# *Ecuaciones Diferenciales*

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I(1º Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática)

# Definiciones básicas

Comenzamos con la definición de *ecuación diferencial*.

**Definición**

*Llamaremos ecuación diferencial de orden n a una expresión de la forma:*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{n)}) = 0,$$

*siendo F una función real definida en un abierto* $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *e* $y(x)$ *una función real de variable real n veces derivable.*

Tras la definición concluimos que una ecuación diferencial no es sino una expresión en la que aparece una *variable independiente*, $x$ y una *variable dependiente* de $x$, $y(x)$ y las derivadas de ésta última con respecto de $x$. Obsérvese que el *orden* de la ecuación es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

### *Definición*

*Dada una ecuación diferencial*

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{n)}) = 0,$$

*diremos que la función* $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ *es una solución de la ecuación diferencial si:*

1. *Existe la derivada n-ésima de y para todo punto* $x \in (a, b)$.
2. *El vector* $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n)}(x)) \in A$ *para cada* $x \in (a, b)$.
3. $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{n)}(x)) = 0$ *para cada* $x \in (a, b)$.

En general dada una ecuación diferencial es posible que existan infinitas soluciones para la misma. Llamamos *solución general* de una ecuación diferencial al conjunto de todas las funciones que verifican dicha ecuación. En general, son familias $n$-paramétricas de curvas siendo $n$ el orden de la ecuación.

### *Ejemplo*

*La solución general de la ecuación $y' - y = 0$ es el conjunto de funciones $y = Ce^x$, que es una familia de funciones dependiente de un sólo parámetro.*

En ocasiones nos interesa que la solución que buscamos verifique además unas condiciones adicionales a las que denominamos *condiciones de contorno*, *condiciones iniciales* o *Problema de Cauchy*. Consiste en añadir a una ecuación diferencial de orden $n$, $n$ datos adicionales correspondientes a los valores iniciales de la función y sus $n-1$ primeras derivadas, es decir, el problema,

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde $x_0, y_0, \dots, y_{n-1}$ son números reales arbitrarios.

# Existencia y unicidad de soluciones

El siguiente teorema nos garantiza la existencia y unicidad de la solución en un problema de condiciones iniciales.

## Teorema

*Sean $\epsilon, \delta$ dos números reales positivos, $x_0$, $y_0$, dos números reales arbitrarios, y $f : (-\epsilon + x_0, x_0 + \epsilon) \times (-\delta + y_0, y_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ una función continua con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua. Entonces existen un número real positivo $\lambda$ y una función $y : (-\lambda + x_0, x_0 + \lambda) \to \mathbb{R}$ que es la única del problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y' & = f(x,y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

La importancia de este teorema radica en que permite determinar de forma sencilla cuando algunos problemas de condiciones iniciales tienen solución única.

### Ejemplo

*El problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

*verifica las condiciones del teorema.*

# Ecuaciones del tipo $y' = f(x)$

El caso más sencillo de ecuaciones diferenciales que tenemos es aquél en el que no aparece explícitamente la incógnita $y$, es decir, se corresponden con el tipo $y' = f(x)$. Para resolverlas basta con integrar en cada miembro de la ecuación, obtenemos así,

$$\int dy = \int f(x)dx$$

$$y = \int f(x)dx + C,$$

siendo $C$ una constante.

# Ecuaciones de variables separadas

Una ecuación de primer orden se dice que es de variables separadas si tiene la forma

$$y' = f(y)g(x)$$

donde $f$ y $g$ son dos funciones reales definidas sobre intervalos abiertos. Suponiendo que $f(y) \neq 0$ en el dominio de definición de $f$ podemos transformar nuestra ecuación en la forma

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x),$$

que nos proporciona una expresión de la ecuación con cada variable a una lado de la igualdad. Entonces, si somos capaces de calcular las primitivas

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))} dx = \int g(x) dx,$$

habremos resuelto la ecuación inicial.

### Ejemplo

$$y' = yx,$$

*o lo que es lo mismo,*

$$\frac{y'}{y} = x,$$

*integrando la expresión anterior obtenemos*

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int xdx$$

$$\log(y(x)) + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

*Despejando, finalmente queda que* $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{C_2 - C_1}$*, llamando* $K = e^{C_2 - C_1}$ *obtenemos que la solución viene dada por* $y(x) = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$.

# Ecuaciones homogéneas

## Definición

*Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado $k \in \mathbb{N}$ si se verifica que*

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

*para cada $(x, y) \in D$ y $t \in \mathbb{R}$.*

Obsérvese que para que la definición tenga sentido es necesario que para todo $(x, y) \in D$ y para cada $t \in \mathbb{R}$ se verifique que $(tx, ty) \in D$. Así la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es homogénea de grado al verificarse para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y todo $t \in \mathbb{R}$ que

$$f(tx, ty) = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x, y).$$

## Definición

*Una ecuación diferencial $y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ se dice homogénea si las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son homogéneas del mismo grado.*

Para estas ecuaciones diferenciales el cambio en la variable dependiente $v = \frac{y}{x}$ permite escribir la ecuación anterior como una ecuación de variables separadas. En efecto, si $f(x,y)$ es de grado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f(1,v) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} f(x,y),$$

y así, puesto que $y(x) = v(x)x$ tenemos

$$y'(x) = v'(x)x + v(x) = \frac{x^k f(1,v(x))}{x^k g(1,v(x))} = \frac{f(1,v(x))}{g(1,v(x))},$$

y finalmente la ecuación puede escribirse como

$$v' = \left(\frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v\right)\frac{1}{x},$$

que es una ecuación en variables separadas.

### Ejemplo

*La ecuación*

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

*es homogénea, y siguiendo el procedimiento descrito anteriormente obtenemos*

$$v'(x)x + v = \frac{1+v}{1-v}$$

$$v'(x)x = \frac{1+v}{1-v} - v$$

$$\frac{1-v}{1+v^2}v'(x) = \frac{1}{x},$$

integrando obtenemos

$$-\frac{1}{2}\log(1+v(x)^2) + \arctan(v(x)) = \log(|x|) + C.$$

Teniendo en cuenta que $v(x) = \frac{y(x)}{x}$ concluimos que la ecuación

$$-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y(x)^2}{x^2}\right)+\arctan\left(\frac{y(x)}{x}\right)=\log(|x|)+C$$

define implícitamente todas las soluciones de la ecuación diferencial.

# Ecuaciones de la forma $y'(x) = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$

Este tipo de ecuaciones pueden reducirse al cálculo de una ecuación homogénea. Para ello consideremos las rectas de ecuaciones:

$$ax + by + c = 0$$

$$mx + ny + p = 0$$

Distinguimos dos casos:

1. **Las rectas se cortan en un punto $(x_0, y_0)$.** El cambio de variable que se debe realizar es
$$X = x + x_0$$
$$Y = y + y_0$$
La ecuación resultante de este cambio es:
$$Y'(X) = f\left(\frac{aX + bY}{mX + nY}\right)$$
que es una ecuación diferencial homogénea.

2. **Las rectas son paralelas.** Es decir,
$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \lambda.$$
En este caso la ecuación resulta ser de la forma:
$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by + c}{a\lambda x + b\lambda y + p}\right) = g(ax + by),$$
ecuación diferencial que podemos transformar directamente en un ecuación en variables separadas realizando el cambio de variable $v = ax + by$.

# Ecuaciones lineales

La *ecuación lineal de primer orden* es de la forma

$$f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x),$$

donde $f_1, f_2$ y $g$ son funciones reales continuas definidas en un intervalo abierto $(a, b)$. Si $f_1(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$, podemos escribir la ecuación anterior de la forma

$$y'(x) + p(x)y = q(x),$$

donde $p(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ y $q(x) = \frac{g(x)}{f_1(x)}$. Si $q(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$ la ecuación se dice *homogénea* en caso contrario *no homogénea* o *completa*.

Las soluciones de la ecuación lineal homogénea pueden calcularse fácilmente al ser ésta de variables separadas. En efecto, si consideramos la ecuación

$$y' + p(x)y = 0,$$

podemos reducirla a la forma

$$\frac{y'}{y} = -p(x),$$

y entonces

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -\int p(x) dx.$$

Si $G(x)$ es una primitiva de $-p(x)$ tendremos

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \log(y(x)) = G(x) + C,$$

y así

$$y(x) = Ke^{G(x)}$$

donde $K = e^C$. Para calcular las soluciones de la ecuación lineal no homogénea procederemos por un método llamado *método de variación de constantes*.

Dicho método permite calcular las soluciones de la ecuación no homogénea a partir de las soluciones de la homogénea. Supongamos la ecuación

$$y' + p(x)y = q(x),$$

y sea $y_h(x) = Ke^{G(x)}$ la solución de la ecuación homogénea calculada anteriormente. El método de variación de constantes se base en suponer que las soluciones de la ecuación no homogénea son de la forma $y(x) = K(x)e^{G(x)}$, donde $K(x)$ es ahora una función arbitraria que suponemos derivable. Derivando esta expresión teniendo en cuenta que $G'(x) = -p(x)$ obtenemos

$$y'(x) = K'(x)e^{G(x)} - K(x)p(x)e^{G(x)}.$$

Suponiendo que $y(x)$ es solución de la ecuación lineal no homogénea y sustituyendo en dicha ecuación se tiene

$$K'(x)e^{G(x)} - p(x)K(x)e^{G(x)} + p(x)K(x)e^{G(x)} = q(x),$$

o lo que es lo mismo

$$K'(x) = q(x)e^{-G(x)}.$$

Así,

$$K(x) = \int q(x)e^{-G(x)}dx = H(x) + C,$$

donde $H(x)$ es una primitiva de $q(x)e^{-G(x)}$. Por lo tanto, la solución de la ecuación no homogénea es de la forma

$$y(x) = Ce^{G(x)} + H(x)e^{G(x)}.$$

### *Ejemplo*

*Consideremos la ecuación lineal de primer orden:*

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin(x)}{x}.$$

La ecuación homogénea es de la forma $y' + \frac{2}{x}y = 0$, y sus soluciones se obtienen calculando

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = -\int \frac{2}{x}dx,$$

con lo que

$$\log(|y(x)|) = -2\log(|x|) + C_1 = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + C_1,$$

y así $y_h(x) = \frac{K}{x^2}$, donde $K = e^{C_1}$ es solución de la ecuación homogénea. Para calcular las soluciones de la ecuación no homogénea imponemos la condición de que $y(x) = \frac{K(x)}{x^2}$ sea una solución de la misma.

Procediendo como antes tendremos

$$\frac{K'(x)}{x^2} - \frac{2K(x)}{x^3} + \frac{2K(x)}{x^3} = \frac{\sin(x)}{x},$$

o equivalentemente

$$K'(x) = x\sin(x),$$

con lo que

$$K(x) = \int x\sin(x)dx = \sin(x) - x\cos(x) + C,$$

de donde obtenemos que las soluciones de nuestra ecuación son

$$y(x) = \frac{1}{x^2}(\sin(x) - x\cos(x) + C).$$

# Ecuación de Bernoulli

La *ecuación de Bernoulli* es de la forma

$$f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)y^{\alpha},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$ o $1$ la ecuacion es lineal. Si $\alpha$ es distinto de esos valores es posible reducirla a una ecuación lineal mediante el cambio de variable dependiente $z = y^{1-\alpha}$. En efecto, derivando obtenemos $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, y despejando $y'$ en la ecuación anterior y sustituyendo tenemos

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\left(\frac{f_3(x)}{f_1(x)}y^{\alpha} - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}y\right) = (1-\alpha)\frac{f_3(x)}{f_1(x)} - (1-\alpha)\frac{f_2(x)}{f_1(x)}z,$$

que es una ecuación lineal siempre que $f_1(x) \neq 0$.

# Ecuación de Riccati

La *ecuación de Riccati* es de la forma

$$y' = f_1(x)y^2 + f_2(x)y + g(x),$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $g(x)$ son funciones reales de variable real. Esta ecuación puede reducirse a una ecuación lineal siempre que conozcamos una solución particular $y_p(x)$ de la misma. Entonces el cambio en la variable dependiente $v = y - y_p$ modifica la ecuación de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v' &= y' - y_p' \\ &= f_1(x)y^2 + f_2(x)y + g(x) - (f_1(x)y_p^2 + f_2(x)y_p + g(x)) \\ &= f_1(x)(y^2 - y_p^2) + f_2(x)(y - y_p) \\ &= f_1(x)v(y + y_p) + f_2(x)v \\ &= f_1(x)v(v + 2y_p) + f_2(x)v \\ &= f_1(x)v^2 + (2f_1(x)y_p + f_2(x))v. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que la ecuación

$$v' = f_1(x)v^2 + (2f_1(x)y_p + f_2(x))v$$

es una ecuación de Bernoulli, la cual es fácilmente reducible a una ecuación lineal.

# Ecuaciones exactas

Consideremos una ecuacióndiferencial de primer orden de la forma $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones reales definidas sobre un dominio $(a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$: Dicha ecuación puede llevarse a la forma

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0.$$

Supongamos que existe una función derivable $f : (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e manera que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$. Entonces la ecuación $f(x,y) = C$, donde $C$ es un número real, define a $y$ como funcion implícita de forma que dicha función $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial. En efecto, si calculamos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx} f(x,y(x)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))y'(x) \\ &= M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x). \end{aligned}$$

Recíprocamente, una ecuación $f(x, y) = C$ donde $f(x, y)$ es una función de clase $C^1((a, b) \times (c, d))$, la cual define de forma implícita una función $y(x)$ proporciona las soluciones e la ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

A continuación vamos a ver bajo qué condiciones es posible obtener dicha función $f(x,y)$. Empezamos con la siguiente definición.

### Definición

*Sea la ecuación diferencial*

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0,$$

*donde* $M,N:(a,b)\times(c,d)\to\mathbb{R}$ *son funciones de clase* $C^0((a,b)\times(c,d))$ *con* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. *Dicha ecuación se dice exacta si existe una función* $f:(a,b)\times(c,d)\to\mathbb{R}$ *de forma que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=M(x,y) \quad y\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=N(x,y).$$

Si dicha ecuación es exacta y las funciones $M$ y $N$ son de clase $C^1((a,b)\times(c,d))$, se verifica aplicando el Teorema de Schwarz que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

El siguiente teorema caracteriza las ecuaciones exactas.

**Teorema**

*Sea la ecuación diferencial* $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, *donde* $M, N : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ *son funciones de clase* $C^1((a,b) \times (c,d))$ *con* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Dicha ecuación es exacta si, y sólo si,*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

El teorema garantiza en qué circunstancias puede decirse que una ecuación es exacta y la demostración es constructiva, ya que permite obtener las soluciones de la ecuación diferencial en cuestión. En el siguiente ejemplo, reproducimos las ideas de dicha demostración.

### *Ejemplo*

*Consideremos la ecuación*

$$3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0.$$

En dicha ecuación $M(x,y) = 3x^2 + 4xy$ y $N(x,y) = 2x^2 + 2y$ son ambas funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y se verifica que

$$4x = \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 4x.$$

Si la ecuación es exacta existe una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ de forma que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) = 3x^2 + 4xy,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = 2x^2 + 2y.$$

Tomando la primera expresión e integrando respecto de $x$ obtenemos que

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (3x^2 + 4xy)dx = x^3 + 2x^2y + g(y),$$

donde $g(y)$ es una función que depende de $y$. Utilizando la segunda igualdad se tiene que

$$2x^2 + g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = 2x^2 + 2y,$$

es decir,

$$g'(y) = 2y.$$

Entonces

$$g(y) = y^2 + C,$$

y la ecuación

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C = 0$$

define de forma implícita las soluciones de la ecuación diferencial.

# Factores integrantes

En este apartado vamos a estudiar aquellas ecuaciones que no cumplen las condiciones necesarias para ser exactas, pero que se pueden convertir en ellas.

Supongamos una ecuación para la cual no se verifica la igualdad de las derivadas parciales cruzadas (normalmente se tratarán aquellas ecuaciones en las que las expresiones de estas derivadas sean parecidas). Es entonces interesante encontrar una expresión que multiplicándola por la ecuación la transforme en una ecuación diferencial exacta. Estas funciones reciben el nombre de *factores integrantes*. Un *factor integrante* es una función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ con $\mu(x, y) \neq 0$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y tal que la ecuación diferencial

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0$$

es exacta.

Como $\mu(x, y) \neq 0$ para todo punto de $\mathbb{R}^2$ esta función no introduce soluciones adicionales en la ecuación diferencial original. Además, las soluciones de ésta última ecuación diferencial también son solución de la ecuación

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

siempre que $N(x, y) \neq 0$.

Para que la ecuación sea exacta ha de cumplirse que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)).$$

Dicha ecuación es en general complicada para resolverla. Para hacer el cálculo del factor integrante más fácil suelen añadirse hipótesis adicionales sobr el factor integrante, como que sólo dependa de $x$ o $y$ o combinaciones de ambas.

### Ejemplo

*Consideremos la ecuación*

$$y + (2x - ye^y)y' = 0,$$

*tenemos que* $M(x,y) = y$ *y* $N(x,y) = 2y - ye^y$, *y claramente no es una ecuación exacta. Si planteamos las ecuaciones del integrante, suponiendo que éste sólo dependa de la variable* $y$ *obtendremos:*

$$\mu'(y)y = \mu(y),$$

que resulta ser una ecuación diferencial de variables separadas. Resolviendo dicha ecuación tenemos que $\mu(y) = y$ es un factor integrante. Entonces la ecuación

$$y^2 + (2xy - y^2 e^y)y' = 0$$

es exacta y por tanto existirá una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy - y^2 e^y.$$

Entonces

$$f(x,y)=\int y^2dx=y^2x+g(y),$$

y utilizando la otra igualdad

$$2yx+g'(y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy-y^2e^y.$$

Por lo tanto,

$$g(y)=-\int y^2e^ydy=-y^2e^y+2ye^y-2e^y+C$$

con lo que la solución de la ecuación viene definida de forma implícita por la ecuación

$$y^2x-y^2e^y+2ye^y+C=0.$$

Normalmente se suelen buscar factores integrantes que dependen de $x$, $y$, $x+y$, $x-y$, $xy$, $\frac{x}{y}$, $x^2y$, ....

# Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$

Una *ecuación diferencial lineal de orden n* es una ecuación de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

donde $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ y $b(x)$ son funciones reales de variable real definidas sobre un intervalo abierto $I$.
En el caso de que $a_n(x) \neq 0$, la ecuación puede escribirse de la forma:

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x),$$

donde $p_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y $q(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)}$.
La ecuación lineal de orden $n$ se dice homogénea si $q(x) = 0$ para todo $x \in I$. En caso contrario diremos que la ecuación diferencial es no homogénea o completa.

# Ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes

Consideremos ahora el problema simplificado de una ecuación diferencial de orden $n$ de la forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

donde cada $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
Se llama polinomio característico de la ecuación diferencial lineal a

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Sea la ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

donde cada $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y sea $\lambda$ una raíz del polinomio característico con multiplicidad igual a $p \in \mathbb{N}$. Entonces:

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las funciones

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \ldots, x^{p-1}e^{\lambda x},$$

son solución de la ecuación diferencial.

2. Si $\lambda = a + bi$, entonces las funciones:

$$e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx), \ldots, x^{p-1}e^{ax}\cos(bx), x^{p-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx),$$

son soluciones de la ecuación diferencial.

3. Todas las soluciones de la ecuación diferencial son combinaciones lineales de las soluciones obtenidas en los puntos anteriores.

# Ecuaciones con coeficientes constantes no homogéneas

Sea $y_p$ una solución de la ecuación:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

Entonces todas las soluciones de la ecuación anterior son de la forma

$$y = y_p + y_h,$$

donde $y_h$ es solución de la ecuación homogénea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

# Ecuaciones con coeficientes constantes no homogéneas

## Soluciones particulares $y_p$

Si $b(x) = e^{ax}(p(x)\cos(bx) + q(x)\,\text{sen}\,bx)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios,

1. Si $r = a \pm bi$ no es raíz del polinomio característico tendremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = e^{ax}(P(x)cos(bx) + Q(x)\,\text{sen}\,bx),$$

   donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado igual al máximo de los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

2. Si $r = a \pm bi$ es una raíz del polinomio característico de multiplicidad $k$ tendremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = x^k e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\,\text{sen}(bx)),$$

   donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado igual al máximo de los grados de los polinomios $P(x)$ y $q(x)$.

Calcular:

$$y^{'''} - 5y^{''} + 9y' - 5y = \operatorname{sen} x.$$

En este caso, será $y_p(x) = \frac{-1}{8} \cos x$ y la solución homogénea $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \operatorname{sen} x + C_3 e^{2x} \cos x$, sumando ambas soluciones obtenemos la solución general de la solución ecuación.