunque en un caso general existiran tres componentes.

$$\vec{A}(t) = A_x \cos(\omega t + \alpha_x)\hat{e}_z + A_y \cos(\omega t + \alpha_y)\hat{e}_y$$
$$\vec{B}(t) = B_x \cos(\omega t + \beta_x)\hat{e}_x + B_y \cos(\omega t + \beta_y)\hat{e}_y$$

La amplitud de cada componente varía sinusoidalmente con una amplitud y fase cualquiera usando exponenciales complejas.

$$\vec{A}(t) = Re\left\{A_x\, e^{j\alpha x}\, e^{j\omega t}\right\}\hat{e}_x + Re\left\{A_y\, e^{j\alpha_y}\, e^{j\omega t}\right\}\hat{e}_y$$

Definimos ahora el fasor vector complejo:

$$\vec{A} = A_x\, e^{j\alpha_x}\,\hat{e}_x + A_y\, e^{j\alpha_y}\,\hat{e}_y$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}(t) &= Re\left\{\left(A_x\, e^{j\alpha_x}\,\hat{e}_x + A_y\, e^{j\alpha_y}\,\hat{e}_y\right) e^{j\omega t}\right\}\\
\vec{A}(t) &= Re\left\{\vec{A}\, e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{(\vec{A}_r + j\vec{A}_i)\, e^{j\omega t}\right\}\\
&= Re\left\{(\vec{A}_r \cos\omega t - \vec{A}_i \sin\omega t) + j(\vec{A}_r \sin\omega t + \vec{A}_i \cos\omega t)\right\}\\
\vec{A}(t) &= \vec{A}_r \cos\omega t - \vec{A}_i \sin\omega t
\end{aligned}$$

Campos sinusoidales

Hay que tener en cuenta las relacions $z + z^* = 2z$, $\vec{A}(t) = Re[\vec{A}e^{j\omega t}] = \frac{\vec{A}e^{j\omega t} + \vec{A}^*\, e^{-j\omega t}}{2}$. $\vec{A}$ se trata de un fasor complejo. Del mismo modo procedemos para el campo vectorial $\vec{B}(t)$.

$$\vec{B}(t) = Re\left\{B_x\, e^{j\beta_x}\, e^{j\omega t}\right\} \hat{e}_x + Re\left\{B_y\, e^{j\beta_y}\, e^{j\omega t}\right\} \hat{e}_y$$
$$\vec{B}(t) = Re\left\{\left(B_x\, e^{j\beta_x}\, \hat{e}_x + B_y\, e^{j\beta_y}\, \hat{e}_y\right) e^{j\omega t}\right\}$$

y el vector fasor complejo toma la forma:

$$\vec{B} = B_x\, e^{j\beta_x}\, \hat{e}_x + B_y\, e^{j\beta_y}\, \hat{e}_y$$

Luego:

$$\vec{B}(t) = Re\left\{\vec{B}\, e^{j\omega t}\right\} = \frac{\vec{B}e^{j\omega t} + \vec{B}^*\, e^{-j\omega t}}{2}$$

Vamos a calcular el producto escalar de estos dos vectores:

$$s(t) = \vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t) = \frac{\vec{A}e^{j\omega t} + \vec{A}^*\, e^{-j\omega t}}{2} \cdot \frac{\vec{B}e^{j\omega t} + \vec{B}^*\, e^{-j\omega t}}{2}$$
$$s(t) = \frac{1}{4}\left[\vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A}^* \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B}\, e^{j2\omega t} + \vec{A}^* \cdot \vec{B}^*\, e^{-j2\omega t}\right]$$

Campos con variación temporal armónica

Campos sinusoidales

Volvemos a tener ser la suma de un complejo y el conjugado:

$$s(t) = \frac{1}{2} Re\{\vec{A} \cdot \vec{B}^*\} + \frac{1}{2} Re\left\{\vec{A} \cdot \vec{B}\, e^{j2\omega t}\right\}$$

Se tiene por una parte un valor constante (valor medio) y por otra una señal de frecuencia doble. El velor medio vale:

$$S_m = \frac{1}{2} Re\{\vec{A} \cdot \vec{B}\}$$

Se puede definir la cantidad compleja:

$$S = \frac{1}{2}(\vec{A} \cdot \vec{B}^*) = S_r + jS_i$$

La parte real es el valor medio. Si es una potencia sabemos que la parte imaginaria está relacionada con la potencia reactiva. Del mismo modo puede demostrarse que para señales sinusoidales:

$$\vec{S}(t) = \vec{A}(t) \times \vec{B}(t) \quad ; \quad \vec{S}_m = \frac{1}{2} Re\{\vec{A} \times \vec{B}^*\}$$

Campos con variación temporal armónica

Campos sinusoidales

En términos de los campos electromagnéticos:

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \quad ; \quad \vec{S}_m = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

El término anterior corresponde a la densidad de potencia transmitida por los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$.

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} + \frac{1}{2} R\{(\vec{E} \times \vec{H})\, e^{j2\omega t}\}$$

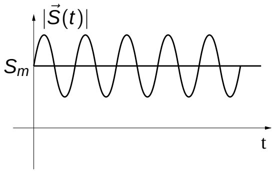

Figura: Variación de la potencia en función del tiempo con una frecuencia doble que los campos.

Campos armónicos y vector de Poynting

Vector de Poynting

Vamos a definir ahora el vector de Poynting $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$. $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son fasores, luego son vectores complejos. Se ve que $\vec{S}$ es un vector complejo.

$$\vec{S} = \vec{S}_r + j\vec{S}_i$$

- S_r, parte real . Su módulo da el valor medio de la densidad de potencia. Es la densidad de potencia activa. Su dirección indica hacia donde viaja la potencia.
- S_i, parte imaginaria . Da la densidad de potencia reactiva.

Trabajando con fasores sabemos que el valor medio o parte real toma el valor:

$$\vec{S}_r = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

La expresión anterior da la densidad de potencia media o activa que están transportanto los campos.

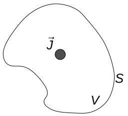

Figura: Volumen para la aplicación del teorema de Poynting

Teorema de Poynting

Como antes vamos a integrar el teorema de Poynting en un volumen arbitrario.

$$\frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^*)\,dV = -j\omega\mu\int_V \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{H}^*\,dV + j\omega\epsilon^*\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dV - \frac{1}{2}\int_V \vec{J}^*_{ext}\cdot\vec{E}\,dV - \sigma\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dV$$

Para poder obtener valores medios de potencia se ha multiplicado toda la ecuación anterior por $1/2$. Aplicando el teorema de la divergencia, la primera integral puede reducirse a una integral de superficie.

$$\frac{1}{2}\int_S (\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot d\vec{S} = -j\omega\mu\int_V \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{H}^*\,dV + j\omega\epsilon^*\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dV - \frac{1}{2}\int_V \vec{J}^*_{ext}\cdot\vec{E}\,dV - \sigma\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dV$$

El primer término es la potencia total que atraviesa la superficie S.

Campos armónicos y vector de Poynting

Teorema de Poynting

La potencia total que atraviesa la superficie será activa y reactiva. Sé que la potencia activa es la potencia útil que puede usarse para ser consumida por mis equipos. Luego tengo interés en hallar la potencia media o activa en la expresión anterior. Sé que la potencia media o activa es la parte real de la potencia compleja, luego:

$$\frac{1}{2}Re\left\{\int_S (\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot d\vec{S}\right\} = -\frac{1}{2}Re\left\{\int_V j\omega\mu(\vec{H}\cdot\vec{H}^*)\,dV\right\} + \frac{1}{2}Re\left\{\int_V j\omega\epsilon^*(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\,dV\right\}$$
$$-\frac{1}{2}Re\left\{\int_V \vec{J}^*_{ext}\cdot\vec{E}\,dV\right\} - \frac{1}{2}Re\left\{\int_V \sigma(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\,dV\right\}$$

Pero $\mu = \mu' - j\mu''$ y $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$, $\epsilon^* = \epsilon' + j\epsilon''$. La parte real ϵ', μ' tiene que ver con la potencia reactiva que llevan los campos. Finalmente se obtiene,

$$\frac{1}{2}Re\left\{\int_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}\right\} = -\frac{1}{2}\int_V \omega\mu''(\vec{H}\cdot\vec{H}^*)\,dV - \frac{1}{2}\int_V \omega\epsilon''(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\,dV$$
$$-\frac{1}{2}Re\left\{\int_V \vec{J}^*_{ext}\cdot\vec{E}\,dV\right\} - \frac{1}{2}\int_V \sigma(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\,dV$$

Teorema de Poynting

$$P_m^{(ext)} = -\frac{1}{2}Re\left\{\int_V \vec{J}_{ext}^* \cdot \vec{E}\, dV\right\} \quad \text{Valor medio de la potencia generada}$$

$$P_m^{(ext)} = \frac{1}{2}Re\left\{\int_S (\vec{E}\times\vec{H}^*)\, d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_V [\omega\mu^{''}(\vec{H}\cdot\vec{H}^*) + \omega\epsilon^{''}(\vec{E}\cdot\vec{E}^*) + \sigma(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)]\, dV\right\}$$

El valor medio de la potencia electromagnética que genero o bien sale por las paredes o bien se disipa en forma de calor debido a las pérdidas que pueden ser por $\epsilon^{''}$, por $\mu^{''}$ o por conductividad finita σ. La integral de superficie de la ecuación corresponde a la potencia activa que atraviesa la superficie (sale por las paredes). Esta ecuación la podemos escribir como:

$$P_m^{(ext)} = \frac{1}{2}Re\left\{\int_S (\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot d\vec{S} + \frac{\omega}{2}\int_V \left[\mu^{''}(\vec{H}\cdot\vec{H}^*) + (\epsilon^{''} + \frac{\sigma}{\omega})(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\right] dV\right\}$$

El término $\epsilon_T^{''} = \left(\epsilon^{''} + \frac{\sigma}{\omega}\right)$ corresponde a la potencia perdida debida a $\epsilon^{''}$ y la conductividad finita. Por ejemplo, los pollos dentro del microondas tienen $\epsilon^{''}$ y σ, y por tanto se calientan.

Principio de unicidad de solución

Planteamiento

Usando el teorema de Poynting podemos demostrar la unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell. Si encontramos una solución a las ecuaciones de Maxwell, esa es la solución única. Consideremos un volumen que encierra las corrientes $\vec{J}$.

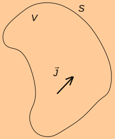

Figura: Volumen para la aplicación del teorema de Poynting

El teorema de Poynting puede escribirse así:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = -j\omega\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* + j\omega \left(\epsilon^* + j\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \vec{J}^* \cdot \vec{E}$$

Donde $\epsilon = \epsilon^{'} - j\epsilon^{''}$ y $\epsilon^* = \epsilon^{'} + j\epsilon^{''}$. Por otro lado tenemos $\epsilon_T = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon^{'} - j\left(\epsilon^{''} + \frac{\sigma}{\omega}\right)$ y $\epsilon_T^* = \epsilon^* + j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon^{'} + j\left(\epsilon^{''} + \frac{\sigma}{\omega}\right)$. La permitividad $\epsilon_T = \epsilon_T^{'} - j\epsilon_T^{''}$, donde $\epsilon_T^{'} = \epsilon^{'}$ y $\epsilon_T^{''} = \epsilon^{''} + \frac{\sigma}{\omega}$.

Principio de unicidad de solución

Desarrollo

$\vec{J}$ son las corrientes que producen los campos electromagnéticos, mientras que las demás corrientes de pérdidas están en ϵ_T. Integrando en el volumen:

$$\int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} = -j\omega\mu \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* \, dV + j\omega\epsilon_T^* \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}^* \, dV - \int_V \vec{J}^* \vec{E} \, dV$$

Para hallar la potencia media o activa multiplico por $(1/2)$ y hallamos la parte real:

$$\frac{1}{2} Re \left\{ \int_S' (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \right\} = \frac{1}{2} Re \left\{ \int_V j\omega\mu (\vec{H} \cdot \vec{H}^*) \, dV \right\} + \frac{1}{2} Re \left\{ \int_V j\omega\epsilon_T^* (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \, dV \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \int_V \vec{J}^* \cdot \vec{E} \, dV \right\}$$

El último término es la potencia media generada por las corrientes ($P_m^{(ext)}$).

$$\frac{1}{2} Re \left\{ \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \, d\vec{S} \right\} = -\frac{\omega}{2} \int_V \left[\mu'' (\vec{H} \cdot \vec{H}^*) + \epsilon_T'' (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \right] dV + P_m^{(ext)}$$

$$P_m^{(ext)} = \frac{1}{2} Re \left\{ \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \, d\vec{S} + \frac{\omega}{2} \int_V \left[\mu'' (\vec{H} \cdot \vec{H}^*) + \epsilon_T'' (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \right] dV \right\}$$

Principio de unicidad de solución

Desarrollo

Suponemos que existen dos campos distintos que son solución en mi recinto $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$ y $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$. Entonces van a satisfacer las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -j\omega\mu\vec{H}_1$$
$$\nabla \times \vec{H}_1 = \vec{J} + j\omega\epsilon_T\vec{E}_1$$
$$\nabla \times \vec{E}_2 = -j\omega\mu\vec{H}_2$$
$$\nabla \times \vec{H}_2 = \vec{J} + j\omega\epsilon_T\vec{E}_2$$

Restamos ambas ecuaciones:

$$\nabla \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -j\omega\mu(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$$
$$\nabla \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = j\omega\epsilon_T(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$$

Vemos que el campo total es:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$$
$$\vec{H}_T = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$$

También es solución de las ecuaciones de Maxwell, aunque ahora no son producidas por ninguna corriente exterior.

$$\nabla \times \vec{E}_T = -j\omega\mu\vec{H}_T$$
$$\nabla \times \vec{H}_T = j\omega\epsilon_T\vec{E}_T$$

Principio de unicidad de solución

Desarrollo

Al no existir ninguna corriente que genere los campos se cumple: $P_m^{(ext)} = 0$. Por tanto,

$$\frac{1}{2}Re\left\{\int_S (\vec{E}_T \times \vec{H}_T^*)\cdot d\vec{S}\right\} = -\frac{\omega}{2}\int_V \left[\mu''(\vec{H}\cdot\vec{H}_T^*) + \epsilon_T''(\vec{E}_T\cdot\vec{E}_T^*)\right] dV$$

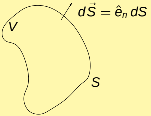

Figura: Vector normal a la superficie que encierra el volumen ($\hat{e}_n$)

Pero, por la conocida propiedad del producto mixto y atendiendo a la figura:

$$\frac{1}{2}\int_S (\vec{E}_T \times \vec{H}_T^*)\,\hat{e}_n\, dS = \frac{1}{2}\int_S (\vec{e}_n \times \vec{E}_T)\cdot\vec{H}_T^*\, dS = \frac{1}{2}\int_S (\vec{H}_T^* \times \hat{e}_n)\cdot\vec{E}_T\, dS$$

Conocemos las componentes tangenciales de los campos en la superficie S.

$$\hat{e}_n \times \vec{E}_1\Big|_S = A \quad \text{Condición de contorno}$$

Principio de unicidad de solución

Desarrollo

Si $\vec{E}_2$ es solución válida en la superficie S debe satisfacer la misma condición de contorno:

$$\hat{e}_n \times \vec{E}_2\Big|_S = A$$

$$\hat{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\Big|_S = 0$$

$$\hat{e}_n \times \vec{E}_T\Big|_S = 0$$

Vemos como se anulan las componentes tangenciales del campo eléctrico total. Por tanto,

$$\int_S (\hat{e}_n \times \vec{E}) \cdot \vec{H}^* \, dS = 0$$

Desarrollo

Si conocemos las componentes tangenciales del campo magnético, entonces:

$$\hat{e}_n \times \vec{H}_T\Big|_S = 0$$

$$\int_S (\vec{H}^* \times \hat{e}_n) \cdot \vec{E}_T \, dS = 0$$

En cualguier caso la integral es cero y entonces:

$$\int_V \left[\mu''(\vec{H}_T \cdot \vec{H}_T) + \epsilon_T''(\vec{E}_T \cdot \vec{E}_T^*)\right] dV = 0$$

Si $\mu'' > 0$, $\epsilon_T'' > 0$, además $(\vec{H}_T \cdot \vec{H}_T^*) > 0$ y $(\vec{E}_T \cdot \vec{E}_T^*) > 0$, entonces la integral sólo puede ser cero si $\vec{E}_T = 0$ y $\vec{H}_T = 0$, luego $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ y $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$.

Si conocemos las componentes tangenciales del campo eléctrico o magnético en una superficie entonces las ecuaciones de Maxwell tienen una sóla solución. Podemos estar seguros que si encontramos una solución es la única y la buena.