Hoja de problemas Tema 12

1. Dado el rectángulo $I = [0,1] \times [0,3] \subset \mathbb{R}^2$, calcula las integrales:

$$\text{(a)} \int_I xy\,dxdy \qquad \text{(b)} \int_I xe^y\,dxdy \qquad \text{(c)} \int_I y^2 \text{sen}(x) dxdy$$

2. Calcula las integrales:

$$\text{(a)} \int_B (y + \log(x))\,dxdy \qquad \text{(b)} \int_B (x + e^{x+y})\,dxdy \qquad \text{(c)} \int_B y^2 x\,dxdy$$

siendo $B = [0,1] \times [-1,0] \subset \mathbb{R}^2$.

3. Calcula las siguientes integrales en los dominios que se indican:

(a) $\int_\Omega y\,dxdy$ $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
(b) $\int_\Omega (3y^3 + x^2) dxdy$ $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0\}$
(c) $\int_\Omega \sqrt{xy}\,dxdy$ $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\, y^2 \leq x \leq y\}$
(d) $\int_\Omega ye^x\,dxdy$ $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y^2\}$
(e) $\int_\Omega (y + \log(x))\,dxdy$ $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0{,}5 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$

4. Calcula las siguientes integrales en los recintos limtados por las ecuaciones que se dan en cada caso:

(a) $\int_\Omega (4 - y^2)\,dxdy$ **Ecuaciones:**$y^2 - 2x = 0,\ y^2 + 2y - 8 = 0$
(b) $\int_\Omega (x^4 + y^2)\,dxdy$ **Ecuaciones:**$y = x^3,\ y = x^2$
(c) $\int_\Omega (x + y)\,dxdy$ **Ecuaciones:**$y = x^3,\ y = x^4,\ -1 \leq x \leq 1$
(d) $\int_\Omega (3xy^2 - y)\,dxdy$ **Ecuaciones:**$y = |x|,\ y = -|x|,\ -1 \leq x \leq 1$

5. Calcula la superficie de las siguientes regiones del plano $\mathbb{R}^2$:

a) Círculo de centro (1,1) y radio r.

b) Elipse de semiejes a, b centrada en el origen.

c) Región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.

d) Región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.

e) Región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

6. Determina el volumen de los sólidos que se indican a continuación:

   a) Región limitada por los planos $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ y los planos XY, XZ, YZ.
   b) Cilindro truncado limitado por los planos XY, $x+y+z=1$ y el cilindro $x^2+y^2=2$.
   c) Bola de centro $(1,1,0)$ y radio r.
   d) Cilindro de altura h y radio r.
   e) Cono de altura h y radio de la base igual a r.

7. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\},$$

$$\text{(b)} \int_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4,\, x\geq 0\}$$

8. Calcula las integrales siguientes mediante un cambio a coordenadas polares:

$$\text{(a)} \int_{1/2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{1/2}dydx \qquad \text{(b)} \int_{0}^{1/2}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

9. Dado el paralelepípedo $D=[0,1]\times[0,3]\times[-1,1]\subset\mathbb{R}^3$, calcula las integrales:

$$\text{(a)} \int_D xyzdxdydz \quad \text{(b)} \int_D xe^{y+z}dxdydz \quad \text{(c)} \int_D y^2z^3\text{sen}(x)\,dxdydz$$

10. Calcule la integral:

$$\iint_D \frac{y^2e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

donde

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x^2+y^2\leq 4,\, x\leq y,\, x\geq 0\}.$$

11. Calcule la integral

$$\int_0^1\int_{x^{\frac{1}{n-1}}}^{1} e^{-y^n}\,dy\,dx, \text{ con } n\in\mathbb{N},\, n>1.$$

12. Determina el valor de las integrales:

$$\text{(a)} \int_D (y\text{sen}(z)+\log(x))\,dxdydz \quad \text{(b)} \int_D (x+e^{x+y+z})\,dxdydz \quad \text{(c)} \int_D y^2x\text{sen}(z)\,dxdydz,$$

donde $D=[0,1]\times[-1,0]\times[0,\pi]\subset\mathbb{R}^3$.

13. Calcula las integrales:

(a) $\int_\Omega (y^3 + z + x)\, dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
(b) $\int_\Omega y\mathrm{sen}(z) + x)\, dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x,\ y \leq 1\}$
(c) $\int_\Omega x\, dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$
(d) $\int_\Omega yxz\, dxdydz \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x,\ -1 \leq x,\ y \leq 1\}$

14. Calcula el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x + 3y + z + 10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2 + y^2 + x = 0$.

15. Halla el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

16. Calcula la integral de la función $f(x, y) = e^{\frac{x-y}{x+y}}$ sobre el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 1$.

17. Utiliza el teorema de cambio de variable para determinar el valor de la integral

$$R \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \log(1 + x^2 + y^2)\, dy$$

con $R > 0$ constante.

18. Sea D el elipsoide de revolución de ecuación

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

con a, b, c constantes positivas.

a) Comprueba que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\phi(u, v, w) = (au, bv, cw)$$

es un cambio de variable.

b) Utiliza el resultado anterior para calcular el valor de la integral

$$\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dxdydz$$