Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. U.P.C.T.
Titulación: Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Curso: Primero

Hoja de Problemas 5. Diagonalización de matrices

1. Sea A la matriz real, dependiente del parámetro α:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 1-\alpha & -2\alpha-\alpha^2 \\ 0 & 4-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

   a) Obtener los valores de α para los que A es diagonalizable.

   b) Diagonalizar A para $\alpha = 1$ y para $\alpha = 2$.

2. Hallar los valores propios y los subespacios propios de la matriz A, de tamaño $n \times n$ con $n \geq 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix}.$$

   ¿Es diagonalizable?

3. De la siguiente matriz A se sabe que $\lambda_1 = 1$ es uno de su valores propios y que $(1,1,1)$ es un vector propio de A asociado al autovalor λ_1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar α, β y γ.

   b) Hallar los valores propios y los subespacios propios de A.

   c) Comprobar que A es diagonalizable y hallar su matriz diagonal D.

   d) Hallar una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

4. Comprobar si las siguientes matrices son diagonalizables y en caso afirmativo calcular las matrices diagonal y de paso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcular la potencia de orden k de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Califique cada enunciado como verdadero o falso. Jusifique cada respuesta. A, B, P y D son matrices cuadradas de tamaño $n \times n$.

   a) A es diagonalizable si $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz D y alguna matriz invertible P.

   b) Si $\mathbb{R}^n$ tiene una base de vectores propios de A, entonces A es diagonalizable.

   c) A es diagonalizable si y sólo si A tiene n valores propios contando las multiplicidades.

   d) Si A es diagonalizable, entonces A es invertible.

   e) Si A es diagonalizable, entonces A tiene n valores propios distintos.