Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Grado en Ingeniería Electrónica Automática e Industrial
Matemáticas I
Límites, continuidad y derivabilidad de funciones reales de variable real

Hoja de problemas Tema 8

1. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \quad b) f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{\log(x)}}$$

$$c) f(x) = \log\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \quad d) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$$

2. Dadas las siguientes funciones, averiguar en qué puntos son discontinuas y por qué.

   a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ si $x \neq 2$, $f(2) = 0$.

   b) $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{|x|}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

   c) $f(x) = x \cdot e^{\frac{-1}{x}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

3. Calcular los siguientes límites ordinarios o laterales:

$$1) \lim_{x\to 1} \frac{x^{1/3}-1}{x-1} \quad 2) \lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)} \quad 3) \lim_{x\to 0} \frac{2x-\text{sen}(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$$

$$4) \lim_{x\to +\infty} ((x^3+1)^{1/3} - x) \quad 5) \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$$

$$6) \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\text{sen}^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}\right) \quad 7) \lim_{x\to a} (a^2-x^2)\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$8) \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} \quad 9) \lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$$

$$10) \lim_{x\to \infty} x(\sqrt[x]{2}-1) \quad 11) \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

4. Calcular $f(0)$ para que sean continuas en $x = 0$ la siguientes funciones:

$$1) f(x) = x^2 \text{sen}\frac{1}{x} \quad 2) f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x} \quad f(x) = \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}$$

5. Calcular los siguientes límites:

$$1)\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}\qquad 2)\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\qquad 3)\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$4)\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1-\cos(x))}{\operatorname{sen}^4 x}\qquad 5)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)}\qquad 6)\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$7)\lim_{x\to 1/2}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)\qquad 8)\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\qquad 9)\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(a)}{x-a}$$

$$10)\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$$

6. Determinar los valores del número real k para los cuáles la función $p(x)=x^3-3x+k$ se anula en algún punto del intervalo $[-1,1]$.

7. Estudiar la existencia y la continuidad de la función inversa de la función $f(x)=3+1/x$ definida para $x>0$.

8. Estudiar la existencia y la continuidad de la función inversa de la función $f(x)=(1-x^3)/x^3$ definida para $x>1$.

9. Estudiar la derivabilidad en el punto $x_0=0$ de las siguientes funciones

$$f(x)=(x^3+x^2)^{1/2}\qquad y\qquad f(x)=\left|x^{1/3}\right|$$

definidas en un entorno de $x_0=0$. ¿Son continuas estas funciones en dicho punto?

10. Se considera la función f definida sobre $\mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$f(x)=e^{-1/(1-x^2)}\quad si\quad |x|<1$$
$$f(x)=0 \text{ si } |x|\geq 1$$

   a) Demostrar que f es continua en todo $\mathbb{R}$.
   b) Calcular la derivada de f en cualquier punto $x\in\mathbb{R}$.

11. Calcular las derivadas a la derecha y a la izquierda de $x=0$ de la función

$$f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x} & si\, x\neq 0\\ 0 & si\, x=0\end{cases}$$

12. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

   1)$f(x)=\arctan(\sqrt{x-1})-\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$ $x>1$; 2)$f(x)=\log\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, $0<x<1$;

   3)$f(x)=\log\cos\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $|x|>1$; 4)$f(x)=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$, $x>3$;

   5)$f(x)=(\operatorname{sen}(x))^{\cos(x)}$ $0<x<\pi/2$; 6)$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, $x>0$

   7)$f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2\log(1+x)}$, $x>-1$; 8)$f(x)=x^{\arcsin(x)}$, $x>0$

13. Halla las intersecciones con los ejes de la recta que es tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $(-2, -8)$.

14. Halla los puntos sobre la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente sea

    a) perpendicular a la recta $y = 1 - (x/24)$;

    b) paralela a la recta $y = \sqrt{2} - 12x$.

15. Una partícula se mueve de izquierda a derecha sobre la parábola $y = \sqrt{-x}$, de tal manera que su coordenada x (medida en metros) decrece a razón de 8 m/s. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo de inclinación θ de la recta que une a la partícula con el origen cuando $x = -4$?.

16. Las coordenadas de una partícula en el plano métrico xy son funciones diferenciables del tiempo t, con $dx/dt = -1m/s$ y $dy/dt = -5m/s$. ¿Con qué velocidad cambia la distancia de la partícula al origen cuando pasa por el punto $(5, 12)$?

17. Un aeroplano que patrulla la autopista vuela a 3 millas sobre una autopista recta y sin declive alguna a 120 mi/h. El piloto ve un auto que se acerca y con el radar determina que el instante en el que la distancia entre ellos y el auto a lo largo de su línea de visión es de 5 millas, dicha distancia decrece a razón de 160 mi/h. Halla la velocidad del auto sobre la autopista.

18. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \qquad b) f(x) = \log(|x|)$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases} \qquad d) f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } -\pi/2 < x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

19. Sea $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ siendo $m, n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $f'(x)$ posee una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

20. La función $f(x) = \frac{2-x^2}{x^4}$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Además $f'(x)$ no se anula en dicho intervalo. ¿Contradice esta función el teorema de Rolle?

21. Estudiar si f verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[a, b]$:

$$(a) f(x) = 2x + \operatorname{sen}(x), \quad a = 0, \quad b = \pi$$

$$(b) f(x) = 1 - (1-x)^{1/3}, \quad a = 0, \quad b = 2$$

22. Demostrar que las siguientes funciones tiene una única solución real:

$$(a) 2^{-x} = x \qquad (b) \operatorname{sen}(x) = x$$

23. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 4\cos(x), \quad x \in [0, 2\pi]$,

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 3]$,

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

24. Resolver de manera aproximada por el método de Newton las ecuaciones siguientes:

    a) $\cos(x) = x$, con dos cifras decimales exactas. Punto de inicio: $x_0 = 0{,}5$.

    b) $4x^3 - 14x - 2 = 0$, con tres iteraciones. Punto de inicio: $x_0 = 2$.

25. Estudiar la existencia de los siguientes límites. ¿Puede aplicarse la regla de L'Hőpital?

    a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}$;

    b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}$.

26. Sea la función $f(x) = x + 2\cos(x)$.

    a) Hallar, si existe, el valor mínimo de f en el intervo $[0, 1]$.

    b) Probar que f es estrictamente creciente en el intervalo $I = [-1/2, 1/2]$. Deducir que existe f^{-1}, la función inversa de $f(x)$ para $x \in I$.

    c) Calcular $(f^{-1})'(2)$.

27. Escribir el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = (\log(x))^2$ en el punto $x_0 = 1$ hasta el lugar de orden 4, con el término complementario de Lagrange.

28. Escribir el desarrollo de Taylor de las funciones $f(x) = xe^{(x-1)}$ y $g(x) = x^3\log(x)$ en el punto $a = 1$ con el término complementario de Lagrange.

29. Haciendo uso de la fórmula de Taylor para la función $(1+x)^{1/3}$ calcular aproximadamente $(1,03)^{1/3}$. Situando el término complementario en el lugar de las derivadas terceras, estimar el error cometido.

30. Calcular los siguientes límites:

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(3x))}$ *b*) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x(1-\cos(3x))}$

31. Representar gráficamente las siguientes funciones:

    a)$y = \frac{x+e^x}{x-e^x}$ *b*)$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$ *c*)$y = x\sqrt{x(4-x)}$
    d)$y = e^x\sqrt{2x^2-4x}$ *e*)$y = \frac{x^3}{(1+x)^2}$