



Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. U.P.C.T.  
Titulación: Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática  
Curso: Primero

## Hoja de Problemas 9. Integral de Riemann

1. Calcular las primitivas de las siguientes fracciones racionales:

$$(a) \int \frac{x^2 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2} dx \quad (b) \int \frac{x^4 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^3} dx$$
$$(c) \int \frac{x^7 + x^3}{x^4 - 1} dx \quad (d) \int \frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} dx.$$

2. Calcular las primitivas de las siguientes funciones (expresiones que contienen  $\frac{ax+b}{cx+d}$ ):

$$(a) \int \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}} (1+x)^{-2} dx \quad (b) \int \frac{x^{3/2}(1-x)^{-3/2}}{x+x^{1/2}(1-x)^{-1/2}} dx \quad (c) \int \frac{\sqrt{4+3x}}{4-3x} dx$$

3. Idem con las siguientes funciones (diferencias binomias):

$$(a) \int x(a+bx)^{-3/2} dx \quad (b) \int x^2(a+bx^2)^{-5/2} dx \quad (c) \int x^5(1+x^3)^{1/3} dx$$
$$(d) \int x(1+x^3)^{-2/3} dx$$

4. Idem con las siguientes funciones (expresiones que contienen  $\cos(x)$  y  $\sen(x)$ ):

$$(a) \int \frac{1}{\cos(x)} dx \quad (b) \int \frac{2 - \cos(x)}{2 + \cos(x)} dx \quad (c) \int \frac{1}{\sen(x) + \cos(x)} dx$$
$$(d) \int \frac{1 - \sen(x)}{1 + \sen(x)} dx \quad (e) \int \cos(x)^4 \sen(x)^3 dx$$

5. Idem con las siguientes funciones (funciones de la forma  $f(g(x))g'(x)$ ; primitivas de funciones de la forma  $f(e^x)$ ):

$$(a) \int x^5 \arctan \frac{x^6 + 4}{5} dx \quad \int \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}} \quad (c) \int \frac{\sen(\sqrt{x^3})}{\sqrt{x^3}} x^2 dx$$
$$(d) \int \frac{x e^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (e) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

6. Idem con las siguientes funciones (primitivas de expresiones que contienen  $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ ):

$$(a) \int (-4x^2 + 8x - 3)^{-1/2} dx \quad (b) \int (4x^2 - 4x + 1)(4x^2 - 4x + 2)^{-1/2} dx \quad (c) \int (3x^2 + 8x + 5)^{-3/2} dx$$

$$(d) \int (2 + \sqrt{3 + 6x - 9x^2})^{-2} (1 - x) dx$$

7. Calcular las siguientes integrales definidas:

$$(a) \int_0^1 x e^x dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) dx \quad (c) \int_1^2 \log(x) dx \quad (d) \int_a^b x^p dx, \text{ donde } p \neq -1$$

8. Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2n + j} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{j(n-j)}{n^3} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$$

9. Hallar las siguientes primitivas:

$$(a) \int \frac{dx}{(x^2 - 4)(x^2 + 9)} \quad (b) \int \frac{\arctan(x)}{1 + x^2} dx \quad (c) \int x^2 e^x dx \quad (d) \int \frac{dx}{\cos(x)^3}$$
$$(e) \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1 + \operatorname{sen}^2(x)} dx \quad (f) \int x \arctan(x) dx \quad (g) \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$$

10. Hallar el área de la región del plano  $S$  situada entre las gráficas de las funciones  $f(x) = x(x-2)$  y  $g(x) = x/2$ , sobre el intervalo  $[0, 2]$ .

11. Hallar el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones  $y = x$ ,  $y = x + \operatorname{sen}^2(x)$ ,  $(0 \leq x \leq \pi)$ .

12. Hallar la longitud de la curva  $y = x^{3/2}$  para  $0 \leq x \leq 4$ .

13. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las curvas  $y = x^3$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ , alrededor del eje  $x$ .

14. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las curvas  $y = 6x - x^2$ ,  $y = 0$ , alrededor del eje  $x$ .

15. Hallar el volumen del sólido generado al girar el triángulo de vértices  $(1, 2)$ ,  $(9, 0)$ ,  $(4, 5)$ , alrededor del eje  $x$ .

16. Calcular el área y el volumen de una circunferencia y una esfera de radio  $R$ .

17. Calcular el área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ .

18. Calcular el volumen de un cilindro de altura  $h$  y radio de la base  $r$ .
19. La base de un sólido es el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$  en el plano  $XOY$ . Sus secciones por planos perpendiculares al eje  $OX$  son cuadrados. Calcular el volumen del sólido.
20. La base de un sólido es el círculo de centro  $(0, 0)$  y radio 1 en el plano  $XOY$ . Sus secciones por planos perpendiculares al eje  $OX$  son cuadrados. Calcular el volumen del sólido.
21. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies de ecuaciones  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  y  $z = x$ .
22. Demostrar que las siguientes integrales impropias son convergentes y calcular su valor:

$$(a) \int_1^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx, \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + 1)}$$

$$(d) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1 - x^2|}} \quad (e) \int_{0^+}^1 \log(x) dx \quad (f) \int_{-1}^{0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$$