Espacio Vectorial Euclídeo

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I

Los conceptos geométricos de longitud, distancia y perpendicularidad son bien conocidos para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Estos conceptos proporcionan herramientas geométricas potentes para resolver problemas aplicados incluidos los problemas de mínimos cuadrados.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, diremos que una operación $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto escalar si se verifican las siguientes condiciones.

1. $\langle\vec{v},\vec{v}'\rangle = \langle\vec{v}',\vec{v}\rangle$;
2. $\langle(\vec{v}+\vec{v}'),\vec{w}\rangle = \langle\vec{v},\vec{w}\rangle + \langle\vec{v}',w\rangle$;
3. $\langle\alpha\cdot\vec{v},\vec{v}'\rangle = \alpha\cdot\langle\vec{v},\vec{v}'\rangle = \langle\vec{v},\alpha\cdot\vec{v}'\rangle$;
4. $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle \geq 0$; *y*
5. $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = \vec{0}$.

para cada $\vec{v},\vec{v}',\vec{w} \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *y* $\vec{v}' = (v_1', v_2', v_3')$ *vectores en* $\mathbb{R}^3$*. Entonces la operación dada por:*

$$\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = v_1 \cdot v_1' + v_2 \cdot v_2' + v_3 \cdot v_3'$$

es un producto escalar.

Ejemplo

Sea $V = C([0,1])$*, es decir el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en el intervalo* $[0,1]$*. Entonces*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

es un producto escalar.

Matriz de Gram

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar y $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Dados dos vectores $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ con coordenadas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivamente en la base B, se tiene que:

$$\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{e}_i, \vec{v}' \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle.$$

Por tanto, conociendo los valores de los productos escalares de las distintas combinaciones entre vectores de la base es posible calcular el producto escalar de dos vectores cualesquiera.

Se llama matriz de Gram y se denota por $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a la matriz simétrica dada por

$$G = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

La matriz de Gram depende del producto escalar y de la base que estemos considerando en el espacio vectorial. Si consideramos otra base $B' = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}'_n\}$ en V, las coordenadas de $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ en la base B', $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ y $\beta'_1, \ldots, \beta'_n$ respectivamente vendrán dadas por

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = M_{B',B}(Id) \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix} = M_{B',B}(Id) \cdot \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \dots & \alpha'_n \end{pmatrix} \cdot M_{B,B'}(Id)^T.$$

Entonces el producto escalar de $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ queda de la forma

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \dots & \alpha'_n \end{pmatrix} \cdot M_{B,B'}(Id)^T \cdot G \cdot M_{B',B}(Id) \cdot \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así la matriz de Gram G' asociada a la base B' viene dada por

$$G' = M_{B',B}(Id)^T \cdot G \cdot M_{B',B}(Id).$$

Norma de un vector

Definición

Sea V un espacio vectorial y $\vec{v} \in V$. Llamamos norma de $\vec{v}$ y la denotamos por $\|\vec{v}\|$ a la expresión

$$\|\vec{v}\| = +\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

La expresión está bien definida puesto que lo que aparece dentro de la raíz es siempre mayor o igual que cero.

Propiedades de la norma:

1. $\|\vec{v}\| > 0$ para cada $\vec{v} \neq \vec{0}$; además $\|\vec{0}\| = 0$.
2. $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$.
3. $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = 2(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2)$.
4. $|\langle\vec{v},\vec{w}\rangle| \leq \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$ **(desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.
5. $\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

para cada $\vec{v},\vec{w} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

La norma se puede definir, sin necesidad de recurrir a un producto escalar. Para ello, se toman como punto de partida aquellas propiedades que son propias de la norma, es decir, en las que no interviene el producto escalar. Así, damos la definición que sigue.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Diremos que V es un espacio vectorial normado si existe una norma, entendiendo como norma la aplicación

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

verificando las siguientes condiciones:

1. $\|\vec{v}\| > 0$ *para cada* $\vec{v} \neq \vec{0}$, *además* $\|\vec{0}\| = 0$.
2. $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$.
3. $\|\vec{v} + \vec{v}'\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{v}'\|$.

para cada $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Evidentemente, todo espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial normado. El recíproco no se verifica en general.

Definición

En un espacio vectorial euclídeo V, se llama distancia del vector $\vec{v}$ al vector $\vec{v}'$ al número real

$$d(\vec{v}, \vec{v}') := \|\vec{v}' - \vec{v}\|.$$

Propiedades:

1. $d(\vec{v}, \vec{v}') > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{v}'$, y $d(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.
2. $d(\vec{v}, \vec{v}') = d(\vec{v}', \vec{v})$.
3. $d(\vec{v}, \vec{v}') \leq d(\vec{v}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v}')$ **(desigualdad triangular)**.

Definición

Sean $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ dos vectores no nulos de un espacio vectorial euclídeo V. El ángulo que forma el vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ con el vector $\vec{v}' \neq \vec{0}$, denotado como $ang(\vec{v}, \vec{v}')$ queda caracterizado por su coseno, cuyo valor es:

$$\cos(ang(\vec{v}, \vec{v}')) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}'\|}.$$

Ortogonalidad y ortonormalidad

Definición

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ no nulos se dice que son ortogonales si $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 0$. Lo denotamos como $\vec{v} \perp \vec{v}'$.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Diremos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de V es ortonormal en V si

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \tag{1}$$

para cada $i \neq j$, y

$$\|\vec{v}_i\| = \sqrt{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} = 1. \tag{2}$$

Si sólo se cumple la condición (1) se dice que el conjunto es ortogonal.

Teorema (Pitágoras)

Dados $\vec{v}$ y $\vec{v'}$ vectores de V no nulos tales que $\vec{v} \perp \vec{v}'$, entonces

$$\|\vec{v} + \vec{v}'\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}'\|^2.$$

En general, si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un sistema ortogonal de vectores se verifica la igualdad:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{v}_i\|^2.$$

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

En un sistema ortogonal la matriz de Gram asociada al producto escalar es una matriz diagonal, ya que las únicas entradas no nulas son las de la diagonal. Así, el cálculo del producto escalar se simplifica. En el caso de que el sistema sea ortonormal la matriz de Gram es la matriz identidad.
El objetivo del método de ortonormalización de Gram-Schmidt es obtener a partir de un sistema libre $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ un sistema ortonormal $S' = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de forma que $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$. El proceso es el siguiente:

1. Definimos $\vec{e}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$ que es unitario.
2. Calculamos $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1$. El vector $\vec{w}_2$ es ortogonal a $\vec{e}_1$, ya que

$$\langle \vec{w}_2, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle - \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 0,$$

   y definimos $\vec{e}_2 := \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$.
3. Para $j = 2, \ldots, n$ se calcula el vector

$$\vec{w}_j = \vec{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \vec{v}_j, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

   que es ortogonal a $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{j-1}$. A continuación se toma $\vec{e}_j = \frac{\vec{w}_j}{\|\vec{w}_j\|}$.

Observar que el espacio generado por la familia $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es el mismo que el generado por el sistema inicial ya que se han ido construyendo como combinación lineal de vectores de S, como además el sistema S' es libre, entonces el espacio generado por ambos sistemas es el mismo.

Subespacios ortogonales

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo. Un vector $\vec{v}$ se dice que es *ortogonal a un conjunto de vectores* $S \subset V$ si $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ para cada $\vec{w} \in S$. En el caso de subespacios, para que un vector sea ortogonal a todo el subespacio basta con que lo sea respecto de una base.
Dos subespacios vectoriales $W, W' \subset V$ se dice que son ortogonales si para cada $\vec{w} \in W$ y $\vec{w}' \in W$, $\langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle = 0$. Una condición necesaria y suficiente para que W y W' sean ortogonales es que existan $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ y $B' = \{\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_s\}$ bases de W y W' respectivamente de forma que $\langle \vec{v}_i, \vec{v}'_j \rangle = 0$ para cada $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$.

Definición

Dada $W \subset V$, se define el conjunto el subespacio ortogonal, $W^{\perp}$, como el de los vectores ortogonales a W:

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \text{ para cada } \vec{w} \in W\}.$$

Propiedades

1. $W \cap W^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$.
2. $W = W^{\perp\perp}$.
3. $V^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$ y $\left\{\vec{0}\right\} = V$.

Sea $W \subset V$ un subespacio de V y $B_W = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ una base ortonormal del subespacio, podemos construir una base de V, $B_V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ ortonormal, basta para ello ampliar B_W a una base de V y ortonormalizar por el método de Gram-Schmidt. Así,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i.$$

Sea el vector $\vec{w} = \vec{v} - \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$. Entonces para cada $j = 1, \ldots, r$ tenemos que

$$\langle \vec{w}, \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}_j \rangle - \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \cdot \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0.$$

Así $\vec{w} \in W^\perp$ y el vector $\vec{v}$ se expresa como suma de dos vectores $\vec{v} = \vec{w} + \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}$, donde $\vec{w} \in W^\perp$ y $\sum_{i=1}^{r} \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i \in W$. De esta forma tenemos que

1. $V = W \oplus W^\perp$.
2. $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$.

Proyección ortogonal sobre un subespacio

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ hemos visto que para cada subespacio $W \subset V$ tenemos que

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Es decir, cada vector $\vec{v} \in V$ se expresa de forma única como suma de un vector de W y otro de $W^{\perp}$.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $W \subset V$ y $\vec{v} \in V$. Llamamos proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W al vector $P_W(\vec{v}) \in W$ tal que $\vec{v} - P_W(\vec{v}) \in W^{\perp}$.

Destacamos entre las propiedades de la proyección ortogonal el que

$$d(\vec{v}, W) = \text{ínf}\,\{\|\vec{v}-\vec{w}\| : \vec{w} \in W\} = \|\vec{v} - P_W(\vec{v})\|.$$

Demostración.

$$\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}-P_W(\vec{v})\|^2+\|P_W(\vec{v})-\vec{w}\|^2+2\langle\vec{v}-P_W(\vec{v}),\vec{w}-P_W(\vec{v})\rangle = \|\vec{v}-P$$

puesto que $\vec{v} - P_W(\vec{v}) \in W^{\perp}$ y $\vec{w} - P_W(\vec{v}) \in W$. Por tanto

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| \geq \|\vec{v} - P_W(\vec{v})\|,$$

para cada $\vec{w} \in W$. □

Homotecias

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Diremos que una aplicación lineal $T : V \to V$ es una *homotecia* de razón $\alpha \in \mathbb{R}$ si $T(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\vec{v} \in V$. La matriz asociada a T en la base B de T vendrá dada por

$$M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot I_n.$$

Proyecciones

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales de V de forma que $W_1 \oplus W_2 = V$. Diremos que $T : V \to V$ es una proyección de base W_1 y dirección W_2 si se verifica que $T(\vec{v}_2) = \vec{0}$ para cada $\vec{v}_2 \in W_2$ y $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ para cada $\vec{v}_1 \in W_1$. Si $W_1^{\perp} = W_2$ la proyección es la ortogonal.

Simetrías

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales de V de forma que $W_1 \oplus W_2 = V$. Diremos que $T : V \to V$ es una *simetría* de base W_1 y dirección W_2 si se verifica que $T(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$ para cada $\vec{v} \in W_2$ y $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ para cada $\vec{v}_1 \in W_1$.

Rotaciones en el plano

Las rotaciones en el plano también son aplicaciones lineales. Veamos cómo deducir las ecuaciones de las rotaciones.
Si el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas (x, y) el vector rotado tiene coordenadas $(x', y') = (\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\alpha + \beta), \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\alpha + \beta))$, donde β es el ángulo del vector $\vec{v}$ con el eje de las x. Utilizando las fórmulas de coseno de una suma y seno de una suma obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\alpha + \beta) &= \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ &= x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} \sin(\alpha + \beta) &= \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ &= x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Y la matriz asociada a la rotación viene dada por

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Sea V un espacio vectorial euclídeo, un endomorfismo $f : V \to V$ se dice **simétrico** si verifica

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle; \qquad \forall u, v \in V.$$

Una matriz **simétrica** es una matriz A tal que $A^t = A$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo y sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sea A la matriz asociada a f respecto de una base ortonormal de V. Entonces f es un endomorfismo simétrico si, y sólo si, A es una matriz simétrica.

Proposición

Si $f : V \to V$ es un endomorfismo simétrico, entonces todos los valores propios de f son reales.

Teorema

Toda matriz simétrica real es diagonalizable en $\mathbb{R}$

Proposición

Si λ y μ son valores propios distintos de un endomorfismo simétrico y $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores asociados a λ y μ respectivamente, entonces $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

Demostración:

$$\langle f(\vec{v}), \vec{w})\rangle = \langle \lambda\vec{v}, \vec{w}\rangle = \lambda\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle.$$

$$\langle \vec{v}, f(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, \mu\vec{w}\rangle = \mu\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle.$$

Puesto que f es un endomorfismo ambas igualdades son a su vez iguales y así:

$$(\lambda - \mu)\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0,$$

ahora $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$ por ser los valores propios distintos y la demostración acaba.

Teorema

Si A es una matriz simétrica real, entonces existe una una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal tales que

$$D = P^t A P.$$

Los primeros pasos en la teoría de operadores lineales y en la introducción de productos escalares se deben a Erhard Schmidt (1876-1959) en 1907, aunque se encuentran antecedentes en los trabajos de David Hilbert sobre las ecuaciones integrales. Schmidt introdujo el concepto de norma, de producto escalar y de ortogonalidad y demostró una generalización del teorema de Pitágoras y del hecho de que vectores ortogonales dos a dos son linealmente independientes.
Schmidt desarrolló la teoría utilizando métodos introducidos por Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), quien demostró en particular la desigualdad que lleva su nombre.