Diferenciabilidad de funciones de varias variables

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I (1º Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática)

Los problemas que trataban de solucionar los matemáticos del siglo XVII eran de tres tipos:

1. Determinación de las tangentes a las curvas.
2. Búsqueda de máximos y mínimos de funciones.
3. Búsqueda de las condiciones de existencia de raíces múltiples de las ecuaciones algebraicas.

En el transcurso de este siglo los problemas diferenciales aún se resolvían por los métodos más diversos.

En la escuela de Galileo, para la búsqueda de tangentes y normales a las curvas se aplicaban simultáneamente los métodos cinemáticos, considerando diferentes lanzamientos y movimientos complejos, determinando la tangente en cualquier punto de la trayectoria.
La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y la teoría de series.

Para el desarrollo de este proceso se contaba con:

- el álgebra;
- las técnicas de cálculo;
- introducción a las matemáticas variables;
- ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes;
- ...

Las causas que motivaron este proceso fueron:

- Las exigencias de la mecánica.
- La astronomía.
- La física.

La última etapa del desarrollo del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales e integrales, y a partir de aquí la formación del cálculo diferencial e integral. Este último surgió casi independientemente en dos formas diferentes:

- La Teoría de fluxiones de I. Newton.
- El cálculo de diferenciales de G.W. Leibniz.

Leibniz llegó a la idea sobre el símbolo d (de *diferencia*) para la designación de diferencias infinitesimales. Igualmente representó la integral como suma de *todas* las ordenadas.

El primer manual de cálculo diferencial y sus aplicaciones a la geometría: *Análisis Infinitesimal* de G. F. L'Hopital aparece en 1696.

Definición de diferencial

Cuando se intenta generalizar el concepto de derivada a las funciones de dos variables reales, la primera dificultad que se encuentra es el no poder formar el cociente incremental para después tomar su límite. Manteniendo fija una de las variables la función depende sólo de la otra y respecto de ella sí es posible tomar su límite, obteniéndose las derivadas parciales.
Ahora bien nosotros sabemos que toda función derivable de una variable es continua mientras que si son dos o más las variables pueden existir las derivadas parciales sin que por ello se asegure la continuidad.
Estos inconvenientes se obvian introduciendo el concepto nuevo de diferenciabilidad que en el caso de una variable es equivalente a la derivabilidad.

Sea $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una función. Sea $x_0 \in]a, b[$ y supongamos que f es derivable en x_0. Luego existe el límite, al que se le llama *derivada* de la función f en el punto x_0, y se representa por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o también

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0.$$

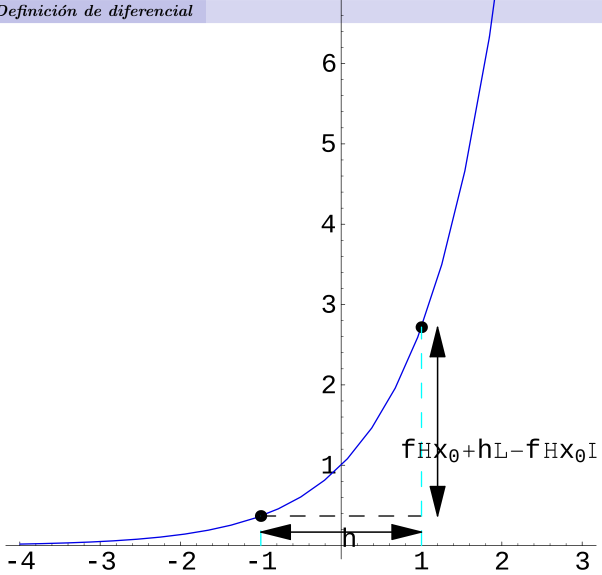
Denotemos por $\rho(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ donde $h \in U \setminus \{0\}$, siendo U un entorno (que por comodidad supondremos abierto) del origen y $\rho(0) := 0$. Obviamente $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$. Entonces

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h = h\cdot \rho(h),$$

o bien, tomando $x = x_0 + h$,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0) = (x - x_0)\cdot \rho(x - x_0).$$

Esta última ecuación describe el hecho de que la gráfica de f queda aproximada por la gráfica de la tangente (que es la trasladada al punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de una función lineal (una recta)) y que la aproximación es tanto mejor cuanto más cerca estemos del punto x_0.


6
5
4
3
2
1
fHx0+hL−fHx0I
h
-4
-3
-2
-1
1
2
3

La misma idea es la que configura el cálculo diferencial de funciones de varias variables. En concreto, nos centraremos en el caso particular en el que dichos espacios sean de dimensión finita.

Definición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto[a], $f : U \to \mathbb{R}^m$ *y* $\vec{x}_0 \in U$. *Se dice que* f *es diferenciable en* $\vec{x}_0$ *cuando existe una aplicación lineal* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}_n} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}_m, \qquad (1)$$

donde $\vec{h} \in U_0$ *siendo* U_0 *un entorno del origen.*
La aplicación lineal A *es la diferencial de* f *en el punto* $\vec{x}_0$, *y se representa por* $df_{\vec{x}_0}$.

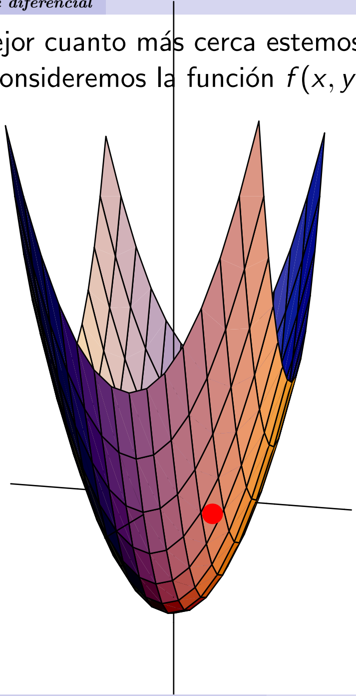
---

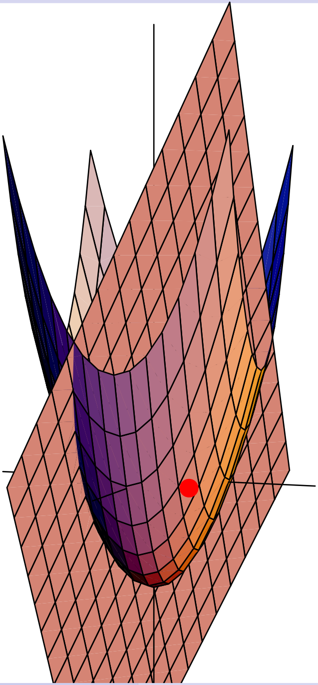
[a] No es restrictivo suponer que el dominio es abierto. La diferenciabilidad de una función en un punto es un concepto local y es suficiente que exista una bola centrada en $\vec{x}_0$ contenida en U de forma que la aproximación a $\vec{x}_0$ pueda realizarse sin restricciones. Tomando la restricción de la función a esa bola estaremos en la condiciones de la definición.

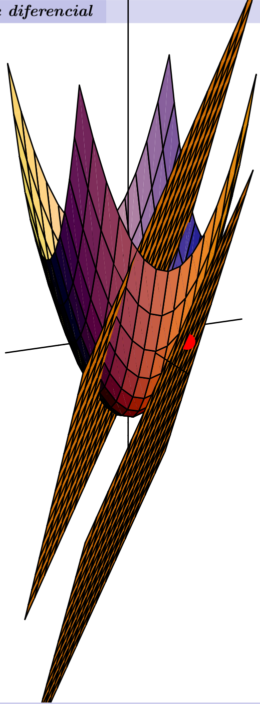
Esta ecuación es una extensión de la derivada de funciones en una variable. Para el caso de una variable el término $f'(x_0) \cdot h$ es la función lineal. De nuevo, la idea a la que responde el hecho de que una función f es diferenciable en un punto $\vec{x}_0$ es el hecho de poder aproximar f en una bola centrada en $\vec{x}_0$ mediante una función *trasladada* de una función lineal, esto es,

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\to f(\vec{x}_0) + A(\vec{x} - \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + df_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0). \end{aligned}$$

La aproximación es tanto mejor cuanto más cerca estemos de $\vec{x}_0$. Véamoslo con un ejemplo. Consideremos la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ y el punto $\vec{x}_0 = (1,1)$.







Observar también que la condición (1) puede expresarse como

$$f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-df_{\vec{x}_0}(\vec{h})=\rho(\vec{h})\cdot\|\vec{h}\|, \tag{2}$$

siendo ρ la función dada por

$$\rho(\vec{h})=\frac{f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-A(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} \text{ si } \vec{h}\in B\setminus\{\vec{0}_n\}$$
$$\rho(\vec{0}_n):=\vec{0}_m$$

donde B es una bola centrada en $\vec{0}$ con radio suficientemente pequeño de manera que tengan sentido cada una de las expresiones que aparecen.

Hacemos un inciso aquí para señalar que una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ viene dada en la forma $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$, donde a las funciones $f^j : U \to \mathbb{R}$ se las denomina como *funciones coordenadas*. Entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0$ si, y sólo si, f^j es diferenciable en $\vec{x}_0$ para cada $j = 1, 2, \dots, m$. En ese caso se verifica la igualdad

$$df_{\vec{x}_0}(\vec{v}) = (df^1_{\vec{x}_0}(\vec{v}), \dots, df^m_{\vec{x}_0}(\vec{v})).$$

En efecto, si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces la igualdad (2) se verifica y tomando la coordenada j-ésima en los miembros de la igualdad obtenemos

$$f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) - A_j(\vec{h}) = \rho_j(\vec{h}) \cdot \|\vec{h}\|,$$

donde $df_{\vec{x}_0}(\vec{h}) = (A_1(\vec{h}), \ldots, A_m(\vec{h}))$ y $\rho(\vec{h}) = (\rho_1(\vec{h}), \ldots, \rho_m(\vec{h}))$. Es claro que para cada $j = 1, \ldots, m$, A_j es lineal y $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}_n} \rho_j(\vec{h}) = 0$, de donde se sigue que f_j es diferenciable en $\vec{x}_0$. Recíprocamente, si todas las f_j son diferenciables en $\vec{x}_0$, tenemos que

$$f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) - A_j(\vec{h}) = \rho_j(\vec{h}) \cdot \|\vec{h}\|,$$

para $\vec{h} \in B_j$ y $j = 1, \ldots, m$. Definimos $A = (A_1, \ldots, A_m)$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ y $B = \cap_{j=1}^{m} B_j$. Entonces A es lineal, ρ está definida en B y verifica que $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}_n} \rho(\vec{h}) = \vec{0}_m$, y así,

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{h}) = \rho(\vec{h}) \cdot \|\vec{h}\|,$$

para cada $\vec{h} \in B$.

Proposición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\vec{x}_0 \in U$*, entonces su diferencial en ese punto es única.*

Demostración:

Supongamos que existen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $A' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicaciones lineales tales que

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}_n} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}_m,$$

cuando $\vec{h} \in B$, siendo B una bola centrada en $\vec{0}$ y

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}_n} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A'(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}_m,$$

para $\vec{h} \in B'$, y B' una bola centrada en $\vec{0}$.

De aquí, restando

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}_n} \frac{A(\vec{h}) - A'(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}_n} \frac{(A - A')(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}_m, \tag{3}$$

para $\vec{h} \in B \cap B'$. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}_n$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |t| < \delta$ se tiene que $t \cdot \vec{x} \in U_0 \cap U_0'$ donde $t \in \mathbb{R}$. La existencia del límite (3) asegura la existencia del límite en la dirección del vector $\vec{x}$. Efectivamente tomando $\vec{h} = t\vec{x}$ obtenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \cdot (A - A')(\vec{x})}{|t| \cdot \|\vec{x}\|} = \vec{0}_m,$$

es decir,

$$\frac{(A - A')(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = \vec{0}_m,$$

de aquí,

$$(A - A')(\vec{x}) = \vec{0}_m,$$

y finalmente,

$$A(\vec{x}) = A'(\vec{x}) = \vec{0}_m.$$

El razonamiento es válido para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}_n\}$, y puesto que toda aplicación lineal verifica que $A(\vec{0}_n) = A'(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$ obtenemos que

$$A(\vec{x}) = A'(\vec{x})$$

para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

En la proposición que sigue recogemos algunas propiedades fundamentales de las cuáles no ofrecemos su demostración.

Proposición

1. *Una función constante es diferenciable en cualquier punto y su diferencial es la aplicación lineal nula.*
2. *Una aplicación lineal es diferenciable en cualquier punto, siendo su diferencial ella misma.*
3. *Sean f y g funciones definidas en una bola abierta $B \subset \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$ y tales que f y g son diferenciables en $\vec{x}_0 \in B$. Entonces $f + g$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, siendo*

$$d(f+g)_{\vec{x}_0} = df_{\vec{x}_0} + dg_{\vec{x}_0}.$$

4. *Sea f una función definida en una bola abierta $B \subset \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0 \in B$, entonces la función $\lambda \cdot f$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y*

$$d(\lambda \cdot f)_{\vec{x}_0} = \lambda \cdot df_{\vec{x}_0}.$$

Proposición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Si* f *es diferenciable en* $\vec{x}_0 \in U$*, entonces* f *es continua en* $\vec{x}_0$*.*

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$. Puesto que f es diferenciable en $\vec{x}_0$ existe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal tal que

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}_n} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}_m,$$

es decir, existe $1 \geq \delta_1 > 0$ tal que si $\vec{h} \in B(\vec{0}_n, \delta_1)$, entonces

$$\frac{\left\| f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{h}) \right\|}{\|\vec{h}\|} < \frac{\epsilon}{3},$$

y así,

$$\left\| f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{h}) \right\| < \frac{\epsilon}{3} \cdot \left\| \vec{h} \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Por otra parte,

$$\left\|f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)\right\| \leq \left\|f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-A(\vec{h})\right\| + \left\|A(\vec{h})\right\|.$$

Puesto que A es continua, existe $\delta_2>0$ tal que si $\vec{h}\in B(\vec{0}_n,\delta_2)$ entonces

$$\left\|A(\vec{h})\right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}$, entonces si $\vec{h}\in B(\vec{0}_n,\delta)$ tenemos que

$$\left\|f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)\right\| \leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\frac{2}{3}\epsilon<\epsilon,$$

y la prueba acaba. $\square$

La implicación contraria no es cierta en general (no lo es para funciones reales de variable real). Un ejemplo sencillo lo muestra la figura 31. En $x = 1$ no existe recta tangente y por tanto la función no es diferenciable.

La derivada direccional

Definición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in U$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. *Se llama límite direccional (si existe) en la dirección de* $\vec{v}$ *de la función* f *en el punto* $\vec{x}_0$, *y se representa de la forma*

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

La derivada direccional $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$ es un elemento de $\mathbb{R}^m$ que representa de alguna forma la tasa de variación en el punto $\vec{x}_0$ de la función f a lo largo de la recta que pasa por el punto $\vec{x}_0$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}$.

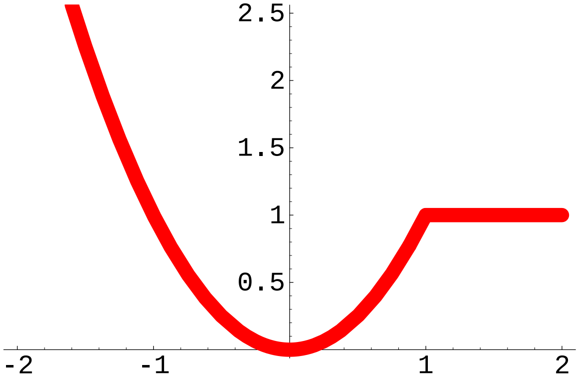


Figura: En $x = 1$ la función es continua pero no es derivable.

El cálculo de una derivada direccional se reduce al cálculo de derivadas de funciones de una variable. Llamando $g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$ tenemos

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0),$$

siendo $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ y $g'(0) = (g_1'(0), \ldots, g_m'(0))$.

Un caso particular lo tenemos cuando $\vec{v} = \vec{e}_j$, donde $\vec{e}_j$ es el vector formado por ceros excepto en el lugar j el cual toma el valor 1, (es decir, el j-ésimo vector de la base canónica). Entonces

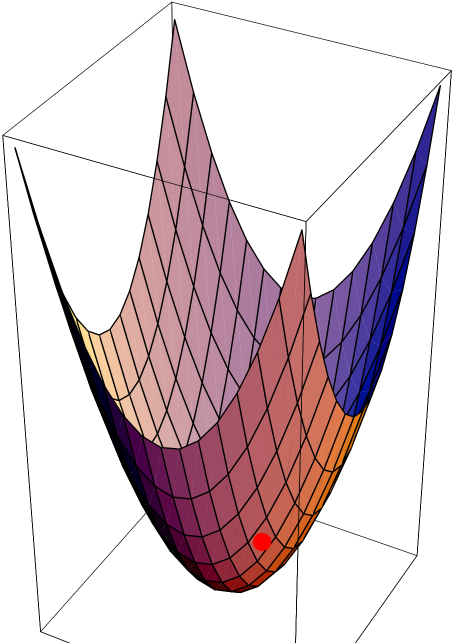
$$D_{\vec{e}_j} f(\vec{x}_0) = g'(x_0^j)$$

donde

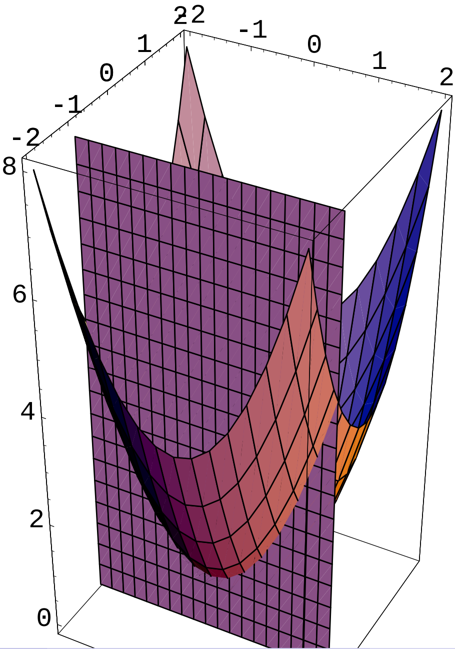
$$g(t) = f(x_0^1, x_0^2, \ldots, t, \ldots, x_0^n) = (f_1(x_0^1, \ldots, t, \ldots, x_0^n), \ldots, f_m(x_0^1, \ldots, t, \ldots,$$

es decir, si llamamos $g_j(t) = f_j(x_0^1, \ldots, t, \ldots, x_0^n)$ para cada $j = 1, \ldots, m$, la derivada direccional coincide con el vector $(g_1'(x_0^j), \ldots, g_m'(x_0^j))$, de manera que las reglas del cálculo de derivadas son válidas para calcular las coordenadas del vector derivada direccional.

Una interpretación geométrica de $D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0)$ podemos hacerla para funciones reales definidas en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ y el punto $P = (1,-1)$. Vamos a calcular la derivada direccional de f en P en la dirección del vector $(1,0)$.



Calculamos en primer lugar la curva intersección del plano y= -1 con la superficie. Este plano es el plano perpendicular al plano *xy* que contiene al vector $(1, 0, 0)$, es decir el plano determinado por los vectores $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ y el punto $(1, -1, 0)$.


-2
-1
0
1
2
2
-1
0
1
2
8
6
4
2
0

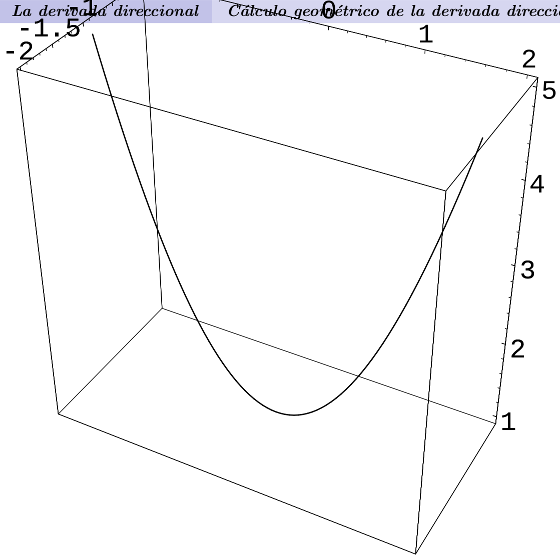
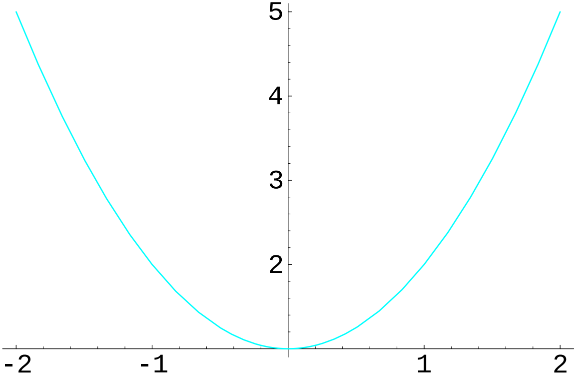


Figura: En esta figura destacamos la curva resultante de la intersección.

Visto en dos dimensiones tenemos que esa curva es la función $f(x) = x^2 + 1$.



La derivada de esta función es $g'(x) = 2x$. Así $g'(1) = 2$. La recta tangente vendrá dada por $y = 2(x-1) + 2 = 2x$. El valor que hemos obtenido $g'(1) = 2$ es la derivada direccional de la función $f(x, y)$ en el punto $(1, -1)$ en la dirección $(1, 0)$. Geométricamente su significado es el que mostramos en las gráficas que siguen.

Por una parte tenemos que es la pendiente de la recta tangente a la curva $g(x)$.

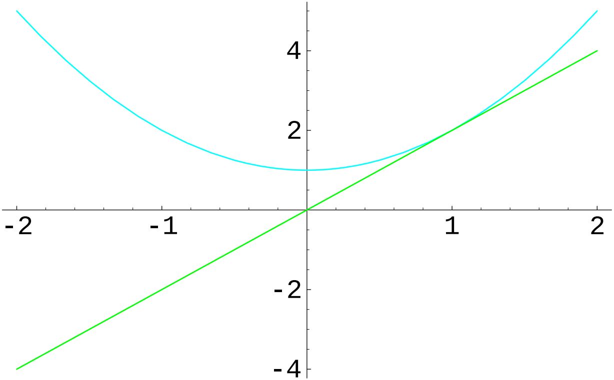
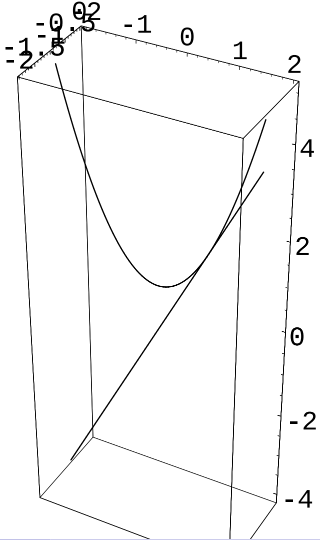
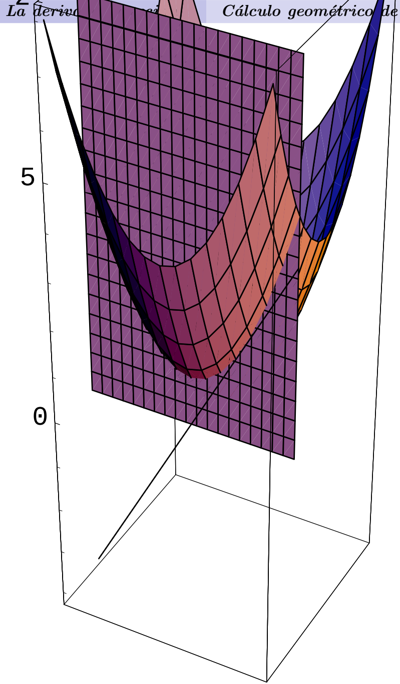
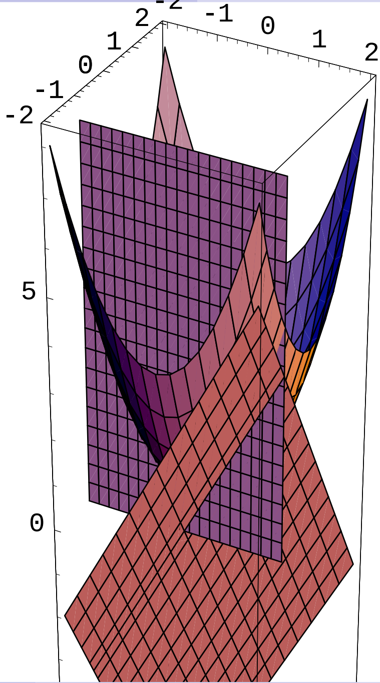


Figura:

Por otra no olvidemos que la curva $g(x)$ la habíamos obtenenido como intersección del plano resultante al levantar la dirección $\vec{v}$ y la superficie $f(x, y)$.




5
0


-2
-1
0
1
2
2
1
0
-1
-2
5
0

La derivada parcial

Tras la definición de derivada direccional la derivada parcial aparece como un caso particular.

Definición

Se llama derivada parcial i-ésima, y se representa por $D_i f(\vec{x}_0)$ *a la derivada direccional en la dirección del vector* $\vec{e}_i$ *de la base canónica. Otra forma de denotarlo es* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$.

$$D_i f(\vec{x}_0) = D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}_0).$$

Emplearemos indistintamente $D_i f(\vec{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ para denotar la derivada parcial i-ésima. Observar que $D_i f(\vec{x}_0) = (D_i f_1(\vec{x}_0), \ldots, D_i f_m(\vec{x}_0)) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(f\vec{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\right)$, donde $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Cuando f es una función real el vector

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)$$

se llama *el vector gradiente de* f en el punto $\vec{x}_0$. Estudiaremos el gradiente posteriormente.

La relación entre las derivadas direccionales y la diferencial viene dada por el resultado que sigue.

Proposición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Si* f *es diferenciable en un punto* $\vec{x}_0 \in U$*, entonces existen todas las derivadas direccionales en* $\vec{x}_0$*, y se tiene*

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = df_{\vec{x}_0}(\vec{v})$$

para cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$*.*

Demostración.

Puesto que f es diferenciable en $\vec{x}_0$, existe $df_{\vec{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una bola abierta B centrada en el origen tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - df_{\vec{x}_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}_m$$

para cada $\vec{h} \in B \setminus \{\vec{0}\}$. Sea $t > 0$ tal que $t \cdot \vec{v} \in B$, entonces sustituyendo en la ecuación anterior

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0+t\vec{v}) - f(\vec{x}_0) - t \cdot df_{\vec{x}_0}(\vec{v})}{t \cdot \|\vec{v}\|} = 0,$$

y de aquí

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0+t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t} - df_{\vec{x}_0}(\vec{v}) = 0.$$

Finalmente,

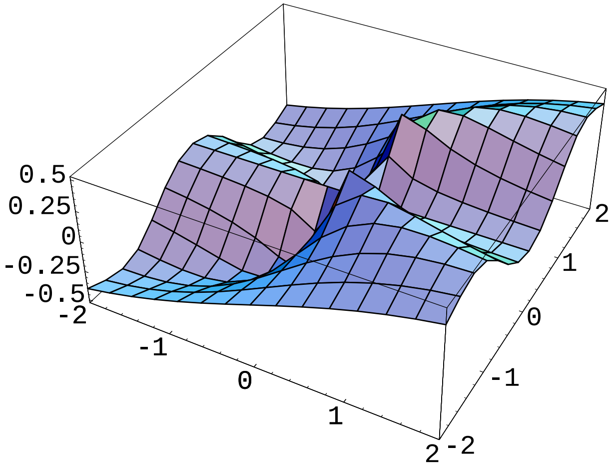
$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = df_{\vec{x}_0}(\vec{v}).$$

$\square$

Nota: El recíproco no es cierto.

Ejemplo

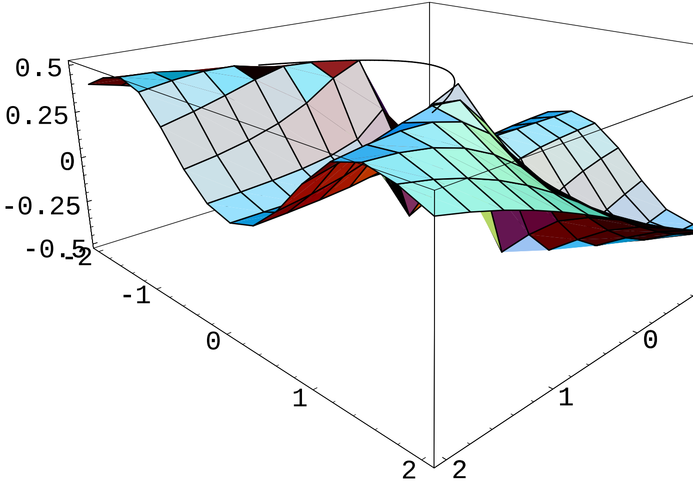
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$


0.5
0.25
0
-0.25
-0.5
-2
-1
0
1
2
-2
-1
0
1
2

Veamos que existe $D_{\vec{v}}f(0,0)$ para cada $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Si $a\neq 0$ y $t\neq 0$, tenemos que

$$\frac{f(t(a,b))-f(0,0)}{t}=\frac{f(ta,tb)}{t}=\frac{ab^2}{a^2+t^2b^4}\to\frac{b^2}{a}=D_{\vec{v}}f(0,0)$$

Un cálculo similar prueba que $D_{\vec{v}}f(0,0)=0$ cuando $a=0$. Sin embargo, esta función no es continua en $(0,0)$, basta aproximarse a $(0,0)$ por la parábola $x=y^2$ (sobre la que f, excepto en el origen, vale $\frac{1}{2}$) para comprobarlo.


0.5
0.25
0
-0.25
-0.5
-2
-1
0
1
2
2
1
0

El teorema que sigue reduce el estudiar la diferenciabilidad al caso de las funciones reales.

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función y* $f_j : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ *funciones reales tales que* $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$ *para cada* $\vec{x} \in U$. *Entonces* f *es diferenciable en* $\vec{x}_0$ *si, y sólo si,* f_j *es diferenciable en* $\vec{x}_0$ *para cada* $j = 1, \ldots, m$. *En ese caso,*

$$df_{\vec{x}_0})(\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n} df_{j_{x_0}}(\vec{x}_0)(\vec{v})\vec{e}_j'$$

para cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, *y donde* $\{\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_m'\}$ *denota la base canónica de* $\mathbb{R}^m$.

Proposición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *sus componentes. Si* f *es diferenciable en un punto* $\vec{x}_0 \in U$*, su diferencial* $df_{\vec{x}_0}$ *tiene como matriz*

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(\vec{x}_0) & D_2 f_1(\vec{x}_0) & \ldots & D_n f_1(\vec{x}_0) \\ D_1 f_2(\vec{x}_0) & D_2 f_2(\vec{x}_0) & \ldots & D_n f_2(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\vec{x}_0) & D_2 f_m(\vec{x}_0) & \ldots & D_n f_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

que recibe el nombre de matriz jacobiana de f *en* $\vec{x}_0$*.*

Demostración.

Basta recordar que la columna j-ésima de la matriz de una aplicación lineal está formada por las coordenadas de la imagen del j-ésimo vector de la base. En este caso

$$df_{\vec{x}_0}(\vec{e}_j) = D_j f(\vec{x}_0).$$

□

Condición suficiente de diferenciabilidad

Hemos visto que la existencia de la diferencial de una función en un punto asegura la existencia de todas sus derivadas direccionales, en particular, de todas las derivadas parciales, aunque el recíproco no es cierto en general. En el siguiente resultado probaremos que la existencia de las derivadas parciales y su continuidad asegura la diferenciabilidad de la función.

Definición (Funciones de clase C^1)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es de clase C^1 en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

1. *Existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $\vec{x} \in U$.*
2. *La aplicacion $x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ es continua en U para $i = 1, \ldots, n$.*

Teorema (Condición suficiente de diferenciabilidad)

Sea $f : B(\vec{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si existen todas las derivadas parciales en $B(\vec{x}_0, r)$ y son continuas en $\vec{x}_0$, (f es de clase C^1), entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0$.

Corolario

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si existen todas las derivadas parciales en $B(\vec{x}_0, r)$ y son continuas en $\vec{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0$.

Demostración.

Una función con valores en $\mathbb{R}^m$ es continuamente derivable si, y sólo si, lo son todas sus funciones coordenadas. Así, el problema se reduce a estudiar la diferenciabilidad de sus funciones coordenadas y el teorema 2 nos da el resultado buscado. $\square$

Ejemplo

La función real

$$f(x,y)\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}(x^2+y^2)^{-1/2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$, (en particular en $(0,0)$). Sin embargo, sus derivadas parciales, que existen en todo punto de $\mathbb{R}^2$, no son continuas en $(0,0)$. Este ejemplo pone de manifiesto que la condición del teorema 2 es suficiente pero no necesaria.

Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$ las derivadas parciales vienen dadas por:

$$D_1(x, y) = 2x\mathrm{sen}(x^2 + y^2)^{-1/2} - \cos(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

$$D_2(x, y) = 2y\mathrm{sen}(x^2 + y^2)^{-1/2} - \cos(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

las cuáles son continuas para cada $(x, y) \neq (0, 0)$ lo cual nos da la diferenciabilidad en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Veamos que f también es diferenciable en $(0, 0)$. Calculamos en primer lugar las derivadas parciales en dicho punto.

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \mathrm{sen}(\frac{1}{|t|})}{t} = 0.$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \mathrm{sen}(\frac{1}{|t|})}{t} = 0.$$

Ahora nuestra candidata para diferencial en el punto $(0,0)$ es la aplicación nula

$$df_{(0,0)}(h_1,h_2) = D_1 f(0,0)\cdot h_1 + D_2 f(0,0)\cdot h_2 = 0.$$

Efectivamente,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\cdot \operatorname{sen}(h_1^2+h_2^2)^{-1/2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\cdot \operatorname{sen}(h_1^2+h_2^2)$$

ya que la función seno está acotada. Veamos por último que las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$. Para ello tomamos el límite direccional cuando $y = x$.

Ahora,

$$D_1(x,x) = 2 \cdot x \mathrm{sen} \frac{1}{|x|\sqrt{2}} + \cos \frac{1}{|x|\sqrt{2}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{2}},$$

y de aquí afirmamos que no existe el límite

$$\lim_{x \to 0} D_1(x,x),$$

ya que no existe el límite del segundo sumando cuando x tiende a cero. Por simetría afirmamos que $D_2(x,y)$ no es continua en $(0,0)$. La representación gráfica de las funciones $D_1(x,y)$ y $D_1(x,x)$ vienen dadas por la gráficas 1.12 y 1.13 respectivamente.

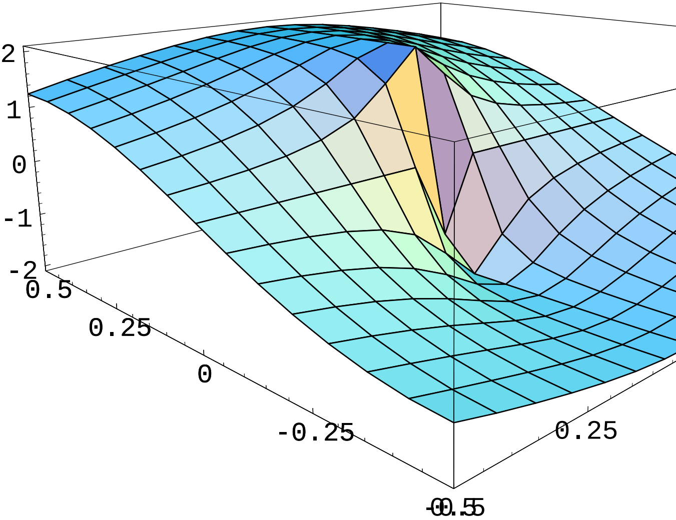


Figura: $D_1(x,y) = 2x\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)^{-1/2} - \cos(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$.

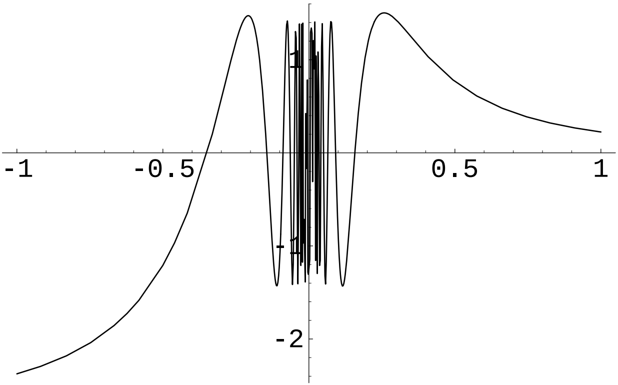


Figura: $D_1(x,x) = 2 \cdot x \operatorname{sen} \frac{1}{|x|\sqrt{2}} + \cos \frac{1}{|x|\sqrt{2}} \cdot \frac{-2}{|x|\sqrt{2}}$.

Observación: El teorema 2 subsiste si una de las derivadas parciales no es continua en el punto $\vec{x}_0$.

Derivadas parciales de orden superior

Dada $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, si f tiene derivada parcial j-ésima en todo punto de U, queda definida una nueva función $D_j f$ en U, con valores de nuevo en $\mathbb{R}^m$. Es posible que tal función tenga, a su vez, derivada parcial k-ésima en cierto punto $\vec{x}_0$ de U. A esta derivada parcial se la denota como $D_k D_j f(\vec{x}_0)$.

El proceso podría continuar, escribiéndose:

$$D_l D_k D_j f(\vec{x}_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0)$$

y así sucesivamente. La derivada parcial reiterada respecto a la misma coordenada suele escribirse abreviadamente

$$D_j^{(r)} f(x_0) = \frac{\partial^r f}{\partial x_j^r} f(x_0)$$

El teorema que sigue nos permite afirmar que en condiciones suficientemente buenas, el orden de derivación en el cálculo de derivadas parciales es irrelevante para el resultado final.

Teorema

Sea f una función con valores reales definida en una bola abierta B de $\mathbb{R}^n$. Si existen las derivadas parciales $D_j f$ y $D_k f$ en B, así como las derivadas parciales de segundo orden $D_{jk} f$ y $D_{kj} f$ en B, siendo estas últimas continuas en un punto $\vec{x}_0 \in B$, entonces

$$D_{jk} f(\vec{x}_0) = D_{kj} f(\vec{x}_0).$$

El siguiente ejemplo muestra una función en la que existen $D_{1,2}f(0,0)$ y $D_{2,1}f(0,0)$ pero ambos valores no son iguales.

Ejemplo

Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Calculamos $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, 0)$, $D_2 f(x, y)$ y $D_2 f(0, 0)$.

$$D_1 f(x, y) = \frac{(y(x^2 - y^2) + 2x^2 y)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$D_2 f(x, y) = \frac{(x(x^2 - y^2) - 2y^2 x)(x^2 + y^2) - 2y^2 x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0.$$

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0.$$

Calculamos ahora $D_{2,1}f(0,0)$ y $D_{1,2}f(0,0)$.

$$D_{2,1}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_1f(0,t) - D_1f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t} = -1.$$

$$D_{1,2}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_2f(t,0) - D_2f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = 1.$$

Conviene hacer notar que las hipótesis del teorema son suficientes para alcanzar la conclusión, pero no son necesarias para ello. De hecho puede probarse la igualdad de las derivadas segundas mixtas bajo hipótesis más débiles aunque las demostraciones son más complicadas.

La regla de la cadena

Dadas dos funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, se define la función compuesta $H = g \circ f$ como $H : X \to Z$ dada por

$$H(x) = g(f(x))$$

para cada $x \in X$.
Es natural preguntarse por las propiedades que posee H a partir de las de f y g. La Regla de la Cadena (o Teorema de Derivación de la Función Compuesta) asegura, básicamente, que la diferenciabilidad de f y g implica la de H. Es más, proporciona un método para el cálculo de la diferencial de H a partir de las de f y g. El resultado es completamente natural. La diferencial de H en un punto es la composición de las diferenciales de f y g en el punto y en su imagen por g, respectivamente. La composición de aplicaciones lineales entre espacios finito-dimensionales tiene una matriz que es, simplemente el producto de las matrices respectivas. Esto hace que el problema de componer dos aplicaciones se reduzca al puramente mecánico de multiplicar dos matrices.

Teorema (Regla de la cadena)

Sean U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to \mathbb{R}^p$ funciones. Sean $\vec{x}_0 \in U$ y $f(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ y g lo es en $\vec{y}_0$, entonces $H = g \circ f$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y se verifica:

$$dH_{\vec{x}_0} = (dg_{\vec{y}_0}) \circ (df_{\vec{x}_0})$$

Aplicaciones: Cambios de variable I

Veamos algunos ejemplos prácticos de la técnica del cambio de variable.

1. Nos proponemos determinar una función real f continuamente derivable en un conjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$ verificando en él la ecuación:

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y), \tag{4}$$

para cada $(x,y) \in A$. Sea B un conjunto del espacio $\mathbb{R}^2$ tal que la función

$$\phi(\theta, r) = (r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta))$$

Aplicaciones: Cambios de variable II

definida en B transforme el conjunto B en el A. Introduciendo la función compuesta $F = f \circ \phi$, es decir, haciendo en la función f el cambio de variable ϕ, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta))(-r\mathrm{sen}(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta))r\cos(\theta).$$

Y de aquí, puesto que f verifica la igualdad (4) se sigue que

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, r) = F(\theta, r), \tag{5}$$

para cada $(\theta, \rho) \in B$. Recíprocamente si F verifica la ecuación (5) y la función ϕ es una biyección de B sobre A, la función f verificará la ecuación (4). La ecuación (5) es más sencilla de resolver que la inicial

Aplicaciones: Cambios de variable III

y esta es la ventaja de haber hecho el cambio de variable. La solución de la ecuación (5) es $F(\theta, r) = g(r)e^{\theta}$, donde g es cualquier función real continuamente derivable definida en la proyección del conjunto B sobre el eje $\theta = 0$. Si la transformación ϕ es una biyección, una vez conocida la función F se determinará la f sin más que escribir $f = F \circ \phi^{-1}$. Como ϕ^{-1} viene dada por

$$\phi^{-1}(x, y) = (\arctan(y/x), \sqrt{x^2 + y^2})$$

resultará finalmente que la función f es

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})e^{\arctan(y/x)}.$$

Aplicaciones: Cambios de variable IV

2. Consideremos ahora la ecuación en derivadas parciales de segundo orden
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0,$$
para cada $(x,t) \in U$ donde la incógnita es una función f de segunda clase en un cierto conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Hagamos el cambio de variable definido por
$$x = u + v, \quad t = u - v, \qquad (u,v) \in V.$$
Las derivadas parciales primeras de la función $F = f \circ \phi$ son:
$$D_u F(u,v) = D_x f(u+v, u-v) + D_t f(u+v, u-v),$$

Aplicaciones: Cambios de variable V

$$D_v F(u,v) = D_x f(u+v, u-v) - D_t f(u+v, u-v)$$

y la derivada segunda mixta:

$$\begin{aligned} D^2_{u,v} F(u,v) = D_v(D_u F)(u,v) &= D^2_{x,x} f(u+v,u-v) - D^2_{x,t} f(u+v,u-v) \\ &\quad + D^2_{t,x} f(u+v,u-v) - D^2_{t,t} f(u+v,u-v). \end{aligned}$$

Como f es de segunda clase, la diferencia entre sus dos derivadas segundas mixtas es 0. Si la función f verifica la ecuación con la que empezábamos este apartado la F verificará la ecuación

$$D^2_{u,v} F(u,v) = 0, \qquad (u,v) \in V.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $D_u F(u,v) = g(u)$ donde g es cualquier función de primera clase. De esta igualdad se deduce que F

Aplicaciones: Cambios de variable VI

es de la forma $F(u, v) = G(u) + H(v)$, donde G y H son dos funciones reales arbitrarias de segunda clase en B. Como la transformación ϕ efectuada en este caso es biyectiva y su recíproca viene dada por

$$u = \frac{x+t}{2}, \qquad v = \frac{x-t}{2},$$

se deduce que las funciones f que verifican $D^2_{u,v}F(u, v) = 0$ son todas de la forma

$$f(x, t) = G\left(\frac{x+t}{2}\right) + H\left(\frac{x-t}{2}\right).$$

Aplicaciones: Derivadas de funciones en las que aparecen integrales

Ejemplo

Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función f definida por

$$f(x,y) = \int_a^{x+y} g(t)dt + \int_a^{xy} g(t)dt,$$

donde g es una función real continua en $\mathbb{R}$ y a es un número fijo.

Llamamos $G(z) = \int_a^z g(t)dt$. Entonces $f(x,y) = G(x+y) + G(xy)$ y

$$D_1 f(x,y) = G'(x+y) + G'(xy)y = g(x+y) + g(xy)y.$$

$$D_2 f(x,y) = G'(x+y) + G'(xy)x = g(x+y) + g(xy)x.$$

Ejemplo

Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función f *definida por*

$$f(x,y,z) = \int_{x^4}^{\mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}(y\,\mathrm{sen}\,z))} g(t)dt,$$

donde g *es una función real continua en* $\mathbb{R}$.

Definimos $h(x,y,z)=\mathrm{sen}(x\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z))$. Entonces

$$D_1 h(x,y,z)=\cos(x\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z))\cdot\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z),$$

$$D_2 h(x,y,z)=\cos(x\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z))\cdot x\cos(y\mathrm{sen}z)\mathrm{sen}z,$$

$$D_3 h(x,y,z)=\cos(x\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z))\cdot x\cos(y\mathrm{sen}z)y\cos z.$$

Ahora las expresiones de las derivadas parciales vienen dadas por

$$D_1 f(x,y,z)=g(\mathrm{sen}(x\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z)))D_1 h(x,y,z)-g(x^4)4x^3,$$

$$D_2 f(x,y,z)=g(\mathrm{sen}(x\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z)))D_2 h(x,y,z),$$

$$D_3 f(x,y,z)=g(\mathrm{sen}(x\mathrm{sen}(y\mathrm{sen}z)))D_3 h(x,y,z),$$

El gradiente

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$. Anteriormente hemos definido el gradiente como

$$\nabla f(\vec{x}_0) = (D_1 f(\vec{x}_0), \ldots, D_n f(\vec{x}_0)).$$

Obsérvese que en las condiciones anteriores se verifica que

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) =< \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} > .$$

Propiedades básicas del gradiente

Sean f y g funciones diferenciables definidas en $U \subset \mathbb{R}^n$ con valores reales. Entonces se verifica:

- $\nabla c = \vec{0}$ para toda constante c.
- $\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$, donde a, b son constantes.
- $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
- $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$, $g \neq 0$.
- $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$.

Interpretación geométrica del gradiente

Comenzaremos con un ejemplo que ilustre la situación. Imaginemos una persona que está esquiando sobre la superficie de una montaña. La función $z = f(x, y)$ da la altura de la persona y queremos establecer el rumbo de la brújula que corresponda al descenso más abrupto. Hacemos énfasis en la expresión *rumbo de la brújula* porque el gradiente es un vector en el plano y nada tiene que ver con puntos más arriba o más abajo de la montaña.

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* $\vec{x}_0$*. Si* $\nabla f_{\vec{x}_0} \neq \vec{0}$ *y* $\vec{v}$ *es unitario entonces:*

1. *El valor máximo de la derivada direccional* $D_{\vec{v}}f$ *es* $\|\nabla f_{\vec{x}_0}\|$*, donde el vector* $\vec{v}$ *es un vector unitario en la dirección de* $\nabla f_{\vec{x}_0}$*.*
2. *El valor mínimo de la derivada direccional* $D_{\vec{v}}f$ *es* $-\|\nabla f_{\vec{x}_0}\|$*, donde el vector* $\vec{v}$ *es un vector unitario en la dirección de* $-\nabla f_{\vec{x}_0}$*.*

Demostración.

Si $\vec{v}$ es un vector unitario tenemos que

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \langle \nabla f_{\vec{x}_0}, \vec{v} \rangle = \|\nabla f_{\vec{x}_0}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta) = \|\nabla f_{\vec{x}_0}\| \cdot \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo que forma el gradiente con el vector $\vec{v}$. Dicha expresión será máxima cuando $\cos(\theta) = 1$ y mínima cuando $\cos(\theta) = -1$, es decir, cuando $\vec{v}$ y $\nabla f_{\vec{x}_0}$ tengan igual dirección y sentido e igual dirección y sentido contrario respectivamente. $\square$

El teorema afirma que en $\vec{x}_0$ la función crece más rápidamente en el sentido del gradiente y decrece más rápidamente en el opuesto.

Ejemplo

El conjunto de los puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$ *es un cuadrado colocado en el primer cuadrante del plano* xy*. Supongamos que se calienta ese cuadrado de tal manera que* $T = x^2 + y^2$ *es la temperatura en el punto* $P(x, y)$*. ¿En qué sentido se establecerá el flujo de calor en el punto* $P_0(2, 4)$*?*

Demostración.

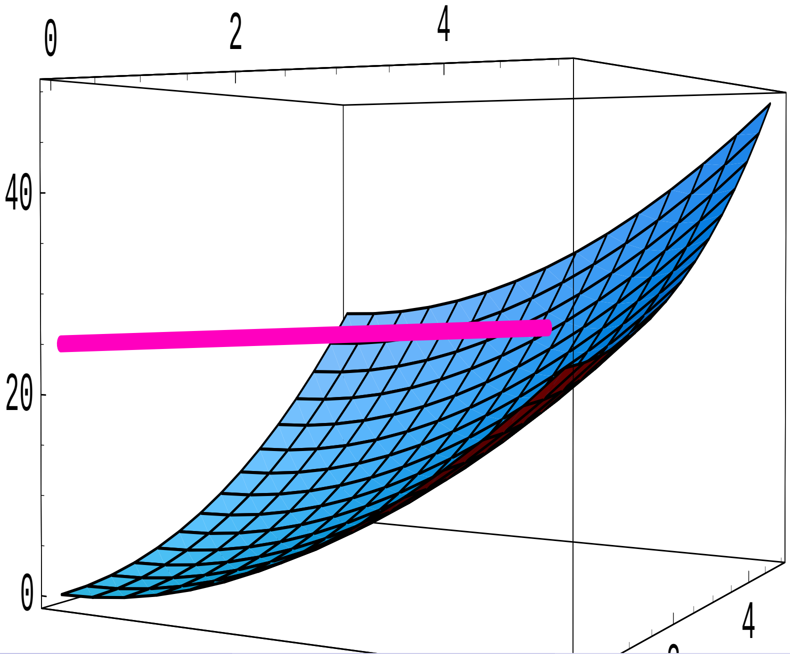
El flujo de calor en la región está dado por una función vectorial $C(x, y)$ ya que su valor en cada punto depende de las coordenadas de ése. Sabemos por la física que $C(x, y)$ será perpendicular a las curvas isotermas $T(x, y) = K$, donde K es constante. El gradiente y todos sus múltiplos verifican esta condición. En esta situación nos dice la física que $C = -k\nabla T$, donde k es una constante positiva llamada conductividad térmica. Nótese que la razón del signo negativo es que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura. Como $T(3, 4) = 25$, el punto $P_0(3, 4)$ está en la isoterma $T(x, y) = 25$. Sabemos que el flujo de calor en P_0 es $C_0 = -k\nabla T_0$. Como $\nabla T = (2x, 2y)$ se tiene que $\nabla T_0 = (6, 8)$. Así el flujo de calor en P_0 verifica que

$$C_0 = (-6k, -8k).$$

Como la conductividad térmica es positiva se puede afirmar que el calor fluye en P_0 en el sentido del vector unitario

$$u = \left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right).$$

□


0
2
4
40
20
0
4

Normalidad del gradiente

Supongamos que S es una superficie de nivel de la función $f(x, y, z)$ de ecuación $f(x, y, z) = K$ (constante). Entonces, si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de S, se demuestra que el gradiente ∇f_0 de f en P_0 es un vector normal a todo vector tangente a una curva sobre S que pasa por P_0.

Teorema

Sea f una función diferenciable en el punto P_0 tal que el gradiente ∇f_0 en P_0 es distinto de cero. Entonces ∇f_0 es ortogonal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = K$ que pasa por P_0.

Demostración.

Sea $r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ una curva contenida en la superficie de nivel S tal que $r(0) = P_0$. Entonces

$$f(r(t)) = K.$$

Ahora de la expresión anterior obtenemos

$$D_1 f(P_0) r_1'(0) + D_2 f(P_0) r_2'(0) + D_3 f(P_0) r_3'(0) = 0.$$

Es decir,

$$\nabla f_0 \cdot (r'(0)) = 0.$$

$\square$

En cada punto P_0 de la superficie de nivel $F(x, y, z) = K$, el gradiente ∇f_0 es normal a la superficie. Es decir, ∇f_0 es ortogonal a todas las tangentes a todas las curvas contenidas en $f(x, y, z) = K$ que pasan por P_0. Ilustramos esta afirmación con un ejemplo. Consideremos la aplicación $f(x, y) = x^2 - y^2$ y el punto $P(2, \sqrt{3})$. El punto $(2, \sqrt{3}, 1)$ está contenido en la curva de nivel $f(x, y) = 1$.

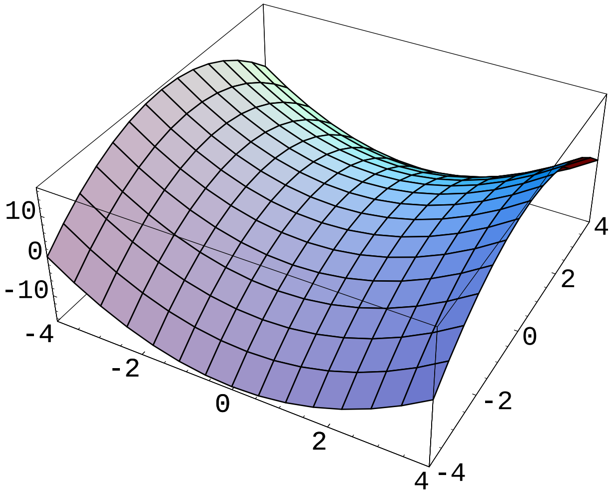


Figura: Gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

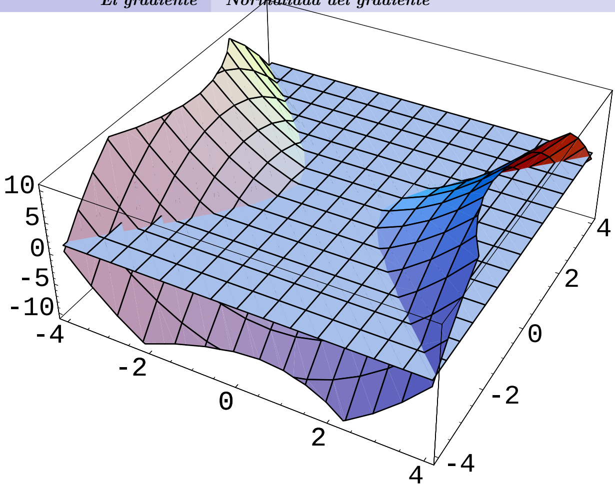


Figura: La intersección del plano con la gráfica de la función f es la curva de nivel $f(x, y) = 1$

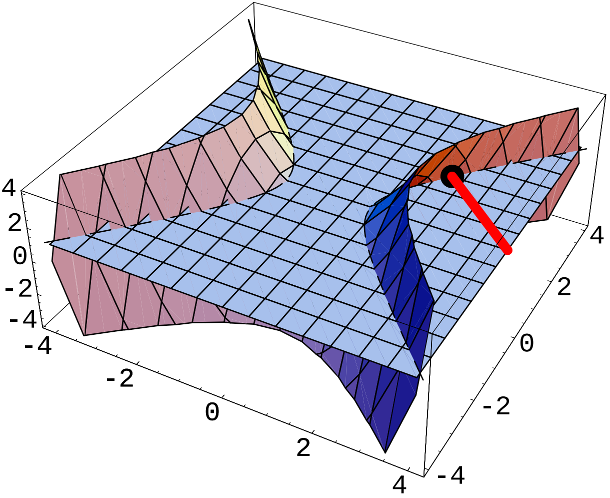
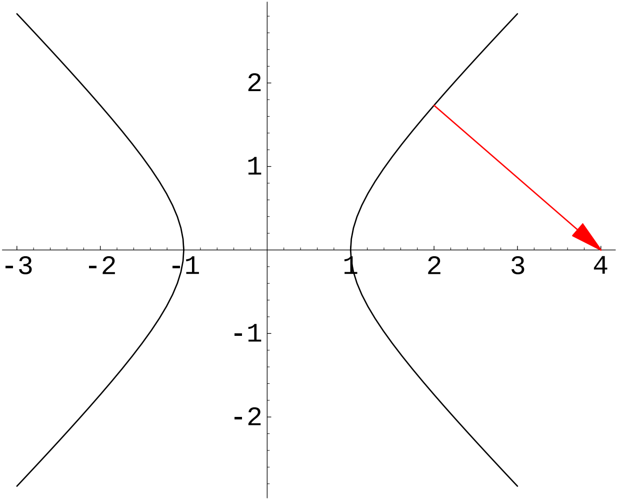


Figura: En color rojo hemos señalado el vector gradiente que efectivamente es

Visto en dos dimensiones la situación es la que sigue.



Cálculo del plano tangente a una superficie

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(x_0, y_0) \in U$. Calcúlese el plano tangente a la superficie $(x, y, f(x, y))$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Sabemos que el vector normal al plano tangente a la superficie $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ viene dado por el vector gradiente, es decir,

$$\vec{n} = (D_x f(x_0, y_0), D_y f(x_0, y_0), -1).$$

Ahora la ecuación del plano es de la forma

$$D_x f(x_0, y_0) \cdot x + D_y f(x_0, y_0) \cdot y - z + D = 0,$$

donde D viene determinada por la condición $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pertenece al plano. Finalmente queda

$$D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = z - f(x_0, y_0).$$

Más aplicaciones

Ejemplo

Un cajón abierto tiene longitud $3m$*, anchura* $1m$ *y altura* $2m$*.*
Está construido con unos materiales que cuestan 20 euros por m^2 *el utilizado en el lateral y* 30 *euros por* m^2 *el utilizado en el fondo. Calcule el coste total del cajón y use incrementos para estimar la variación del coste cuando la longitud y anchura aumentan* $3cm$ *y la altura decrece en* $4cm$*.*

Para resolver este problema utilizaremos que la función coste del cajón podemos aproximarla en un entorno de un punto por la trasladada al punto de la diferencial. Nuestro punto $P_0 = (3, 1, 2)$ ($x = longitud$, $y = anchura$ y $z = altura$). La superficie lateral viene dada por

$$L = 2(x + y)z$$

$$L = 2(3 + 1)2 = 16m^2.$$

La base del cajón vendrá dada por

$$B = x \cdot y,$$

$$B = 3 \cdot 1 = 3m^2.$$

La función coste del cajón depende de las dimensiones y vendrá dada por

$$C(x, y, z) = 2(x + y)z \cdot 20 + x \cdot y \cdot 30 = .$$

Calculamos las derivadas parciales de la función C,

$$C_x(x, y, z) = 40z + 30y,$$

$$C_y(x, y, z) = 40z + 30x,$$

$$C_z(x, y, z) = 40(x + y).$$

Ahora $C(3, 1, 2) = 320 + 90 = 410\, euros$, y $\Delta x = 0{,}03m$, $\Delta y = 0{,}03m$ y $\Delta z = -0{,}04m$.

$$\begin{aligned}\Delta C &\approx C_x(3,1,2)0{,}03 + C_y(3,1,2)0{,}03 - C_z(3,1,2)0{,}04\\ &= 110\cdot 0{,}03 + 170\cdot 0{,}03 - 160\cdot 0{,}04\\ &= 3{,}3 + 5{,}1 - 6{,}4 = 2.\end{aligned}$$

Es decir, el coste aumenta en 2 euros aproximadamente.

Ejemplo

Máximo porcentaje de error en un circuito eléctrico.

Cuando se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, al resistencia total viene dada por

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Si la medida de R_1 es de 300 ohmios, con un error máximo del $2\,\%$, y la de R_2 es de 500 ohmios, con un errror máximo del $3\,\%$, halle el error máximo de R.

Solución: Tenemos que

$$\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leq 0{,}02 \quad \text{y} \quad \left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| \leq 0{,}03,$$

y queremos hallar el valor máximo de $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$. Como

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

y

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Se deduce entonces que

$$\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\Delta R_2 = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_2.$$

Calculamos $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$. Puesto que $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \dot{R}_2},$$

luego,

$$\Delta R \cdot \frac{1}{R} \approx \left(\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} \Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} \Delta R_2 \right) \cdot \frac{R_1+R_2}{R_1 \dot{R}_2}.$$

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2}.$$

Aplicando ahora a esta relación la desigualdad triangular se tiene que

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| \leq \left| \frac{R_2}{R_1+R_2} \right| \cdot \left| \frac{\Delta R_1}{R_1} \right| + \left| \frac{R_1}{R_1+R_2} \right| \cdot \left| \frac{\Delta R_2}{R_2} \right|$$

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leq \frac{500}{300+500}0{,}02 + \frac{300}{300+500}0{,}03 = 0{,}02375.$$

El porcentaje máximo es de aproximadamente, el 2.4 %.

El teorema de la función implícita

Sea $f(\vec{x}, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ una ecuación donde $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$. El teorema de la función implícita nos relaciona la variable y con el resto de las coordenadas bajo unas determinadas condiciones.

Teorema (Teorema de la función implícita)

Sea f una función de clase $C^k(U)$ y sea $(\vec{x}_0, y_0) \in U$ de manera que $f(\vec{x}_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, con $\vec{x}_0 \in A$, un abierto $A' \subset \mathbb{R}$ con $y_0 \in A'$ y una única función $\phi : A \to A'$ de clase $C^k(A, A')$ de manera que:

1. $A \times A' \subset U$.
2. $f(\vec{x}, \phi(\vec{x})) = 0$ *para todo* $\vec{x} \in A$, *y si* $f(\vec{x}, y) = 0$ *con* $(\vec{x}, y) \in A \times A'$, *entonces* $y = \vec{\phi}(\vec{x}))$.
3. $\phi(\vec{x}_0) = y_0$.

Es decir, podemos despejar la variable y en función de las restantes variables para tener la función $y = \phi(\vec{x})$.

Teorema de la función implícita para un sistema de ecuaciones

Consideremos un sistema de m ecuaciones con $n+m$ incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

donde $f_i : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ son funciones reales para $i = 1, 2, \ldots, m$. Denotamos $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, en estas condiciones:

Teorema (Teorema de la función implícita para un sistema de ecuaciones)

Supongamos que las funciones f_i son de clase $C^k(U)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ y sea $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U$ de manera que $f_i(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$. Si el determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces existen un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ con $\vec{x}_0 \in A$, un abierto $A' \subset \mathbb{R}^m$ con $\vec{y}_0 \in A'$ y una única función $\vec{\phi} : A \to A'$ de clase $C^k(A, A')$ con funciones coordenadas $(\phi_1, \ldots \phi_m)$ de manera que:

1. $A \times A' \subset U$;
2. $f_i(\vec{x}, \phi_1(\vec{x}), \ldots, \phi_m(\vec{x})) = 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, m$ *y para cada* $\vec{x} \in A$, *y si* $f_i(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, *para* $i = 1, 2, \ldots, m$, *con* $(\vec{x}, \vec{y}) \in A \times A'$, *entonces* $\vec{y} = \vec{\phi}(\vec{x})$.
3. $\vec{\phi}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$.

El teorema de la función inversa

Teorema (El teorema de la Función Inversa)

Sea U un abierto y $\vec{f}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^k(U)$. Sea $\vec{x}_0 \in U$ de forma que $|J\vec{f}(\vec{x}_0)| \neq 0$. Existen entonces dos abiertos A y A' de $\mathbb{R}^n$ con $\vec{x}_0 \in A$ y $\vec{f}(\vec{x}_0) \in A'$ de manera que $\vec{f}: A \to A'$ es biyectiva y tiene una función inversa $(\vec{f})^{-1}: A' \to A$ de clase $C^k(A')$ de forma que

$$J(\vec{f}^{-1}(\vec{y})) = [J(\vec{f}(\vec{x}))]^{-1}$$

para todo $\vec{y} \in A'$, siendo $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

El polinomio de Taylor en varias variables

Consideremos ahora $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables con A un conjunto abierto. La idea del teorema de Taylor es idéntica para este caso: intentar sustituir una función por un polinomio que en general tendrá n variables. No obstante, dado un punto $\vec{a} \in A$, hemos de hacer notar que, bajo ciertas condiciones sólo puede sustituirse por el polinomio de forma local.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{x}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define el segmento

$$[\vec{a}, \vec{x}] = \{\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}) : 0 \leq t \leq 1\}$$

En general si A es abierto y $\vec{a} \in A$, para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ suficientemente cercano a $\vec{a}$ se tiene que $[\vec{a}, \vec{x}] \subset A$. Podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real de varias variables con* A *un conjunto abierto* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. *Supongamos que* f *es de clase* $C^k(A, \mathbb{R})$. *Entonces para cada* $\vec{x} \in A$ *tal que* $[\vec{a}, \vec{x}] \subset A$, *existe un número* $\theta \in (0, 1)$ *verificando*

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= f(\vec{a}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} D_i f(\vec{a})(x_i - a_i) + \\
&+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} D^2_{i,j}(\vec{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} D^{k-1}_{i_1,\ldots,i_{k-1}} f(\vec{a})(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_{k-1}} - a_{i_{k-1}}) + \\
&+ \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} D^{k}_{i_1,\ldots,i_k} f(\vec{a} + \theta(\vec{x} - \vec{a}))(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_k} - a_{i_k})
\end{aligned}
$$

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A no necesariamente abierto.
Un punto $\vec{x}_0 \in A$ es un máximo relativo para la función f si existe una bola abierta $B(\vec{x}_0, \epsilon)$ de manera que $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \epsilon) \cap A$.
Dicho punto $\vec{x}_0$ es un máximo absoluto si $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$ para todo $x \in A$.
Un punto $\vec{x}_0 \in A$ es un mínimo relativo para la función f si existe una bola $B(\vec{x}_0, \epsilon)$, de manera que $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$ para cada $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \epsilon) \cap A$.
Dicho punto $\vec{x}_0$ es un mínimo absoluto si $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$ para cada $\vec{x} \in A$.

Teorema (Weierstrass)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua definida sobre un conjunto cerrado y acotado. Entonces existen al menos dos puntos $\vec{x}_m$ y $\vec{x}_M$ en el conjunto A de forma que

$$f(\vec{x}_m) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_M)$$

para cada $\vec{x} \in A$.

Sin embargo, para tener un método que permita de una forma sencilla calcular los extremos de dicha función basta con exigirle continuidad a la misma, hemos de pedir que dicha función sea de clase C^2 en el interior de A.

Formas cuadráticas

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se define la forma cuadrática asociada a A de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ y &\to \vec{y} A \vec{y}^t \end{aligned}$$

Definición (Clasificación de las formas cuadráticas)

1. *Semidefinida positiva:* si $\vec{y}A\vec{y}^t \geq 0$ para cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. *Definida positiva:* si $\vec{y}A\vec{y}^t > 0$ para $\vec{y} \neq 0$.
3. *Semidefinida negativa:* si $\vec{y}A\vec{y}^t \leq 0$ para cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
4. *Definida negativa:* si $\vec{y}A\vec{y}^t < 0$ para cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
5. *Indefinida:* si existen $\vec{y}, \vec{z}$ tales que $\vec{y}A\vec{y}^t > 0$ y $\vec{z}A\vec{z}^t < 0$.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces:

1. *La matriz A es diagonalizable, es decir, existen P regular y D diagonal tales que $D = P^t A P$.*
2. $\vec{y} A \vec{y}^t = \vec{y} P D P^t \vec{y}^t = (\vec{y} P) D (y P)^t$.
3. *A es definida positiva si todos los valores propios son positivos.*
4. *A es semidefinida positiva si todos los valores propios son mayores o iguales que cero.*
5. *A es definida negativa si todos los valores son negativos.*
6. *A es semidefinida negativa si todos los valores propios son menores o iguales que cero.*
7. *A es indefinida si A tiene valores positivos y negativos.*

Proposición

Sea $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $A = H(\vec{f})(\vec{x}_0)$ la matriz hessiana.

1. *Si $\vec{f}$ tiene un máximo relativo en $\vec{x}_0$ entonces A es semidefinida negativa.*
2. *Si $\vec{f}$ tiene un punto crítico en $\vec{x}_0$ y A es definida negativa, entonces $\vec{x}_0$ es un máximo relativo estricto de $\vec{f}$.*
3. *Si $\vec{f}$ tiene un mínimo relativo en $\vec{x}_0$ entonces A es semidefinida positiva.*
4. *Si $\vec{f}$ tiene un punto crítico en $\vec{x}_0$ y A es definida positiva entonces $\vec{x}_0$ es un mínimo relativo estricto de $\vec{f}$.*
5. *Si $\vec{x}_0$ es un punto crítico de $\vec{f}$ y A es indefinida entonces $\vec{x}_0$ es un punto de silla.*

Particularizamos el problema. Vamos a dividir el problema en dos posibles casos:

- Cálculo de los extremos relativos en el interior de A.
- Cálculo de los extremos relativos en la frontera de A mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Condición necesaria de extremo. Puntos críticos

Proposición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clase* $C^1(A, \mathbb{R})$*. Si* $\vec{x}_0 \in A$ *es un extremo relativo de* f *entonces necesariamente ha de verificarse que*

$$D_i f(\vec{x}_0) = 0$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Así para determinar los posibles extremos relativos de una función de clase $C^1(A, \mathbb{R})$ es suficiente con calcular las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} D_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ D_2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \ldots & \\ D_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}$$

Condición suficiente de extremo

Para determinar cuáles de las soluciones que hemos obtenido son realmente extremos de la función hemos de pedir que ésta sea de clase $C^2(A, \mathbb{R})$, y construir la matriz hessiana que tiene la forma:

$$Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} D^2_{11}f(\vec{x}) & D^2_{12}f(\vec{x}) & \cdots & D^2_{1n}f(\vec{x}) \\ D^2_{21}f(\vec{x}) & D^2_{22}f(\vec{x}) & \ldots & D^2_{2n}f(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^2_{n1}f(\vec{x}) & D^2_{n2}f(\vec{x}) & \cdots & D^2_{nn}f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Para ello se sigue el siguiente procedimiento:

$$\Delta_1(\vec{x}_0) = \left| D^2_{11} f(\vec{x}_0) \right|$$

$$\Delta_2(\vec{x}_0) = \begin{vmatrix} D^2_{11} f(\vec{x}_0) & D^2_{12} f(\vec{x}_0) \\ D^2_{21} f(\vec{x}_0) & D^2_{22} f(\vec{x}_0) \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_n(\vec{x}_0) = \begin{vmatrix} D^2_{11} f(\vec{x}_0) & D^2_{12} f(\vec{x}_0) & \cdots & D^2_{1n} f(\vec{x}_0) \\ D^2_{21} f(\vec{x}_0) & D^2_{22} f(\vec{x}_0) & \cdots & D^2_{2n} f(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^2_{n1} f(\vec{x}_0) & D^2_{n2} f(\vec{x}_0) & \cdots & D^2_{nn} f(\vec{x}_0) \end{vmatrix}$$

Se verifican entonces los siguientes casos:

1. Si $\Delta_i(\vec{x}_0) > 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $\vec{x}_0$ es un mínimo relativo.
2. Si $\Delta_1(\vec{x}_0) < 0$, $\Delta_2(\vec{x}_0) > 0$ y se van alternando los signos negativos y positivos, entonces $\vec{x}_0$ es un máximo relativo de la función f.
3. Cualquier otra sucesión en los signos de $\Delta_i(\vec{x}_0)$ produce un caso indeterminado.

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

En este caso se pretende hallar los extremos de una función que además ha de verificar una condición añadida (ecuación de ligadura).
Dadas $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ la condición de ligadura. El procedimiento comienza construyendo $F : A \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por $F(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda \cdot g(\vec{x})$.

A continuación resolvemos el sistema dado por:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x},\lambda) & = & 0 \quad i=1,\dots n \\ g(\vec{x}) & = & 0 \end{array}$$

En el caso $n=2$, el sistema queda de la forma:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) & = & 0 \\ g(x,y) & = & 0 \end{array}$$

Las soluciones del sistema son los posibles extremos de la función f sometida a la ligadura $g(x, y) =$. Supongamos que (x_0, y_0, λ) es solución del sistema. Para averiguar si (x_0, y_0) es un extremo condicionado procedemos de la manera siguiente:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)y = 0$$

de donde despejamos x o y y sustituimos en la siguiente ecuación:

$$\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)x^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0)xy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)y^2.$$

Si $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ será mínimo condicionado.
Si $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ será máximo condicionado.
Si $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ no podemos afirmar nada.