Programación Lineal

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I

Introducción

La Programación Lineal (PL) es una de las principales ramas de la Investigación Operativa. En esta categoría se consideran todos aquellos modelos de optimización donde las funciones que lo componen, es decir, función objetivo y restricciones, son funciones lineales en las variables de decisión.

Los modelos de Programación Lineal por su sencillez son frecuentemente usados para abordar una gran variedad de problemas de naturaleza real en ingeniería y ciencias sociales, lo que ha permitido a empresas y organizaciones importantes beneficios y ahorros asociados a su utilización.

Un modelo de Programación Lineal (PL) considera que las variables de decisión tienen un comportamiento lineal, tanto en la función objetivo como restricciones del problema. En este sentido, la Programación Lineal es una de las herramientas más utilizadas en la Investigación Operativa debido a que por su naturaleza se facilitan los cálculos y en general permite una buena aproximación de la realidad.
Los Modelos Matemáticos se dividen básicamente en Modelos Determistas (MD) o Modelos Estocásticos (ME). En el primer caso (MD) se considera que los parámetros asociados al modelo son conocidos con certeza absoluta, a diferencia de los Modelos Estocásticos, donde la totalidad o un subconjunto de los parámetros tienen una distribución de probabilidad asociada. Los cursos introductorios a la Investigación Operativa generalmente se enfocan sólo en Modelos Determistas.

Simplex

El Método Simplex publicado por George Dantzig en 1947 consiste en un algoritmo iterativo que secuencialmente a través de iteraciones se va aproximando al óptimo del problema de Programación Lineal en caso de existir esta última.
La primera implementación computacional del Método Simplex es el año 1952 para un problema de 71 variables y 48 ecuaciones. Su resolución tarda 18 horas. Luego, en 1956, un código llamado RSLP1, implementado en un IBM con 4Kb en RAM, admite la resolución de modelos con 255 restricciones.
El Método Simplex hace uso de la propiedad de que la solución óptima de un problema de Programación Lineal se encuentra en un vértice o frontera del dominio de puntos factibles (esto último en casos muy especiales), por lo cual, la búsqueda secuencial del algoritmo se basa en la evaluación progresiva de estos vértices hasta encontrar el óptimo. Cabe destacar que para aplicar el Método Simplex a un modelo lineal, este debe estar en un formato especial conocido como formato estándar el cual definiremos a continuación.

Forma estándar de un modelo de programación lineal

Consideremos un modelo de Programación Lineal en su forma estandar, que denotaremos en lo que sigue por:

$$
\begin{array}{ll}
Max & c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n \\
sa & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\
 & \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\
 & x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } m \leq n
\end{array}
$$

Matricialmente escrito como:

$$
\begin{gathered}
Max \quad c^T x \\
s.a \quad Ax = b \\
x \geq 0
\end{gathered}
$$

1. Siempre es posible llevar un problema de maximización a uno de minimización. Si $f(x)$ es la función objetivo a maximizar y $x*$ es la solución óptima $f(x*) \geq f(x)$, para todo x factible. $-f(x*) \leq -f(x)$, para todo x factible. En consecuencia: $x*$ es también mínimo de $-f(x)$.
2. Cada restricción del tipo $\leq$ puede ser llevada a una ecuación de igualdad usando una (nueva) variable de holgura no negativa, con coeficiente nulo en la función objetivo.
3. Cada restricción del tipo $\geq$ puede ser llevada a una ecuación de igualdad usando una (nueva) variable de exceso no negativa, con coeficiente nulo en la función objetivo.

Ejemplo

Resolver el siguiente problema de Programación Lineal utilizando el Método Simplex:

$$\begin{array}{ll} Max & 40 \cdot X1 + 60 \cdot X2 \\ s.a. & 2 \cdot X1 + 1 \cdot X2 \leq 70 \\ & 1 \cdot X1 + 1 \cdot X2 \leq 40 \\ & 1 \cdot X1 + 3 \cdot X2 \leq 90 \\ & X1 \geq 0 X2 \geq 0 \end{array}$$

Para poder aplicar el Método Simplex, es necesario llevar el modelo a su formato estándar, para lo cual definimos $X3, X4, X5 \geq 0$ como las respectivas variables de holgura para la restricción 1, 2 y 3. De esta forma queda definida la tabla inicial del método de la siguiente forma:

$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$	
2	1	1	0	0	70
1	1	0	1	0	40
1	3	0	0	1	90
-40	-60	0	0	0	0

En esta situación, las variables de holgura definen una solución básica factible inicial, condición necesaria para la aplicación del método. Luego, se verifican los costos reducidos de las variables no básicas ($X1$ y $X2$ en la tabla inicial) y se escoge como variable que entra a la base aquella con el costo reducido "**más negativo**". En este caso, $X2$.
Luego, para escoger que variable básica deja la base debemos buscar el mínimo cociente entre el lado derecho y los coeficientes asociados a la variable entrante en cada fila (para aquellos coeficientes ¿ 0 marcados en rojo en la tabla anterior). El mínimo se alcanza en $\min\{70/1, 40/1, 90/3\} = 30$ asociado a la tercera fila, el cual corresponde a la variable básica actual $X5$, en consecuencia, $X5$ deja la base.

En la posición que se alcanza el mínimo cociente lo llamaremos "Pivote" (marcado con rojo) el cual nos servirá para realizar las respectivas operaciones por filas, logrando la siguiente tabla al cabo de una iteración:

$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$	
$5/3$	0	1	0	$-1/3$	40
$2/3$	0	0	1	$-1/3$	10
$1/3$	1	0	0	$1/3$	30
-20	0	0	0	20	1800

El valor de la función objetivo luego de una iteración ha pasado de 0 a 1800. Se recomienda al lector hacer una representación gráfica del problema y notar como las soluciones factibles del método corresponden a vértices del dominio de puntos factibles.
La actual tabla no corresponde a la solución óptima del problema debido a que existe una variable no básica con costo reducido negativo, por tanto $X1$ entra a la base. Posteriormente, mediante el criterio del mínimo cociente calculamos la variable que debe dejar la base:

$$\text{mín}\{40/(5/3), 10/(2/3), 30/(1/3)\} = 15,$$

asociado a la fila 2 (variable básica actual $X4$), por tanto $X4$ deja la base. Obtenido lo anterior se aplica una iteración del método:

$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$	
0	0	1	$-5/2$	$1/2$	15
1	0	0	$3/2$	$-1/2$	15
0	1	0	$-1/2$	$1/2$	25
0	0	0	30	10	2100

Finalmente se alcanza la solución óptima del problema y se verifica que los costos reducidos asociados a las variables no básicas ($X4$ y $X5$ son mayores o iguales que cero). Notése que la existencia de un costo reducido igual a cero para una variable no básica en esta etapa define un problema con "infinitas soluciones".

La solución alcanzada es $X1* = 15$, $X2* = 25$ con $V(P*) = 2100$.