Integral Múltiple

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I(1º Grado Ingeniería Electrónica Industrial y Automática)

Rectángulos en $\mathbb{R}^n$. Particiones

Definición

Llamaremos rectángulo compacto en el espacio $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto de la forma:

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

donde $a_j < b_j$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

Para $n = 1$ obtenemos los intervalos cerrados $[a_1, b_1]$, para $n = 2$ obtenemos los rectángulos cerrados $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ del plano $\mathbb{R}^2$, mientras que en $\mathbb{R}^3$, I es un paralelepípedo recto rectángulo.

Definición

Llamaremos medida del rectángulo $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ al número

$$A(I) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Definición

Llamaremos partición del rectángulo $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *al producto* $P = P_1 \times \ldots \times P_n$*, donde* P_i *es una partición del intervalo* $[a_i, b_i]$*. Llamaremos diámetro de la partición* P *al*

$$\text{máx}\left\{\mathrm{diam}(P_i) : i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Definición

Sean $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ *y* $P' = P'_1 \times \ldots \times P'_n$ *particiones del rectángulo* $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$*. Diremos que* P' *es más fina que* P *si* P'_j *es más fina que* P_j *para cada* $j = 1, \ldots, n$*.*

Observar que si $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ y $P' = P'_1 \times \ldots \times P'_n$ son particiones del rectángulo $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ y denotemos por P''_j la partición del intervalo $[a_j, b_j]$ formada por los puntos de subdivisión de P_j y P'_j para $j = 1, \ldots, n$, entonces la partición $P'' = P''_1 \times \ldots \times P''_n$ es una partición de I más fina que P y que P'.

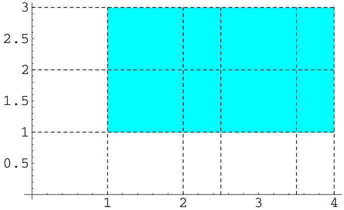


Figura: Partición del intervalo $I = [1, 4] \times [1, 3]$ dada por $P = P_1 \times P_2$, donde $P_1 = \{1, 2{,}5, 3{,}5, 4\}$ y $P_2 = \{1, 2, 3\}$.

Si $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ es un intervalo y $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ es una partición de I donde $P_j = \left\{ a_j = p_0^j, p_1^j, \ldots, p_{n_j}^j = b_j \right\}$ para cada $j = 1, \ldots, n$, entonces P divide a I en intervalos de la forma

$$I_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = [p_{i_1}^1, p_{i_1+1}^1] \times \ldots \times [p_{i_n}^n, p_{i_n+1}^n],$$

donde $i_j \in \{0, 1, \ldots, n_j - 1\}$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

La integral en rectángulos degenerados

Definición

Sea $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real acotada en* I *y*

$$P = \{I_{i_1,i_2,\ldots,i_n} : i_j \in \{0,1,\ldots,n_j-1\} \text{ para cada } j = 1,\ldots,n\}$$

una partición de I. *Llamaremos sumas de Darboux a los valores* $S(P)$ *y* $s(P)$ *obtenidos como*

$$S(P) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} A(I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \sup_{x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}} f(x),$$

$$s(P) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} A(I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}) \inf_{x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}} f(x),$$

siendo $S(P)$ *la suma superior de Darboux y* $s(P)$ *la suma inferior de Darboux.*

Después de esta definición es obvio que $s(P) \leq S(P)$. En general, tenemos el siguiente resultado

Teorema

Sea f una función real acotada definida en un rectángulo compacto I de $\mathbb{R}^n$. Para dos particiones cualesquiera P y P' de I se tiene $s(P) \leq S(P')$.

Definición

Sea $\mathcal{P}$ la familia de las particiones de un rectángulo $I \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es integrable en I si existe un único valor $I(f) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s(P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) = I(f).$$

Usualmente denotaremos $I(f)$ como $\int_I f(x)dx$.

Recintos básicos

Hasta ahora hemos considerado la definición de integral en rectángulos generalizados de $\mathbb{R}^n$, sin embargo, dicha definición puede extenderse a los *recintos básicos*. Diremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un recinto básico si es un recinto acotado con interior no vacío de manera que la frontera del mismo sea un conjunto cerrado.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada definida sobre un recinto básico Ω. Consideramos el menor rectángulo generalizado I de manera que Ω esté contenido en dicho rectángulo y definimos la función auxiliar $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Diremos que f es integrable en Ω si y sólo si $\tilde{f}$ es integrable en el rectángulo I y definiremos

$$\int_\Omega f(x)dA = \int_I \tilde{f}(x)dA.$$

Propiedades generales

1. Si f es continua en Ω, entonces f es integrable en Ω.
2. Cuando $n = 2$ y la función f es positiva, el valor de la integral coincide con el del volumen del sólido encerrado por la gráfica de la función y el recinto considerado.
3. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrables en el recinto básico Ω entonces para todo par de números reales α, β se tiene que $\alpha f + \beta g$ es integrable en Ω y
$$\int_\Omega (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \cdot \int_\Omega f(x)dx + \beta \int_\Omega g(x)dx.$$
4. Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces
$$\int_\Omega f(x)dx \geq 0.$$

5 Si $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in \Omega$, entonces

$$\int_\Omega f(x)dx \geq \int_\Omega g(x)dx.$$

6 Si Ω se descompone en la unión de dos recintos básicos Ω_1 y Ω_2 con intersección vacía o igual a un segmento, entonces f es integrable en cada una de ellas y además

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\Omega_1} f(x)dx + \int_{\Omega_2} f(x)dx.$$

7 La integral de f sobre Ω es igual a la integral sobre su interior.

Cambio de variable en la integral

Teorema

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función continua en un recinto básico abierto y sea* $\phi : \Lambda \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de de manera que* $\phi(\Lambda) = \Omega$ *y* ϕ *es diferenciable en* Λ *con* $\mathrm{detJ}(\phi(\mathrm{y})) \neq 0$ *para cada* $y \in \Lambda$*. Si tomamos el cambio de variable* $x = \phi(y)$ *obtenemos que*

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Lambda f(\phi(y)) \left|\mathrm{det} J(\phi(y))\right| dy,$$

donde $J(\phi(y))$ *denota la matriz jacobiana de la aplicación* ϕ *evaluada en* y*.*

Integrales dobles

Sea $f : I = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una función acotada entonces el cálculo de la integral sobre rectángulos se reduce al cálculo de integrales de funciones de una variable al verificarse:

$$\int_I f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Usualmente escribiremos $\int_I f(x,y)dxdy = \int \int_I f(x,y)dxdy$ para referirnos a dos dimensiones.

En el caso de recintos más complicados las fórmulas de reducción serán más o menos complejas dependiendo de la forma del recinto. En general se trata de fijar un intervalo máximo de integración para una de las variables y determinar los límites de integración de la segunda variable en función de la primera.

Integrales triples

El caso de las integrales triples es similar. En el caso de un intervalo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ la integral de una función acotada f definida en I vendrá dada por

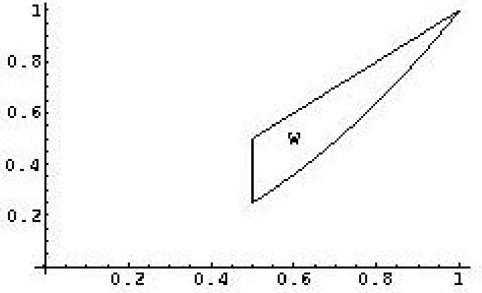
$$\int_I f(x, y, z) dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Las integrales triples las denotaremos como $\int \int \int_\Omega f(x, y, z) dxdydz$.

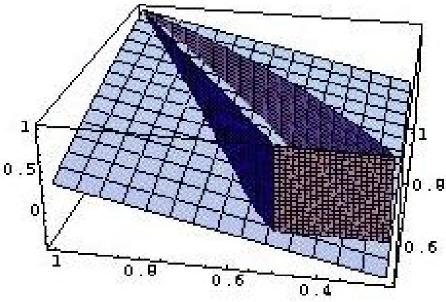
Ejemplos

Calcular la integral doble $\int\int_\Omega y + \log(x) dxdy$ en $\Omega = \left\{x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\right\}$.

El dominio viene dado por:



Una representación gráfica de la función es la figura que sigue.


1
0.5
0
1
0.8
0.6
0.4
1
0.8
0.6

La integral

$$\int_{\Omega} y + \log(x) dxdy = \int_{0,5}^{1} \left(\int_{x^2}^{x} y + \log(x) dy \right) dx.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} y + \log(x) dxdy &= \int_{0,5}^{1} \left[\frac{y^2}{2} + y \log(x) \right]_{x^2}^{x} dx \\ &= \int_{0,5}^{1} \frac{x^2 - x^4}{2} dx + \int_{0,5}^{1} (x - x^2) \cdot \log(x) dx\end{aligned}$$