Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Grado en Ingeniería Electrónica Automática e Industrial
Matemáticas I
Límites y Continuidad de funciones de varias variables

Hoja de problemas Tema 10

1. Calcular el máximo dominio de definición de las funciones siguientes. Estudia también la topología de dichos conjuntos, es decir, si se trata de conjuntos abiertos, cerrados, compactos, calcula su interior, su clausura, su frontera y los puntos de acumulación.

a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ b) $f(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2-4}, \log(x^2+y^2+z^2-1)\right)$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ d) $f(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2-1}, \frac{xy}{x^2+y^2-4}\right)$

e) $f(x,y) = \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ f) $f(x,y) = \sqrt{x}\log\left(1+\sqrt{x^2-y^2}+\frac{|y|}{|x|}\right)$

2. Calcular, en caso de que existan, los límites cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ de las siguientes funciones:

1) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ 3) $f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\cos\left(\dfrac{1}{y}\right)$

4) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}$ 5) $\vec{f}(x,y) = \left(x+y^2, \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ 6) $f(x,y) = (1+x^2y^2)^{-(x^2+y^2)^{-1}}$

7) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 8) $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ 9) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 10) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

11) $f(x,y) = \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ 12) $f(x,y) = \dfrac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ 13) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

14) $\vec{f}(x,y) = \left(xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, xy, \sqrt{|xy|}\right)$ 15) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right)\right)$

3. Dadas las funciones

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } |x| \neq |y|, \\ 0 & \text{si } |x| = |y|, \end{cases}$$

y

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ en los siguientes casos: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ y $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, donde k es un número real.

b) ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

c) Comprobar si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ y & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $\vec{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(xy)\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5. *a*) ¿Se puede hacer continua $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$ definiéndola de manera adecuada en $(0,0)$?

b) ¿Se puede hacer continua $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ definiéndola de manera adecuada en $(0,0)$?

6. Usar la regla de l'Hôpital para calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)-2x}{x^3}$. ¿Existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2x)-2x+y}{x^3+y}$?