Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. U.P.C.T.
Titulación: Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Curso: Primero

**Hoja de Problemas 4. Aplicaciones lineales**

1. Deducir cuáles de las siguientes aplicaciones $f : U \to V$ son lineales:

   a) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (z, x + y, -z, y - x)$.
   b) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, 0)$.
   c) $U = V = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (z, x + y, -z)$.
   d) $U = V = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1, -x_2)$.
   e) $U = \mathbb{R}^4, V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z, t) = (x - 3y + 8t, 2x)$.
   f) $U = V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_3)$.
   g) $U = V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x - y, 6x)$.
   h) $U = V = \mathbb{R}^3$, $f(x) = x + x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$, fijo.
   i) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2, y + z)$.
   j) $U = V = M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = \frac{1}{2}(A - A^t)$.
   k) $U = V = P_3$ (=polinomios de grado menor o igual que 3), $f(p(x)) = xp'(x)$.
   l) $U = V = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, 1, y)$.
   m) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 0)$.
   En los casos afirmativos clasificar la aplicación lineal y calcular su núcleo e imagen.
   **Solución:** Son lineales las aplicaciones de a), b), c), d), e), f), g), h) [solamente si $x_0 = 0$], j) y k).

2. Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $f$ es inyectiva si y sólo si $\dim \mathrm{Im} f = \dim U$. En esta situación $\dim U \leq \dim V$.
   b) $f$ es suprayectiva si y sólo si $\dim \mathrm{Im} f = \dim V$. En esta situación $\dim U \geq \dim V$.
   c) $f$ es biyectiva si y sólo si $\dim U = \dim V = \dim \mathrm{Im} f$. En esta situación $\dim U = \dim V$. De hecho, cuando $\dim U = \dim V$ entonces, $f$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ es suprayectiva (con lo que $f$ es biyectiva).

   (Indicación: Usar la fórmula $\dim U = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f$.)

3. Sean $U$ y $V$ dos espacios vectoriales. Considerar el conjunto $Hom(U,V) = \{f : U \to V : f$ es lineal$\}$, es decir, todas las aplicaciones lineales que van desde $U$ hasta $V$. Demostrar que con la suma $f+g : U \to V$ dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y el producto por escalares $\alpha \cdot f : U \to V$ definido por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, el conjunto $Hom(U,V)$ tiene estructura de espacio vectorial.

4. Si $f : U \to V$ es una aplicación lineal, probar que $\ker f$ es un subespacio de $U$ y que $\mathrm{Im} f$ es un subespacio de $V$.

5. Sea $f$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (z+y+z, x+y-z, z)$. Hallar $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ y $f(V)$, donde $V = \{(x,y,z) : x+y+z = 0\}$.

6. Supongamos que tenemos una base $B = \{u,v\}$ de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que tenemos un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que cumple que $f(u) = 5u+2v$ y $f(v) = 3u-v$. Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de la base $B$.

7. Se considera el homomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, que hace corresponder a los vectores $(1,0,1),(0,1,1)$ y $(1,1,0)$ los vectores $(0,1),(0,2)$ y $(1,1)$ respectivamente. Hallar la matriz asociada a $f$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

8. Sea $f$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (z+y, -x+y-z, z)$. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$ $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ hallar $M_C(f), M_B(f), M_{BC}(f)$ y $M_{CB}(f)$.

9. Sea $f$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de la base $B' = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

10. Se consideran tres espacios vectoriales $A$, $B$ y $C$ con bases respectivas $a = \{a_1,a_2,a_3\}, b = \{b_1,b_2\}$ y $c = \{c_1,c_2,c_3\}$. Supongamos que tenemos homomorfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dados por las condiciones $f(a_1) = b_1 - b_2, f(a_2) = b_2$ y $f(a_3) = 2b_2$; $g(b_1) = c_1 - c_2 + 2c_3$ y $g(b_2) = c_1 - c_2$. Se pide:

    i) Matriz asociada a $f$ respecto de las bases $a$ y $b$.
    ii) Matriz asociada a $g$ respecto de las bases $b$ y $c$.
    iii) Matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases $a$ y $c$.

11. Supongamos que tenemos un endomorfismo $f$ de un espacio vectorial $E$. Demostrar que $f \circ f = 0$ si y sólo si $\mathrm{Im} f \subset \ker f$.

12. Dentro del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se considera el siguiente conjunto $M = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ y la aplicación $f : M \to M$ definida por $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Se pide:

a) Demostrar que $M$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y dar una base de él.

b) Demostrar que $f$ es una aplicación lineal y calcular la matriz asociada a $f$ en la base calculada en el apartado anterior.

13. Ver si es posible que existan aplicaciones lineales como se indica a continuación (justificando la respuesta):

    a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(1,0) = (2,-1,3), f(0,1) = (3,5,8)$ y $f(1,1) = (3,0,-1)$.

    b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $g(1,8) = (6,4), g(2,7) = (0,-1)$ y $g(-1,1) = (6,5)$.

14. Decir si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas (justificando la respuesta):

    a) Si una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tiene por núcleo $\ker f \equiv x - y + z = 0$, entonces $f$ es inyectiva.

    b) Si $f$ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (0,1)$ y $f(2,3) = (0,1)$, entonces $f(1,0) = (0,1)$.

    c) Si $f$ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (0,2)$ y $f(1,-1) = (2,0)$, entonces la matriz asociada a $f$ respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

    d) Existe un endomorfismo $f$ de $\mathbb{R}^2$ tal que respecto de dos bases tiene por matrices asociadas $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    e) El endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es biyectivo.