Cálculo diferencial de funciones reales de variable real

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I (1º Ingeniería Electrónica Automática e Industrial)

Definición de límite de una función

Definición:

Sean $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de A en $\mathbb{R}$ y a un punto de acumulación (es decir, para cada entorno abierto I_a de a se verifica que $(I_a \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$). Diremos que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en a si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $x \in A$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$. Lo denotaremos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Probar que $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2) = 6$

Fijado $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - 2| < \delta$, $|x| < \delta + 2$ entonces $|x^2 + 2 - 6| < \epsilon$. Basta definir $\delta := \frac{-4+2\sqrt{4+\epsilon}}{2}$ para obtener la definición (ejercicio).

Para demostrar que una función no tiene límite basta con negar la definición. Es decir, una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no tiene límite como límite l en un punto a perteneciente a la adherencia de A si existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x_\delta \in A$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - l| > \epsilon$.

Demostrar que $\lim_{x\to 2} \frac{6x-1}{2x-3}$ *no es* 3.

Ejercicio

Caracterización mediante sucesiones

Podemos dar una definición alternativa de límite de una función esta vez utilizando sucesiones.

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto en la adherencia de A. Diremos que la función f tiene límite l en el punto a si para cada sucesión $(x_n)_n$ de puntos en A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se verifica que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Al igual que en el caso anterior podemos utilizar la definición para demostrar la no existencia del límite.

Probar que no existe el límite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

Ejercicio

Propiedades

Propiedades

1. El límite de una función en un punto es único.
2. Si una función tiene límite en un punto a, está acotada en un entorno de ese punto.
3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l < \alpha \ (> \beta)$, entonces existe un entorno de a donde la función toma valores menores que α (mayores que β).
4. Sean $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ funciones definidas en un intervalo I que verifican $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un entorno de a perteneciente a la adherencia de I. Si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
5. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son dos funciones con límites l y m en a, y $k \in \mathbb{R}$. Entonces:
    1. $\lim_{x\to a} f + g = l + m$;
    2. $\lim_{x\to a} f \cdot g = l \cdot m$;
    3. $\lim_{x\to a} k \cdot f = k \cdot l$;
    4. si $m \neq 0$, $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{k}{m}$.

Límites laterales

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Se dice que $f(x)$ tiende a l cuando x tiende al punto a por la izquierda (por la derecha), si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ $(0 < x - a < \delta)$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$ y se representa por $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ $(\lim_{x\to a^+} f(x) = l)$.

Para que exista el límite de una función en un punto es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y que además ambos coincidan.

Límites infinitos

Definición

1. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si para cada $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ entonces $f(x) \geq K$.
2. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si para cada $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ entonces $f(x) \leq -K$.

Propiedades

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ con $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $-\infty$).
2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Límites en el infinito

Definición

1. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Se dice que $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a $+\infty$ y se representa por $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si $x > K$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.
2. Sea $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$. Se dice que $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a $-\infty$ y se representa por $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si $x < -K$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

Infinitésimos

Definición

Se llama infinitésimo cuando x tiende al punto a (donde a puede tomar valores infinitos) a toda función f que tenga límite cero en el punto a.

Proposición

Son equivalentes:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = l$;
2. La función $\psi(x) = f(x) - l$ es un infinitésimo.

Proposición

El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo.
Ejemplo: La función $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es un infinitésimo.
El cociente de un infinitésimo por una función que en valor absoluto se convserva mayor que una constante positiva, es un infinitésimo. ($\frac{0}{0}$ es una indeterminación).

Infinitos

Definición

Se llama infinito cuando x tiende al punto a (donde a puede tomar valores infinitos) a toda función $f(x)$ que tiende a ∞ cuando x tiende a a.

Propiedades

1. La suma de un infinito en el punto a con una cantidad finita de funciones acotadas en un entorno de a es un infinito. (La diferencia de dos infinitos puede tener límite distinto $\infty - \infty$ es una indeterminación).
2. El producto de un infinito por un número finito de funciones acotadas inferiormente en valor absoluto por un número positivo (no nulo), es un infinito ($0 \cdot \infty$ es una indeterminación).
3. El cociente de un infinito por una función acotada superiormente en valor absoluto es un infinito. ($\frac{\infty}{\infty}$ es una indeterminación).

Indeterminaciones

Indeterminaciones

$$\frac{0}{0} \qquad \infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

Principio de sustitución

Todo infinitésimo o infinito que sea factor o divisor de un límite de una función en un punto puede sustituirse por otro equivalente en dicho punto sin que se altere el valor de dicho límite.

Tabla de equivalencias

$\operatorname{sen}(x) \equiv x \quad (x \to 0)$	$\sinh(x) \equiv x \quad (x \to 0)$
$1 - \cos(x) \equiv \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$	$\cosh(x) - 1 \equiv \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$
$\tan(x) \equiv x \quad (x \to 0)$	$\tanh(x) \equiv x \quad (x \to 0)$
$\arcsin(x) \equiv x \quad (x \to 0)$	$\arctan(x) \equiv x \quad (x \to 0)$
$a^{-}1 \equiv x\log(a) \quad (x \to 0)$	$e^x - 1 \equiv x \quad (x \to 0)$
$\log(x+1) \equiv x \quad (x \to 0)$	$(1+x)^\alpha - 1 \equiv \alpha x \quad (x \to 0)$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv a_0 \quad (x \to 0)$	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv a_n x^n$
$\log(a_n x^n + \cdots + a_0) \equiv \log x^n \quad (x \to \infty)$	

A partir de las equivalencias y del principio de sustitución puede obtenerse la siguiente igualdad para resolver la indeterminación del tipo 1^∞.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$$

cuando $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Continuidad

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in I$. Diremos que f es continua en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ejemplos

1. Las funciones constantes son continuas.
2. La función identidad $f(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$.

Continuidad lateral

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

1. Se dice que la función f es continua por la derecha en $x = a$ si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
2. Se dice que la función f es continua por la izquierda en $x = a$ si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Ejemplo

La función $f(x) = E(x)$ es continua por la derecha en todos los puntos $x \in \mathbb{Z}$.

Discontinuidades

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Si existe $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $l \neq f(a)$ o bien no existe $f(a)$ se dice que $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en a.

Ejemplo

La función $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$ no está definida en $x = 2$, y por lo tanto no puede ser continua en 2, sin embargo $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, es decir, en $a = 2$ tenemos una discontinuidad evitable.

Discontinuidades II

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ presenta en $x = a$ una discontinuidad de primera especie o de salto si existen los límites laterales en el punto a pero éstos son distintos. Se llama salto en a a la diferencia entre ambos valores.

Ejemplo

La función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad de salto infinito.

Definición

Si no existe alguno de los límites laterales o no existen ambos, se dice que f presenta en $x = a$ una discontinuidad de segunda especie.

Ejemplo

La función $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$ presenta en $x = 0$ una discontinuidad de segunda especie.

Operaciones con funciones continuas

Proposición

Sean f y g dos funciones continuas en $x = a$. Entonces:

1. $f \pm g$ es continua en $x = a$.
2. $f \cdot g$ es continua en $x = a$.
3. Si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es continua en $x = a$.

Ejemplo

El polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es continuo para cada $x \in \mathbb{R}$.

Continuidad de la función compuesta

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, f continua en a y g continua en $g(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$.

Teorema de los valores intermedios

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y k un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe al menos un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = k$.

Teorema de Bolzano

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Weierstrass

Teorema

Toda función continua f definida en un intervalo I compacto está acotada superior e inferiormente y alcanza el máximo y el mínimo absoluto.

Teorema

La imagen por una función continua de un intervalo compacto es un intervalo compacto.

Homeomorfismo

Definición

Diremos que una función $f : A \to B$ es un homeomorfismo si la función es biyectiva, continua y la inversa es continua.

Continuidad de la función inversa

Si la función $f : A \to B$ es una biyección estrictamente monótona creciente o decreciente, entonces f es continua en I y f^{-1} es continua en J.

Ejemplo

La función logarítmica es continua por ser la inversa de la función exponencial. La función $\operatorname{sen}(x)$ en $[-\pi/2, \pi/2]$ es continua y estrictamente creciente, esta función tiene inversa $\arcsin(x) : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ que también es continua.

Definición de derivada de una función en un punto. Derivadas laterales

Definición:

Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y dado un punto $c \in (a, b)$, se define la *derivada de la función f* (resp. *derivada por la derecha, derivada por la izquierda*) en el punto c y se representa por $f'(c)$ (resp. $f'(c^+)$, $f'(c^-)$), como el límite (si existe):

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\left(\text{resp. } f'(c^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ f'(c^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

Estudiar si existe en $x = 1$ *la derivada de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x = 1 \\ 2x - 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1+h-1}{h} = 1$, es decir, $f'_{izq}(1) = 1$. $\lim_{x \to 0^+} \frac{(2(1+h)-1)-1}{h} = 2$, es decir $f'_{der}(1) = 2$.

Otra forma de definir si una función es derivable en un punto es la que sigue:

Proposición

Una función f es derivable en $x = a$ si y sólo si

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) + h \cdot \alpha(h),$$

con $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$.

En virtud de los teoremas de límites anteriormente introducidos es claro que una función será derivable en un punto si y sólo si, en dicho punto, es derivable por la derecha y por la izquierda y coinciden ambos valores. Por otro lado mostraremos gráficamente que la derivada de una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ en un punto $c \in (a,b)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

Relación entre derivabilidad y continuidad

Es conveniente dejar claro la relación entre continuidad y derivabilidad, resultado que recogemos en la siguiente proposición.

Proposición

Toda función derivable es continua.

Probar que no existe el límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

Ejercicio

Recta tangente y recta normal a una función en un punto

Proposición

1. A la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene como pendiente el número real $f'(a)$ se le llama recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La ecuación de la recta tangente es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

2. La recta perpendicular a la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ se llama recta normal a la curva en dicho punto. Por tanto, la ecuación de esta recta normal es

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a).$$

Función derivada. Derivadas sucesivas

Definición

Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se dice *derivable* si es derivable en cada uno de los puntos de su dominio.
Si f es una función derivable, podemos definir a partir de ella una nueva función que recibe el nombre de *función derivada*. Dicha función se denota por f' y su definición la siguiente:

$$\begin{array}{cccc} f': & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \to & f'(x). \end{array}$$

Si la función f' vuelve a ser derivable se puede definir la derivada segunda de f como la derivada de f' y así sucesivamente definiríamos f'', f''', $f^{(iv)}$, $f^{(v)}$, ...

Definición función de clase $\mathcal{C}^k$

Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se dice de *clase* $\mathcal{C}^k$ si y sólo si la función f es derivable k veces y la derivada k-ésima, $f^{(k)}$, es continua. El conjunto de las funciones de clase $\mathcal{C}^k$ definidas en el intervalo (a, b) se denota por $\mathcal{C}^k((a, b))$. Cuando $k = 0$, obtenemos el conjunto de las funciones continuas.

A continuación damos las propiedades de las derivadas con respecto a las operaciones entre funciones.

Álgebra de las funciones de clase $\mathcal{C}^k$

Sea k un número natural, entonces el conjunto $(\mathcal{C}^k(a,b),+,\cdot)$ tiene estructura de anillo conmutativo con elemento neutro para la multiplicación. Además, si $f,g\in\mathcal{C}^k((a,b))$ se tiene que:

1. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$,
2. $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Además, si f y g son dos funciones que admiten derivadas hasta el orden n, entonces se verifican:

1. $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$;
2. $(c\cdot f)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}$ para cada $c\in\mathbb{R}$.
3. $(f\cdot g)^{(n)}=\binom{n}{0}f^{(n)}\cdot g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}\cdot g'+\cdots\binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)}+\binom{n}{n}g^{(n)}$

Composición de funciones: Regla de la cadena

Con respecto a la composición de funciones, la regla de la cadena da la respuesta a cómo calcular la derivada de composiciones de funciones.

Regla de la cadena

Sean $f : (a, b) \to (c, d)$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real, sea $x_0 \in (a, b)$ tal que f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y la derivada se obtiene mediante la expresión

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Diferencial de una función en un punto

Se dirá que una función $f(x)$, definida en un entorno de a es diferenciable en a si $f(x)$ puede aproximarse, en un entorno de a, por una función afín, de ecuación

$$y - f(a) = A(x - a)$$

con $A \in \mathbb{R}$.

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ abierto, es diferenciable en $a \in I$ si verifica

$$f(x) - f(a) = (x - a)(A + \alpha_a(x))$$

para cada x perteneciente a cierto intervalo de a contenido en I y α_a es una función con $\lim_{x\to a} \alpha_a(x) = 0$.

Si en la anterior definición se toma $x = a + h$ se tendrá que f es diferenciable si y sólo si

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\epsilon_a(h),$$

con $\lim_{h\to 0} \epsilon_a(h) = 0$.

Definición

A la función lineal definida para cada valor de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ que asigna a cada $h \in \mathbb{R}$ el valor $A \cdot h$ se le llama diferencial de la función f en a y se denotará por df_a, es decir, $df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $df_a(h) = A \cdot h$.

Para una función $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $a \in I$ son equivalentes que la función f es diferenciable en a y el que la función sea derivable en a. Además si $df_a(h) = A \cdot h$, entonces $A = f'(a)$.

Extremos relativos

Definición de función creciente (decreciente)

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es creciente (decreciente) en $c \in (a, b)$ si existe $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos $x, y \in (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$ con $x < c < y$ se verifica $f(x) \leq f(c) \leq f(y)$ $(f(x) \geq f(c) \geq f(y))$.

Proposición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ creciente (decreciente) y derivable en $c \in (a, b)$. Entonces $f'(c) \geq 0$ $(f'(c) \leq 0)$.

Proposición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in (a, b)$, con $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) < 0$) entonces f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en c.

Extremos relativos y absolutos

Definición

Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (mínimo) relativo en $c \in (a, b)$ si existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$ y tal que $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$ para cada $x \in (c - \delta, c + \delta)$.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in (a, b)$. Si en c hay un extremo relativo entonces $f'(c) = 0$.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^3$ verifica que $f'(x) = 3x^2$ y $f'(0) = 0$ pero $c = 0$ no es un extremo relativo de la función.

Cálculo de máximos y mínimos relativos y absolutos

Dada una función f definida en un intervalo $[a, b]$ con valores reales sabemos por el teorema de Weierstrass que la función alcanza el máximo y mínimo absolutos.

Procedimiento para el cálculo de los extremos absolutos.

1. Hallar los puntos críticos de f en $[a, b]$ (es decir, aquellos en los que la derivada se anula) y evaluar f en dichos puntos.
2. Evaluar f en los extremos del intervalo (puntos a y b) y en aquellos puntos en los que la función no sea derivable.
3. Elegir, entre todos los puntos obtenidos, aquellos donde la función alcance los valores mayor y menor.

En el caso en el que el intervalo fuese abierto (a, b) no tenemos asegurada la existencia de los extremos absolutos, el procedimiento para calcularlos es similar sólo que en este caso calcularemos $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

Ejercicio:

Calcular los extremos de la función $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+2}$ en $\mathbb{R}$.

Teorema de Rolle

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle es importante a la hora de la búsqueda de raíces de funciones derivables, pues entre dos de ellas la derivada de la función a la que le buscamos las raíces se tiene que anular. Por otro lado, mostraremos con los siguientes ejemplos, que las hipótesis no se pueden debilitar.

Ejemplo

La función:

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } \ x = 1 \end{cases} \end{array}$$

no es continua en $[0,1]$, es derivable en $(0,1)$, $f(0) = f(1)$ y sin embargo $f'(x) = 1 \neq 0$ si $0 < x < 1$.

Ejemplo

La función:

$$\begin{array}{rccl} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & f(x) = |x| \end{array}$$

es continua en $[-1,1]$, no es derivable en $(-1,1)$ ya que no lo es en $x = 0$ y la derivada de f no se anula en ningún punto de $(-1,1) \setminus \{0\}$.

Teorema del valor medio de Lagrange (Teorema de los incrementos finitos)

Teorema de los incrementos finitos de Lagrange

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que se verifica

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como aplicación obtenemos la caracterización de las funciones constantes.

Proposición

Sea f una función definida y derivable en un intervalo (a, b) y tal que $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$ entonces $f(x) = K$ para cada $x \in (a, b)$ $(K \in \mathbb{R})$. Recíprocamente si f es una función constante entonces $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$.

Aplicación: Separación de raíces de una ecuación $f(x) = 0$

Separación de raíces

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en (a, b). Entonces:

1. Entre cada dos raíces de $f(x) = 0$ existe al menos una raíz de $f'(x) = 0$.
2. Entre dos raíces consecutivas de $f'(x) = 0$ existe a lo sumo una raíz de $f(x) = 0$.

Aplicación: Desigualdades

Usar el teorema de los incrementos finitos para probar la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Para $x = 0$ se tiene la igualdad $e^0 = 1 + 0$. Supongamos que $x > 0$, utilizando el teorema de los incrementos finitos de Lagrange en el intervalo $[0, x]$ sobre la función $f(x) = e^x$ tenemos que $f(x) - f(0) = f'(x)(x - 0)$, es decir, $e^x - 1 = e^c(x - 0) > x$ puesto que la función exponencial es estrictamente creciente. Así $e^x > x + 1$. De forma similar se demuestra el caso en el que $x < 0$.

Aplicación: Cálculos aproximados, acotación de valores

Calcular de forma aproximada el valor de $\sqrt{105}$

Consideramos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y el intervalo $[100, 105]$. Aplicamos el teorema de los incrementos finitos de Lagrange en dicho intervalo y obtenemos

$$f(105) - f(100) = \frac{1}{2\sqrt{c}}(105 - 100),$$

es decir,

$$\sqrt{105} - 10 = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot 5$$

Por otra parte la función $f(x)$ es creciente,
así $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$, y

$$\frac{5}{2 \cdot 11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2 \cdot 10}.$$

Se sigue entonces que $10{,}22 < \sqrt{105} < 10{,}25$.

Teorema de Darboux para la derivada

Teorema

Sea f una funcion derivable en un intervalo abierto J. Si $a, b \in J$, con $a < b$ y $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda$.

Para demostrar este teorema basta considerar la función $\phi : J \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = f(x) - \lambda x$ y demostrar que tiene un mínimo relativo en (a, b).

Teorema del valor medio de Cauchy

Teorema

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), siendo $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Para demostrar el resultado hay que considerar la función $F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ y utilizar el teorema de Rolle.

Esta regla permite, directamente o con ligeras modificaciones, calcular límites de indeterminaciones de los tipos $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0, $\infty - \infty$.

Regla de Bernoulli-L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo abierto que contiene a x_0. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

(resp. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$) y existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esta regla tiene un análogo cuando calculamos límites en $\pm\infty$, es el siguiente.

Regla de Bernoulli-L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en la semirrecta $(a, +\infty)$(resp. $(-\infty, a)$). Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \text{ o } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty$$

(resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$) y existe el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(resp. $\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$), entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}).$$

La regla de L'Hôpital no resuelve todas las indeterminaciones que se pueden presentar, por ejemplo, si se aplica L'Hôpital al límite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\mathrm{sen}^2(x)}{x^2\mathrm{sen}^2(x)}$ no desaparece la indeterminación, es más, el nuevo límite que aparece es más complicado que el primero y tampoco se resuelve por L'Hôpital. Por otro lado, es importante tener en cuenta que, a veces, existe el límite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y no el límite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, un ejemplo de este caso se obtiene tomando $f(x) = x^2\mathrm{sen}\frac{1}{x}$, $g(x) = \mathrm{sen}x$ y $x_0 = 0$.

Polinomio de Taylor de grado n

Abordaremos el problema de la aproximación de funciones reales por polinomios. La idea es la siguiente: dada una función real, por ejemplo $f(x) = e^x$, se conocen ciertos aspectos de dicha función como que es continua y derivable, su gráfica aproximada, etc.... Sin embargo, si queremos calcular el valor de $e^{1/2}$ nos encontramos con que no sabemos calcular dicho valor. Si la función pudiera sustituirse por un polinomio $P(x)$, y el error que se cometiera en dicha aproximación fuera pequeño, podríamos tomar $P(1/2)$ como un valor aproximado de $e^{1/2}$.
Esto puede hacerse de una manera local siempre que la función que estemos considerando cumpla ciertas condiciones de derivabilidad.

Fórmula de Taylor

Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k y $x_0 \in (a, b)$. Entonces:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(x - x_0),$$

donde $R_k(x - x_0)$ es el término del error que puede presentar diferentes formas y tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_k(x - x_0)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

Llamamos polinomio de Taylor de grado k a

$$P_{k-1,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{k)}(x_0)(x - x_0)$$

En el caso en el que $x_0 = 0$ a la fórmula de Taylor se le llama fórmula de McLaurin.

El error cometido en la aproximación también llamado resto, puede estimarse estudiando $R_k(x - x_0)$. La forma más usual de hacer esta estimación es usando la fórmula del resto de Lagrange:

$$R_k(x - x_0) = \frac{f^{k)}(c)}{k!}(x - x_0)^k$$

donde c es un número indeterminado que depende de cada valor x y pertenece al intervalo abierto $(x_0 - |x_0 - x|, x_0 + |x_0 - x|)$. Otra forma de expresar el término complementario o resto es la forma infinitésima:

$$R_k(x - x_0) = \alpha(x)(x - x_0)^k, \text{ donde } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Por ejemplo, en nuestro caso el polinomio de grado 3 de e^x es

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$P_3(1/2) = 1{,}8333$ valor aproximado de $e^{1/2}$ con un error

$$R_4(1/2) = \frac{1}{24} e^c \frac{1}{2^4}$$

donde $c \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Como $e^x \leq 2$ en $(-1/2, 1/2)$, una acotación del error será

$$E \leq |R_4(1/2)| \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{384} = 2{,}6042 \cdot 10^{-3}$$

Aplicaciones de la fórmula de Taylor

1. El cálculo de expresiones con una acotación del error.
2. Cálculo de límites.

Veamos algunos ejemplos de las aplicaciones.

Determinar el polinomio que aproxima a la función $f(x) = \text{sen}(x)$ con un error menor que 0.001 en el intervalo $[-2, 2]$.

El error viene determinado por el resto, así debemos calcular en este caso n tal que

$$|R_{n,0,x}| = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{n+1)}(c)x^{n+1}\right| \leq 0{,}001$$

Calculamos las derivadas de $f(x) = \text{sen}(x)$. $f'(x) = \cos(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = \text{sen}(x + \frac{2\pi}{2})$, $f'''(x) = \text{sen}(x + \frac{3\pi}{2})$, $f^{iv)}(x) = \text{sen}(x + \frac{4\pi}{2})$,..., así tenemos que $f^{n)} = \text{sen}(x + \frac{n\pi}{2})$. Acotamos el resto

$$\left|\frac{1}{(n+1)!} \text{sen}(c + \frac{(n+1)\pi}{2})\right| \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} 2^{n+1} \leq 0{,}001.$$

Esta desigualdad se verifica para $n = 10$. Así que tomaremos el polinomio de Taylor de grado nueve. Evaluamos la fórmula de Taylor y tenemos que

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Aplicación de la fórmula de Taylor al cálculo de límites

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)-\tan(x^3)}{x^9}$

Calculamos los desarrollos limitados de las funciones $\operatorname{sen}(x^3)$ y $\tan(x^3)$.

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\operatorname{sen}(x) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + o(x^9)$$

De forma análoga tenemos que

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\tan(x^3) = x^3 + \frac{x^9}{3} + o(x^9)$$

Sustituyendo en la expresión tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - \frac{x^9}{3!} + o(x^9) - x^3 - \frac{x^9}{3} - o(x^9)}{x^9} = -\frac{1}{2}.$$

El método de Newton

Método iterativo para el cálculo de raíces de funciones. La fórmula viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Interpolación

Definición

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la cual conocemos el valor de $n+1$ puntos $\{x_0, \ldots, x_n\}$, es decir, conocemos

$$\{f(x_0), \ldots, f(x_n)\},$$

entonces existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado a lo sumo n tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.
El polinomio $P_n(x)$ recibe el nombre de polinomio interpolador de f en los puntos x_i para $i = 0, \ldots, n$. La expresión de $P_n(x)$ viene dada por:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}}.$$

Además, si x es un número real arbitrario y la función f es derivable $n+1$ veces, se verifica que el error cometido en la aproximación, viene dado por

$$f(x) - P_n(x) = E_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

donde $c(x)$ es una función que toma valores en el intervalo (m, M), donde $m = \text{mín}\{x_i : \, i = 0, \ldots, n\}$ y $M = \text{máx}\{x_i : \, i = 0, \ldots, n\}$.

Representación gráfica de funciones

Elementos para la representación gráfica de funciones

1. Dominio de definición
2. Simetrías
3. Periodicidad
4. Puntos de corte con los ejes
5. Cálculo de asíntotas
6. Crecimiento y decrecimiento
7. Cálculo de extremos relativos
8. Concavidad y convexidad
9. Puntos de inflexión
10. Puntos donde la función no es continua o derivable

Cálculo de asíntotas

Asíntotas verticales

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ la recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

Asíntotas horizontales

Si $\lim_{x\to\infty} = \lambda \in \mathbb{R}$ la recta $y = \lambda$ es una asíntota horizontal. Análogo para el caso x tiende a $-\infty$.

Asíntotas oblicuas

Son de la forma $y = mx + n$ donde $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$ siendo $m \neq 0$, $m \neq \pm\infty$, $n \neq \pm\infty$. Análogo para caso cuando x tiende a $-\infty$.

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$

Concavidad y convexidad

Definición

Sea f una función derivable en un intervalo (a, b). Se dice que la función es *convexa* (*cóncava*) en dicho intervalo si su derivada es una función creciente (decreciente) en dicho intervalo.

Ejemplo

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2-9}$