Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. U.P.C.T.
Titulación: Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Curso: Primero

Hoja de Problemas 3. Espacios vectoriales.

1. Demuestra que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales dados:

   a) $A = \{(x, y, z, t) : x + y + z + t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   b) $B = \{(x, y, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   c) $C = \{(x, y, z) : 3x - y = 0, z = 3y\}$ de $\mathbb{R}^3$
   d) $D = \{(3x - y, 2x - z, x, z - y) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   e) $E = \{$El conjunto de los polinomios $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tales que $p(0) = 0\}$, del espacio vectorial $\mathbb{P}^3[x]$.

2. Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales:

   a) $A = \{(x, y, z, t) : x + 2y - z + t = b\}$ con $b \in \mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^4$.
   b) $B = \{(x, y) : xy = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   c) $C = \{(x, y, z, t) : x = \alpha, y = \alpha, z = 2\alpha, t = 5\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   d) $D = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, y - z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   e) $E = \{(x, y) : x^2 = b \; ; \; b \in \mathbb{R}^+\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   f) $F = \{(x, y) : x \geq y\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   g) El subconjunto de polinomios $E = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a = 0, b = c + d\}$ de $\mathbb{P}_3$.
   h) El conjunto de polinomios $P = \{p(x)$ tales que $p(x) - p''(x) = 0\}$ de $\mathbb{P}_3$.
   i) El subconjunto de F de las funciones positivas $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \; f(x) > 0$ para todo $x\}$.

3. Obtén las ecuaciones paramétricas, las ecuaciones implícitas, una base y la dimensión de los subespacios de los ejercicios anteriores, y da una base y la dimensión del espacio vectorial.

4. Determina el valor de a y b para que el vector $(1, 0, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.

5. Sea $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden 2, da una base y la dimensión de este espacio vectorial. Probar que el conjunto $\{B \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : \; AB = BA\}$ es un subespacio vectorial. Halla la dimensión y una base de este subespacio, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. De las siguientes afirmaciones, demuestra las que sean ciertas y da un contraejemplo para las falsas.

   a) Todo sistema de n+1 vectores siempre genera a V.
   b) Un sistema de $m < n$ vectores es siempre un sistema libre.
   c) Un sistema libre con n vectores es generador de V.
   d) Un sistema generador de V con n vectores es un sistema libre.
   e) Todo sistema que contenga al vector nulo es ligado.
   f) Todo sistema que no contenga al vector nulo es libre.

7. Comprobad si los siguientes conjuntos de vectores son L.I., generadores y (o) base de los espacios vectoriales correspondientes, hallando en cada caso su rango, la dimensión del subespacio vectorial que generan, y sus ecuaciones (implícitas y paramétricas)

   i) $\{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   ii) $\{(1,-1,0),(1,1,0)\}$ de $W = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$.
   iii) $\{(1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2 = \{$polinomios de grado menor o igual que 2$\}$.
   iv) $\{(2,0,0),(3,2,0),(4,3,x)\}$ $(x \in \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^3$.
   v) $\{(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)\}$ $(a \in \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^3$.
   vi) $\{(1,2,3,0),(4,3,4,-16),(7,3,4,5)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   vii) $\{(1,0,0,-1),(2,1,1,-2),(0,1,1,0),(1,1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   viii) $\{(4,-5,7),(3,3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   ix) $\{(1,2,3,1),(2,3,2,3),(0,1,4,-1),(2,-3,1,1),(4,1,7,3)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

8. Halla una base de cada uno de los siguientes subespacios:

   a) $< (1,2,-1),(3,-1,0),(4,1,1) >$ de $\mathbb{R}^3$.
   b) $< (1,0,2),(-2,1,1),(0,1,5) >$ de $\mathbb{R}^3$.
   c) $< (1,2,3,4,5),(0,-1,1,2,3),(3,2,1,0,-1),(-4,-3,-2,-1,0) >$ de $\mathbb{R}^5$.

9. Dadas las siguientes afirmaciones, demuestra las que sean ciertas y da un ejemplo para las falsas:

   a) Si $\{x,y,z\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces es l.i. el conjunto:

      1) $\{x,y\}$
      2) $\{x-y, x+y, y+z\}$
      3) $\{x-z, x+y, z-x\}$

4) $\{x, y, v\} \;/\; v = ax + by + cz \quad$ con $\quad c \neq 0$

b) Si u, v, w son vectores linealmente dependientes de un espacio vectorial,

1) ¿Puede asegurarse que u y v son linealmente dependientes?
2) ¿Puede asegurarse que u depende de los otros dos?
3) ¿Puede asegurarse que uno de los tres depende de los otros dos?

c) Si $\{u, v, w\}$ es una base de un espacio vectorial entonces, ¿es posible que $u + v + w = 0$?

d) Si son linealmente independientes los conjuntos de vectores $\{x, y\}$,$\{y, z\}$ y $\{x, z\}$ entonces, ¿debe ser el conjunto $\{x, y, z\}$ linealmente independiente?

e) Si $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es un sistema generador del espacio vectorial V, entonces ¿debe ser $\dim V \leq 4$?

f) Si $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es un conjunto libre del espacio vectorial V, entonces ¿debe ser $\dim V \leq 4$?

10. Halla una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ que contenga al vector $(1, 2, 1, 1)$ y otra base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 2)$ y $(1, -1, 2, 0)$.

11. Hallar una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

a) $V_1 =< (1, 2, 0, 1) >$.

b) $V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0, y - z = 0\}$.

c) $V_3 = \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = \gamma \\ t = \mu \end{array} \right.$.

d) $V_4 = \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{array} \right.$.

12. Sea $\mathbb{P}_n(x)$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n Demostrad que x^n y sus n primeras derivadas forman una base de $P_n(x)$. Da otra base (más sencilla). Sean $V =< \{p_1 = 1 + 3x + x^2, p_2 = -1 + 2x^2, p_3 = 3 + 3x + x^2\} >$; $p = 1 + x^2$ y $q = 7 + 6x$. Da las coordenadas de estos cinco polinomios en la base "más sencilla" de $\mathbb{P}_2(x)$. ¿pertenecen p y q a V?

13. Sea $S =< (1, 2, 1, -1), (1, 3, a, -1), (-1, a, -3, 1) >$. Siendo a tal que $(1, -1, 4, -1) \notin S$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x + t = b \;,\; y = c - 1\}$. Con b y c tales que T es un subespacio vectorial. Obtén las ecuaciones, una base y la dimensión del subespacio S y del subespacio T. Calcular una base y la dimensión de los subespacios: $S + T$ y $S \cap T$.

14. $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0, \; x + 2y - z + t = 0, \; x - y + z + t = 0, \; x + y + 2z - at = 0\}$. Calcula el valor de a para que T sea un subespacio de dimensión uno, y siendo

$$S =< (1, 2, 1, 3), (2, 5, 3, 1), (1, -1, -2, 2) > .$$

Da una base y la dimensión de los subespacios: S, T, $S + T$ y $S \cap T$.

15. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de vectores: $C = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ y $B = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$. Comprueba que son bases de $\mathbb{R}^2$. Utilizando la ecuación matricial correspondiente cuando sea necesario hacer operaciones, da las coordenadas de los vectores u_1, u_2, $v = 2u_1 - u_2$ y $w = 2e_1 - e_2$ en la base C y en la base B.

16. Halla las matrices cambio de base $M_{BB'}$ y $M_{B'B}$ en $\mathbb{R}^3$, y utilizando la ecuación matricial de cambio de base obtén las coordenadas del vector $(v)_B = (2, -1, 1)$ en la base B', en los siguientes casos:

    a) $B = B_1 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ y $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
    b) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B' = B_2 = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.
    c) $B = B_1 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ y $B' = B_2 = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

17. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema de vectores

$$B = \{(-1, 0, 1), (0, 1, -1), (4, -2, -1)\}.$$

Comprueba que es base de $\mathbb{R}^3$. Halla la matriz de cambio de base de la base canónica a la base B (utilizar un método en el que no haya que calcular determinantes). Y obtén las coordenadas en la base B del vector cuyas coordenadas en la base canónica son: (-1,1,2).

18. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden 2. Consideremos los siguientes subconjuntos $U = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}\}, V = \{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & -c \end{smallmatrix}\right) : c, d, e \in \mathbb{R}\}$. Se pide:

    a) Probar que U y V son subespacios vectoriales de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
    b) Obtener una base y calcular la dimensión de los subespacios $U, V, U + V$ y $U \cap V$.

19. Si $S = \langle(1, 2, -1, 3), (2, 5, 1, -1), (5, 12, 1, 1)\rangle$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + 2z + t = 0, \; 2x + 4y + z + t = 0, \; x - y + 5z + 2t = 0\}$. Calcular una base y la dimensión de los subespacios: S, T, $S \cap T$ y $S + T$. .

20. Sea $S =< (1, 2, -1, 1), (1, 3, -1, a), (-1, -1, a, -1) >$, siendo a tal que $(1, -1, -1, 2) \in S$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + t = b \;, \; y^2 = c\}$. Con b y c tales que T es un subespacio vectorial. Obtén las ecuaciones, una base y la dimensión del subespacio S y del subespacio T. Calcula una base y la dimensión de los subespacios: $S + T$ y $S \cap T$.

21. Hallar un conjunto generador de $U \cap V$, si U y V están dados por

$$U \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \quad V \equiv \begin{cases} x = \lambda + \mu + \partial \\ y = \mu + \partial \\ z = \lambda + \partial \\ t = \mu + \partial \end{cases}$$