Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Grado en Ingeniería Electrónica Automática e Industrial
Matemáticas I
Ecuaciones diferenciales

Hoja de problemas Tema 14

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) y' + 2y = e^{-x}. \qquad (b) y' - 2xy = x. \qquad (c) xy' + 2y = \operatorname{sen}(x)$$

$$(d) y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}. \qquad (e) xy' = \sqrt{1-y^2}. \qquad (f) y' + y^2 \operatorname{sen}(x) = 0.$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) 2x + 3 + (2y-2)y' = 0. \qquad (b) e^x \operatorname{sen}(y) + 3y - (3x - e^x \operatorname{sen}(x))y' = 0.$$

$$(c) 2xy^2 + 2y + (2x^2y + 2x)y' = 0. \qquad (d) 3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

$$(e) y + (2x - ye^y)y' = 0. \qquad (f) 3x^2y + 2xy + y^3 = -(x^2 + y^2)y'.$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) y' = \cos(x+y). \qquad (b) y' + \frac{y}{x+1} - \frac{1}{2}(x+1)^3 y^2.$$

$$(c) xy' + y = y^2 \log(x). \qquad (d) 3xy' - 2y = x^3 y^{-3}.$$

$$(e) \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} y' = 0. \qquad (f) y' = e^{x+y}.$$

4. Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes:

$$(a) \begin{cases} x + y\cos(x) = -y' \operatorname{sen}(x) \\ y(0) = 2 \end{cases} . \qquad (b) \begin{cases} y' = \frac{y^3}{1-2xy^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + ye^{-x}y' = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} y' = \frac{2x}{y+x^2y} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

5. El isótopo radioactivo del Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad existente en ese instante de tiempo. Si 100 miligramos de este material se reducen a 82.04 miligramos en una semana, ¿cuánto Torio tendremos al cabo de tres semanas? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de Torio se reduzca a la mitad?

6. Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales

$$a)\begin{cases} y' - y = xe^x \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

7. Supongamos que se coloca un cuerpo a una temperatura de 100 grados en un medio a temperatura constante de 20 grados. Si al cabo de 20 minutos el cuerpo se ha enfriado a 60 grados, ¿cuánto tiempo debe de pasar para que llegue a los 30 grados?

8. Resuelve las ecuaciones diferenciales

$$a) y' = \frac{2x + y - 1}{2x + y + 2} \qquad b) y' = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$$

9. Utiliza el cambio de variable $y = uv$ para resolver las ecuaciones diferenciales de tipo Bernoulli:

$$a) xy' + y = y^2 \log(x) \qquad b) y' + 2y = x^2 + 2x$$

10. Encuentra la solución general de las ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a) y'' + y' - 2y = e^x & b) y'' - 2y' + y = 0 & c) y'' - y' - 2y = 0 \\ d) y'' + 6y' + 13y = \operatorname{sen}(3x) & e) y'' + 4y = e^{2x} & f) y'' = x + e^x \end{array}$$

11. Resuelve los siguientes problemas de Cauchy:

$$a)\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos(x) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen}(x) \\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} y'' + 4y' + y = 1 - x^2 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

12. Hallar las curvas que verifican cada una de las siguientes propiedades geométricas:

   a) La distancia de un punto de la curva al origen es igual a la longitud del segmento de la normal en el punto de limitado por el propio punto y el eje OX.

   b) La proyección sobre el eje OX de la parte de la normal en (x, y) delimitada por (x, y) y el eje OX es 1.

   c) La proyección sobre el eje OX de la parte de la tangente entre (x, y) y el eje OX tiene la longitud 1.

   d) La distancia del origen a cada tangente es igual a la abcisa del punto de tangencia correspondiente.