Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Grado en Ingeniería Electrónica Automática e Industrial
Matemáticas I
Diferenciabilidad de funciones de varias variables

Hoja de problemas Tema 11

1. Estudia la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2. Comprueba que la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}y\,\mathrm{sen}(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$, pero no es diferenciable en este punto. ¿Qué pasa en el punto $(\pi,0)$?

3. Estudia la continuidad y la diferenciabilidad de la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcula su derivada direccional respecto de un vector arbitrario $v=(v_1,v_2)$ en el punto $(0,0)$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Comprueba que f tiene derivada direccional respecto de cualquier vector $v\in\mathbb{R}^2$ en el punto $(0,0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.

5. Calcula las derivadas parciales de la función

$$f(x,y)=x^2\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ y comprueba que se verifica la relación

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2f(x,y),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Si tomamos $f(0,0)=0$, ¿es diferenciable la función f en el punto $(0,0)$? ¿existen las derivadas parciales en dicho punto?

6. Calcula las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

definida en el conjunto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$, y comprueba que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{f(x,y)}{2}$$

para cada $(x,y) \in \Omega$.

7. Calcula las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = y \log\left(\tfrac{x^3 y}{x^2+y^2}\right)$$

en los puntos de $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ y determina su diferencial en el punto $(1,1)$.

8. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y,z) = \left(x^4 + y^3,\ x^2y^2 - 3y^2\right)$$

calcula su matriz jacobiana en el punto $(1,1)$. Comprueba que f es diferenciable en dicho punto y obtén el valor de $Df(1,1)(v)$, siendo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

9. Estudia la diferenciabilidad en $(\pi, \pi/2)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (x\cos(y),\ x\operatorname{sen}(y),\ x\cos(y)\operatorname{sen}(y))$$

y determina la matriz de la diferencial para las bases canónicas.

10. Comprueba que la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = \left(x_1^2 + x_2x_3 - x_3^2,\ x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_3^2,\ x_1x_2x_3\right)$$

es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^3$ y calcula su matriz jacobiana.

11. Obtén la matriz jacobiana de las funciones:

   a) $f(x,y,z) = e^{(y+z)\log(x)}$
   b) $f(x,y,z) = z + \log\left(1 + x^2y^2\right)$
   c) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}\left(x\operatorname{sen}\left(y\operatorname{sen}(z)\right)\right)$
   d) $f(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(xy),\ \cos\left(x\operatorname{sen}(yz)\right),\ x^2z\right)$

12. Comprueba que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + x^2\operatorname{sen}(1/x),\ y) & \text{si } x \neq 0 \\ (0,y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

13. Dada la función $f(x,y)=\sqrt{\log(xy)+\arccos(y/x)}$, calcula el valor de

$$xf(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+yf(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

14. Determina los puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que la función $f(x,y)=\operatorname{sen}\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)$ es diferenciable y calcula la matriz jacobiana de f en dichos puntos.

15. Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y)=\log(x^2)+\log(y^2)$ en un punto arbitrario (x^0,y^0).

16. Sean $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $x^0\in\Omega$, de forma que

$$Df(x^0)(x)=x_1+x_2+x_3,$$

para cada $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Determina el valor de la derivada direccional $\partial_v f(x^0)$ para $v=(1,1,-1)$.

17. Sea la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\operatorname{sen}(y)-y\operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Comprueba que existen las derivadas parciales segundas $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, pero no son iguales.

18. Una función $u:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, se dice que es *armónica* si satisface la relación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0,$$

Comprueba que $u(x,y)=x^3-3xy^2$ es armónica. Demuestra además que si $\mathcal{A}$ es la familia de todas las funciones armónicas, entonces:

- $u+v\in\mathcal{A}$, si $u,v\in\mathcal{A}$
- $\alpha u\in\mathcal{A}$, para cada $u\in\mathcal{A}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

19. Sean $\phi,\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2. Si se define la función

$$f(t,x)=\phi(x+t)+\psi(x-t),\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$

comprueba que f verifica la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

que se denomina *ecuación de ondas.*

20. Dadas las funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $f(x,y) = (x^2y^4,\, x^3y^3 + 4xy^2)$ y $g(x,y) = (x\operatorname{sen}(y),\, y\operatorname{sen}(x))$, calcula las matrices jacobianas de $f \circ g$ y $g \circ f$ en el punto $(2,-1)$.

21. Sean las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $f(t) = (t^2,\, 3t-1,\, 1-t^2)$ y $g(x,y,z) = (x^2 - y - zx,\, y^2 + xy + z^2)$. Calcula la matriz jacobiana de $F = g \circ f$ en un punto $t \in \mathbb{R}$ cualquiera.

22. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\phi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1. Se define la función
$$g(x,y) = f\left(\phi(x)\psi(y),\, \phi(y)\psi(x)\right)$$
y se pide:
    a) Calcula las derivadas parciales de g.
    b) Estudia la diferenciabilidad de g.

23. Calcula el valor de las derivadas parciales de la función
$$g(x,y) = f(x,\, y,\, \log(1 + x^2y^2))$$
donde $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Si f es de clase C^2, determina el valor de la derivada parcial
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$$

24. Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por la relación
$$f(x,y) = \phi\left(\tfrac{1}{y} - \tfrac{1}{x}\right)$$
Comprueba que se satisfacen las igualdades:
    a) $x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
    b) $xy(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + x^2\frac{\partial f f}{\partial x^2}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 0$

25. Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \frac{\phi(y/x)}{x}$$
Determina el subconjunto de los puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que está definida f y comprueba que se satisfacen las igualdades:
    a) $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + f(x,y) = 0$
    b) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2f(x,y)$

26. Sea la función $f(x,y) = x^2 - y^2$. Si escribimos $x = \operatorname{sen} t$ e $y = t$, se obtiene la función compuesta $\phi(t) = f(x(t), y(t))$. Comprueba que ϕ es de clase C^3 y calcula sus tres primeras derivadas.

27. Dada una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, se define su *laplaciano* como

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$$

Calcula la forma del laplaciano al realizar el cambio a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

28. Dada una aplicación $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1, denominada también *campo vectorial*, se define su *divergencia* mediante la fórmula

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

donde $F = (F_1, F_2, F_3)$ y $x = \big(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\big)$. Calcula la divergencia del campo $F(x) = (\cos(x_1x_2),\ x_1^2 - x_3 + \log(1 + x_2),\ x_1 + x_2 + x_3)$.

29. Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Comprueba que se verifica la igualdad:

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

30. Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2, comprueba que se verifican las relaciones

    a) $(x^2 - y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)$,

    para $u = \log(x+y)$ y $v = \log(x-y)$

    b) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v) - u\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$,

    siendo $u = x/y$, $v = xy$.

31. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica (ver ejercicio 18), demuestra que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 0$$

si tomamos $x = u/\left(u^2+v^2\right)$ e $y = v/\left(u^2+v^2\right)$.

32. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{x^4+2x^2y^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcula las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

b) Estudia la diferenciabilidad de f en dicho punto.

c) ¿Existen las parciales segundas?

33. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $\alpha \geq 0$ una constante, estudia la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$ en función del parámetro α.

34. Sean $\phi, \psi, \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tres funciones derivables y a, b dos números reales distintos de cero. Si se define la función

$$f(x,y) = \phi(ax+by) + \psi(ax+by) + \varphi(ax+by).$$

Demuestra que

$$b\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

35. Comprueba que las parciales cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ de la aplicación

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no coinciden en el punto $(0,0)$. ¿Coinciden en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$? ¿Es diferenciable dicha función en el punto $(0,0)$?

36. Calcula el desarrollo de Taylor de orden tres en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \log(1+x+y)$

b) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$

c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

37. Consideremos un cilindro de altura h y radio de la base igual a r. Sabiendo que el error cometido en cada medida tiene una precisión de 0.01 cm, proporciona una estimación del error cometido al calcular el volumen del cilindro.

38. Calcula los extremos relativos de las siguientes funciones en el abierto Ω que se indica en cada caso:

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$,
$\Omega = \mathbb{R}^2$

b) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$,
$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\right\}$

c) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$,

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

d) $f(x,y,z) = xy^2z^3(a-x-2y-3z)$, $(a>0)$,

$\Omega = \mathbb{R}^2$

e) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(x+y+z)$

$\Omega =]0,\pi[\times]0,\pi[\times]0,\pi[$

39. Calcula los extremos de las siguientes funciones en los recintos D que se indican

    a) $f(x,y) = xy$,

    en $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\}$

    b) $f(x,y) = x^2+y^2$,

    en $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\}$

    c) $f(x,y) = \cos^2(x)+\cos^2(y)$,

    en $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=\pi/4\}$

    d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z)$,

    en $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z>0,\ x+y+z=\pi/2\}$

    e) $f(x,y,z) = xy+yz$,

    en $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y,z>0,\ x^2+y^2=2,\ y+z=2\}$

40. Calcula los extremos absolutos de las siguientes funciones en el dominio D que se indica en cada caso:

    a) $f(x,y,z) = x-2y+2z$,

    en $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$

    b) $f(x,y) = -x^2+xy+y^2-6x$,

    en $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 5,\ -3\le y\le 3\}$

    c) $f(x,y) = xy^2$,

    en $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\}$

41. Determina las dimensiones de una bañera rectangular abierta de una capacidad dada V para que su superficie sea mínima.

42. Halla un punto de la esfera unidad $x^2+y^2+z^2=1$ de forma que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a una serie de puntos dados $\{P_i=(x_i,y_i,z_i) : 1\le i\le m\}$ sea mínima.

43. Determina la distancia mínima del punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ al plano de ecuación

$$Ax+By+Cz+D=0$$

44. Comprueba que para las ecuaciones siguientes es posible obtener y como función implícita de x en un abierto alrededor del punto x_0 que se indica en cada caso, de forma que $y(x_0) = y_0$. Calcula además el desarrollo de Taylor de orden tres de dicha función implícita:

    a) $x^2 + xy + y^3 - 11 = 0, \qquad (x_0, y_0) = (1, 2)$
    b) $\operatorname{sen}(x) + \cos(y) - 1 = 0, \qquad (x_0, y_0) = (\pi/2, \pi/2)$
    c) $e^x + \tan(y) - 1 = 0, \qquad (x_0, y_0) = (0, 0)$

45. Demuestra que en las siguientes ecuaciones es posible determinar a z como función implícita de x e y en un entorno del punto (x_0, y_0), de forma que $z(x_0, y_0) = z_0$. Determina las derivadas parciales en (x_0, y_0) de la función implícita z:

    a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (6, -3, -2)$
    b) $xye^z + z\cos(x^2 + y^2) = 0, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

46. Dada la función vectorial $F(x, y, z) = (x + y + z,\ x - y - 2xz)$, comprueba que a partir de la ecuación vectorial (o sistema de ecuaciones) $F(x, y, z) = 0$, es posible obtener x e y como funciones implícitas de z en un entorno del punto $z_0 = 0$, con $x(z_0) = 0$ e $y(z_0) = 0$. Calcula las aproximaciones de Taylor de orden dos de las funciones obtenidas.

47. Dada la función vectorial $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ comprueba que la ecuación

$$F(x, y, z, t) = (0, 0)$$

    determina a z y t como funciones implícitas de las variables x e y en un abierto alrededor del punto (x_0, y_0), con $z(x_0, y_0) = z_0$, $t(x_0, y_0) = t_0$:

    a) $F(x, y, z, t) = (x^2 + y - z^2 - t^2,\ x^2 - y - z^2 - t)$
    $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (2, 1, 1, 2)$
    b) $F(x, y, z, t) = (ze^t + yz - z^2,\ y\cos(t) + x^2 - z^2 - 1)$
    $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (2, 1, 2, 0)$

48. Estudia la existencia de inversa de las funciones $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

    a) $f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y), \qquad \Omega = \mathbb{R}^2$
    b) $f(x, y) = (x^2 - y^2,\ 2xy), \qquad \Omega = \mathbb{R}^2$
    c) $f(x, y) = \left(\frac{x^2}{1-x^2-y^2},\ \frac{y^2}{1-x^2-y^2}\right) \qquad \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$

    Determina en cada caso la matriz jacobiana de la función inversa.

49. Comprueba que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \Omega \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\rho, \theta, \varphi) & \rightsquigarrow & (\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi) \end{array}$$

con $\Omega =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]-\pi/2, \pi/2[$, asociada al cambio de variable a coordenadas esféricas es un *difeomorfismo* (aplicación diferenciable con inversa diferenciable) y calcula las matrices jacobianas de φ y de su inversa.

50. Demuestra que la ecuación

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2} + \operatorname{sen} z$$

define implícitamente a z como función de x e y en el punto $(1, 1, 0)$. Calcula el desarrollo de Taylor de orden uno de dicha función en el punto $(1, 1)$.