Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. U.P.C.T.
Titulación: Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Curso: Primero

Hoja de Problemas 6. Espacio Vectorial Euclídeo

1. Califique cada afirmación verdadera o falsa. Justifique cada respuesta.

   a) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2$.

   b) Para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

   c) Si la distancia de $\vec{v}$ a $\vec{w}$ es igual a la distancia de $\vec{v}$ a $-\vec{w}$, entonces $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

   d) Para una matriz cuadrada A, los vectores de la forma $A \cdot \vec{v}^T$ son ortogonales a $Ker(A)$.

   e) Si los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ generan un subespacio W y si $\vec{v}$ es ortogonal a cada $\vec{v}_j$ para $j = 1, \ldots, p$, entonces $\vec{v} \in W^{\perp}$.

   f) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$.

   g) Si $\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2$, entonces $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

2. Demuestre que si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$, entonces $\vec{v}$ es ortogonal al subespacio generado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

3. Encuentre en cada caso la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre el subespacio generado por los vectores ortogonales $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

   a) $\vec{v} = (-1, 4, 3)$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)$;

   b) $\vec{v} = (6, 3, -2)$, $\vec{v}_1 = (3, 4, 0)$, $\vec{v}_2 = (-4, 3, 0)$;

   c) $\vec{v} = (-1, 2, 6)$, $\vec{v}_1 = (3, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, -2)$;

   d) $\vec{v} = (6, 4, 1)$, $\vec{v}_1 = (-4, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$;

4. Escriba el vector $\vec{v}$ como suma de un vector del espacio generado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y otro del subespacio ortogonal.

   a) $\vec{v} = (1, 3, 5)$, $\vec{v}_1 = (1, 3, -2)$, $\vec{v}_2 = (5, 1, 4)$;

   b) $\vec{v} = (-1, 4, 3)$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, 2)$;

5. Sean $\vec{v} = (4, 8, 1)$, $\vec{v}_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$, $\vec{v}_2 = (-2/3, 2/3, 1/3)$ y W el subespacio generado por $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Calcule la proyección de $\vec{v}$ sobre W.

6. Sea $W = \langle \{(1, 1, 1), (1/3, 1/3, -2/3)\} \rangle$. Construya una base ortonormal para W.

7. Calcular los subespacios ortogonales a:

   a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$.

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$.

8. Sea V un espacio vectorial sobre el cual se tiene definido un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de forma que para la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ se verifica:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = 1, \qquad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1, \qquad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle = 3, \qquad \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 1, \qquad \langle \vec{v}_3, \vec{v}_3 \rangle = 1.$$

Se pide calcular:

a) El producto escalar de los vectores $\vec{v} = (1, 3, -1)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$, así como el ángulo que forman.

b) Una base ortonormal a partir de B.

c) El valor de α para que el vector $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ sea unitario.

d) El valor de α para que los vectores $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (\alpha, -1, -1)$ sean ortogonales.

9. Calcular las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) La proyección de base $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$ y dirección $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$.

b) La simetría de base $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$ y dirección $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$.

c) La homotecia de razón $1/2$.

10. Calcular las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

a) El giro de ángulo π.

b) La proyección ortogonal con base $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$.

c) Las homotecias de razones $1/2$, 4 y π.