La integral de Riemann

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I (1º Ingeniería Electrónica Industrial y Automática)

Definición

Dado $[a, b]$ un intervalo de la recta real, se define una partición $\mathcal{P}$ de dicho intervalo como una sucesión finita de números reales de la forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

A cada uno de los intervalos de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 0, 1, \ldots, n-1$ se les conoce como intervalos de la partición $\mathcal{P}$. Se define el diámetro de la partición $\mathcal{P}$ como

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) = \text{máx}\left\{|x_{i+1} - x_i| : i = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ de un intervalo $[a, b]$, $\mathcal{P}$ se dice *más fina que* $\mathcal{P}'$ si todo elemento de $\mathcal{P}'$ está contenido en $\mathcal{P}$. Se verifica entonces que $\operatorname{diam}(\mathcal{P}) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{P}')$.

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se define la *suma inferior de Riemann* de f para la partición $\mathcal{P}$ como

$$s(\mathcal{P}, f, [a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

donde $m_i = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Geométricamente, la suma inferior de Riemann coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.

Definición

Se define la suma superior de Riemann de f en la partición $\mathcal{P}$ como

$$S(\mathcal{P}, f, [a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

donde $M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$.

Es claro que

$$s(P, f, [a, b]) \leq S(\mathcal{P}, f, [a, b]).$$

Además si $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ tenemos:

$$s(\mathcal{P}, f, [a, b]) \leq s(\mathcal{P}', f, [a, b])$$

$$S(\mathcal{P}, f, [a, b]) \geq S(\mathcal{P}', f, [a, b])$$

Definición

Sea $(\mathcal{P}_n)_n$ una sucesión de particiones de manera que $\mathcal{P}_{n+1}$ es más fina que $\mathcal{P}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y de manera que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\mathcal{P}_n) = 0$. Diremos que una función es *integrable Riemann* en $[a, b]$ o integrable en $[a, b]$ si existen y son iguales los límites

$$\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n, f, [a, b]) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n, f, [a, b]).$$

Dicho límite e denotará como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n, f, [a, b]) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n, f, [a, b]),$$

y se denomina *integral de Riemann* de f en $[a, b]$.

Ver animación

Geométricamente se observa que cuando la función es positiva, dicho límite coincide con el área de la superficie definida por la gráfica, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Los números reales a y b reciben el nombre de *límites de integración*. Ahora bien, ¿cuándo f es integrable? Estos son algunos resultados:

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada con un número finito de puntos de discontinuidad, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Propiedades

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
2. Si $c \in (a, b)$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Más propiedades

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- $f + g$ es integrable en $[a, b]$,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f$ es integrable en $[a, b]$,

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

- Si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Más propiedades II

- Si $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

- La función $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Teorema de la Media Integral

Proposición

Sea F una función integrable en $[a, b]$ y sean m y M los valores mínimos y máximos respectivamente de la función f en este intervalo, entonces se verifica que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Teorema de la Media Integral

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f es integrable es posible definir una nueva función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ utilizando la integral definida de la función f,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

El Teorema Fundamental del Cálculo afirma

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ y continua en $x_0 \in (a, b)$, entonces la función F definida en (1) es derivable en x_0 y se verifica que

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

En general, si la función f es continua en $[a, b]$ entonces F es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in (a, b)$.

Dadas $f, G : [a, b] \to \mathbb{R}$, diremos que G es una función *primitiva* de f si se verifica que $G'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.
El Teorema Fundamental del Cálculo Integral afirma que si f es continua en $[a, b]$ entonces existe una función primitiva. Las primitivas son únicas salvo constantes, es decir, si $G_1, G_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son primitivas de f entonces $G_1(x) = G_2(x) + k$ para cada $x \in [a, b]$, donde k es una constante real.

Regla de Barrow

Regla de Barrow

Sea $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Fórmula del cambio de variable

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ y $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función inyectiva con derivada integrable en $[c, d]$, de manera que $g(c) = a$ y $g(d) = b$. Entonces se satisface la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

Fórmula de integración por partes

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en (a, b) tales que sus derivadas f' y g' son integrables en $[a, b]$. Entonces se verifica la fórmula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Primitivas de las fracciones racionales

Sean $P(x)$ y $(Q(x)$ dos funciones polinómicas de una variable real. Se demuestra en los tratados de Algebra que toda fracción racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ puede descomponerse en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \sum_{k=1}^{\alpha_2} \frac{B_k}{(x-a_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{M_k x + N_k}{(x^2+a_m)^k},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son las raíces (reales y complejas) de la ecuación $Q(x) = 0$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son sus índices de multiplicidad respectivamente. El polinomio $p(x)$ es el cociente que se obtiene al hacer la división entera del polinomio P entre el polinomio Q. Por último, las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha_1}$; $B_1, B_2, \ldots, B_{\alpha_2}$; $M_1, \ldots, M_{\alpha_m}$ que aparecen en la descomposición asociada a los ceros del polinomio Q son números reales o complejos que pueden calcularse. En base a esta descomposición el problema del cálculo de la primitiva del cociente de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se simplifica.

Primitivas de expresiones que contienen $\frac{ax+b}{cx+d}$

Las funciones a las que pretendemos calcular sus primitivas tienen la forma:

$$f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right).$$

En este caso utilizaremos el cambio de variable

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores $n_1, n_2, \dots, n_k$. Despejando x obtenemos

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = f_1(t)$$

apareciendo x como una fracción racional de la variable t. El problema se reduce a la determinación de una primitiva de una fracción racional.

Primitivas de las diferencias binomias

Se trata de calcular primitivas de la forma

$$\int x^{\alpha}(a + bx^{\beta})^{\gamma} dx,$$

donde α, β, γ son números racionales y a y b son números reales, en intervalos donde la función integrando tome valores reales.
El cambio de variable que tenemos que utilizar en este caso es $x = t^{1/\beta}$.

Primitivas de expresiones que contienen $\cos(x)$ *y sen*(x)

Sea f una fracción racional de dos variables y consideremos el calcular la primitiva

$$\int f(\cos(x), \operatorname{sen}(x))dx.$$

Haciendo el cambio $t = \tan(\frac{x}{2})$, se tiene que $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, luego la integral a calcular será

$$\int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

y el problema queda reducido a hallar la primitiva de una fracción racional de la nueva variable t.

En ciertos casos particulares es más rápido hacer otros cambios de variables.

Primitivas de funciones de la forma $f(g(x))g'(x)$

Sea f una función racional y g una biyección derivable y con derivada continua de un intervalo J sobre un intervalo I. El problema de hallar una primitiva en J de la función $f(g(x))g'(x)$ se reduce al de hallar una primitiva en I de la función $f(t)$, sin más que hacer el cambio de variable $g(x) = t$.

Primitivas de expresiones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

Sea f una función racional de dos variables. Nos proponemos determinar las primitivas de la forma

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+2bx+c})dx,$$

donde a,b,c son números reales y $a\neq 0$, en aquellos casos en los cuales $ax^2+2bx+c\geq 0$. Tomando $d=\frac{ac-b^2}{a}$ se tiene la identidad

$$ax^2+2bx+c=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+d.$$

El cambio de variable que hay que realizar es $x=t-\frac{b}{a}$.

Ver los apuntes para más detalles

Integrales impropias de primera especie

Definición

Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo $[a, b]$ con $b \in [a, +\infty)$. Se define la integral impropia

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Si el límite anterior existe y es finito la integral se dice que es *convergente*, si el límite existe pero es $\pm\infty$ la integral es *divergente*. Si el límite no existe diremos que la integral es *oscilante*.

Definición

De forma análoga se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

El valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ no depende del punto $a \in \mathbb{R}$.
Se define valor principal de la integral impropia de f en $(-\infty, +\infty)$ como el límite

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx.$$

Si la integral es convergente, el valor principal de la integral y la integral coinciden, mientras que en el caso en el que no sea convergente esto no tiene por qué suceder.

Ejemplo

Consideramos la función $f(x) = x$*. Puesto que* $\int_{-t}^{t} x dx = 0$*, así*

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} x dx = 0,$$

mientras que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx \text{ no existe.}$$

Integrales impropias de segunda especie

Definición

Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, c]$ para cada $c \in [a, b)$ de forma que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Si el límite anterior existe y es finito diremos que la integral es convergente, si existe pero no es finito entonces la integral se dice divergente. Por último, cuando no se dan ninguno de los casos anteriores diremos que la integral es oscilante.

Cálculo del área de regiones planas

Sea $y = f(x)$ una curva situada en el semiplano superior y definida en el intervalo $[a, b]$ es conocido que el área limitada por la curva, el eje de abcisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por la integral de Riemann de la función f en $[a, b]$ es decir,

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Asimismo, el área comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ viene dado por:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx.$$

En general el área comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$ viene dada por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Cálculo del volumen utilizando secciones

Esta técnica permite el cálculo de volúmenes de sólidos de los cuáles conocemos el valor de las áreas de todas las secciones. Fijada una variable x, si conocemos el variable de cada una de las secciones que denotamos por S_x el volumen no es sino la "suma de las áreas de todas las secciones", idea que se corresponde con el concepto de integral. Así:

$$Vol = \int_a^b A(S_x)\, dx$$

donde a y b son los límites de integración entre los que toma valores la variable x y $A(S_x)$ denota el área de la sección para x fija. De forma análoga se podría considerar la fórmula sustituyendo la variable x por y. Veamos un ejemplo práctico:

▸ Abrir Archivo

Cálculo de la longitud de una curva

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces la longitud de dicha curva viene dada por

$$L[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Efectivamente si $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ basta aproximar la longitud de L con la poligonal $\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$, tomando una sucesión de particiones cuyo diámetro tiende a cero obtenemos la fórmula de la longitud que hemos dado.

Cálculo del volumen de un sólido de revolución

El volumen de un sólido generado al girar una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alrededor del eje OX viene dado por

$$Volumen = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Si en lugar de ser alrededor del eje OX consideramos el volumen generado alrededor del eje OY obtenemos

$$Volumen = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx.$$

Cálculo del área de un sólido de revolución

En este caso se trata de calcular el área del sólido tridimensional que se obtiene al girar la gráfica de la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable sobre el eje OX. El área viene dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Cuando en lugar del eje OX el sólido de revolución se obtiene al girar la curva alrededor del eje OY bastará con hacer un cambio de variable.