Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. U.P.C.T.
Titulación: Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Curso: Primero

Hoja de Problemas 2. Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones.

1. Suponga que las matrices que se mencionan en los siguientes enunciados tienen los tamaños adecuados. Califique cada enunciado como verdadero o falso. Justifique cada respuesta.

   a) Si A y B son de tamaño $m \times n$, entonces tanto AB^T como A^TB están definidas.

   b) Si $A \cdot B = C$ y C tiene dos columnas, entonces A tiene dos columnas.

   c) Multiplicando por la izquierda una matriz B por una matriz diagonal A se escalan las filas de B.

   d) Si $BC = BD$ entonces $C = D$.

   e) Si A y C son matrices tales que AC es igual a la matriz nula, entonces o A es la matriz nula o B lo es.

   f) Si A y B son $n \times n$, entonces $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

   g) Una matriz elemental $n \times n$ tiene o bien n o bien $n + 1$ entradas diferentes de cero.

   h) La traspuesta de una matriz elemental es una matriz elemental.

   i) Una matriz elemental debe ser cuadrada.

   j) Toda matriz cuadrada es un producto de matrices elementales.

   k) Si A y B son cuadradas e invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

   l) Si $AB = BA$ y A es invertible, $A^{-1}B = BA^{-1}$.

   m) Si A es invertible y $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, entonces $(rA)^{-1} = rA^{-1}$.

   n) Si A es una matriz 3×3 y la ecuación $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene una única solución entonces A es invertible.

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

   a) Hallar $3A(A^t) - 2I_2$, siendo $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) Resolver la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Si $B = 2A - I_n$, demostrar que B^2 es igual a I_n.

4. Demostrar que si una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifica que $A^2 - A - I_2 = 0$, entonces existe la inversa de A. Calcularla.

5. Se considera la matriz cuadrada con coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Demostrar que si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces $A^n = A$ para todo entero positivo n.
Observación: Demostrar el resultado por inducción.

6. Calcular el rango de la siguiente matriz en función de los valores de a y b.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

7. Calcular el rango de las siguientes matrices empleando operaciones elementales. En el caso en el que la hubiere calcular la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1-\pi & e \\ \pi & 1-e \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 43 & 76 \end{pmatrix}$$

8. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números fijos. La matriz siguiente, llamada *matriz de Vandermonde*, aparece en aplicaciones como procesamiento de señales, códigos correctores de errores e interpolación de polinomios.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dado $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, suponga que $\vec{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ satisface $V\vec{c} = \vec{y}$, y defina el polinomio

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$$

a) Demuestre que $p(x_1) = y_1, \ldots p(x_n) = y_n$. Llamamos a $p(t)$ un *polinomio de interpolación* para los puntos (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) porque la gráfica de $p(t)$ pasa por estos puntos.

b) Suponga que $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos. Demuestre que las columnas de V son linealmente independientes. (*Sugerencia*: ¿Cuántos ceros puede tener un polinomio de grado $n-1$?).

c) Demuestre que Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos e $y_1, \ldots, y_n$ son números arbitrarios, entonces hay un polinomio de interpolación de grado menor o igual que $n-1$ para (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n).

9. Califique cada enunciado como verdadero o falso. Justifique cada respuesta. Suponga que todas las matrices son cuadradas.

   a) Si A es una matriz 2×2 con determinante cero, entonces una columna de A es un múltiplo de la otra.

   b) Si dos filas de una matriz A 3×3 son iguales, entonces $det(A) = 0$.

   c) Si A es una matriz 3×3, entonces $det(5A) = 5det(A)$.

   d) Si A y B son matrices $n \times n$, con $det(A) = 2$ y $det(B) = 3$, entonces $det(A + B) = 5$.

   e) Si A es $n \times n$ y $det(A) = 2$, entonces $det(A^3) = 6$.

   f) Si B se produce intercambiando dos filas de A, entonces $det(B) = det(A)$.

   g) Si B se forma sumando a una fila de A una combinación lineal de las otras filas, entonces $det(B) = det(A)$.

   h) $det(A^T) = -det(A)$.

   i) $det(-A) = -det(A)$.

   j) Si A es invertible, entonces $det(A^{-1}) = det(A)$.

   k) Si A es invertible, entonces $det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$.

10. Utilice operaciones por fila para demostrar que todos los determinantes son cero.

$$(a)\begin{vmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \qquad (c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{vmatrix}.$$

11. Demostrar que si a, b, c son números reales se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

12. Calcular los siguientes determinantes:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (b)\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (c)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (d)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(e)\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \quad (f)\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad (g)\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \quad (h)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

13. Hallar todas las soluciones de los siguientes sistemas:

$$(a)\begin{cases} 2x+2y-3z=2 \\ -x+5y-4z=4 \\ x+7y-7z=7 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} -x+y-2z-t=0 \\ 2x-y+z-2t=2 \\ x+2y-z+t=3 \\ 3x+4y-3z-t=1 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} 4x-y+2z-t=0 \\ 2x+3y-z-2t=0 \\ 7y-4z-5t=0 \\ 2x-11y+7z+8t=0 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} x-y=-1 \\ -x+y=1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases} \quad (e)\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{cases} \quad (f)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$$

14. Discutir y resolver según el valor de los parámetros que aparezcan:

$$(a)\begin{cases} \alpha x+y+2z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=\beta \\ 2x-5y+\alpha z=-2 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} 2y-z=\alpha \\ 3x-3z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=\alpha \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} 2x-y-z=3a \\ x-az=b \\ x-y+2z=7 \end{cases} \quad (e)\begin{cases} 2\lambda x+\mu y+2z=1 \\ 2\lambda x+(2\mu+1)y+3z=1 \\ 2\lambda x+\mu y+(\mu+3)z=2\mu-1 \end{cases} \quad (f)\begin{cases} \alpha x+\beta y+z=1 \\ x+\alpha\beta y+z=\beta \\ x+\beta y+\alpha z=1 \end{cases}$$

15. La suma de las tres cifras de un número es igual a 6. La cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de la unidad y de la decena. Si se invierte el orden de las cifras el número disminuye en 198 unidades. Calcular dicho número.

16. Describa geométricamente el conjunto solución en $\mathbb{R}^3$ de $x-4y+3z=0$ y compárelo con el conjunto solución de $x-4y+3z=7$.

17. Suponga que una economía tiene solamente dos sectores: bienes y servicios. Cada año, bienes vende el 80 % de su producción a servicios y se queda con el resto, mientras que servicios vende el 70 % de su producción a bienes y retiene el resto. Encuentre precios de equilibrio para la producción anual de los sectores de bienes y servicios que hagan que los ingresos de cada sector equivalgan a sus gastos.

18. Encontrar coeficientes enteros apropiados tales que para cada elemento (nitrógeno, oxígeno, etc...) en la ecuación el número de átomos de ese elemento en el lado izquierdo de la reacción iguale el número total de átomos de ese mismo elemento en el lado izquierdo de la reacción iguale el número total de átomos de ese mismo elemento a la derecha.

$$PbN_6 + CrMn_2O_8 \to Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO.$$