Diagonalización de matrices

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de la matriz A si existe un vector columna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ de forma que

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x},$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es un vector verificando la relación $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$, se dice que $\vec{x}$ es un **vector propio** asociado al valor propio λ. El conjunto de todos los vectores propios asociados a λ se denota por V_λ y recibe el nombre de subespacio de los vectores propios asociados a λ.

$$V_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \ A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}\}$$

es un **subespacio vectorial**.

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Dados* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *dos valores propios distintos, se verifica:*

1. $V_\lambda \cap V_\mu = \left\{\vec{0}\right\}$,
2. $dim(V_\lambda + V_\mu) = dim(V_\lambda) + dim(V_\mu)$.

Proposición

Sean A una matriz cuadrada sobre cuerpo de los números reales, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio con $\vec{x} \in V_\lambda$. Entonces:

1. *Para cada $r \in \mathbb{N}$, λ^r es valor propio de A^r y $\vec{x}$ es un vector propio asociado.*
2. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha\lambda$ es un valor propio de αA con $\vec{x} \in V_{\alpha\lambda}$.*
3. *Si $|A| \neq 0$, entonces $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1} y $\vec{x}$ es un vector propio asociado.*

El polinomio característico

Dada A una matriz cuadrada de orden n sobre $\mathbb{R}$, para que $\lambda \in \mathbb{R}$ sea un valor propio debe existir $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ de forma que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, y esto ocurre, si y sólo si, $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Lo cual, en términos de sistemas de ecuaciones indica que el sistema homogéneo asociado a la matriz $(A - \lambda I_n)$ tiene una solución diferente de la nula y por ello es compatible indeterminado. Por lo tanto, el rango de $(A - \lambda I_n)$ es menor que n si y sólo si $|A - \lambda I_n| = 0$. Es decir $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si y sólo si $|A - \lambda I_n| = 0$. De esta forma surge de forma natural la noción de polinomio característico.

Definición

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se llama polinomio característico de A al polinomio de grado n y coeficientes reales definido por:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_n|.$$

Al conjunto de las raíces del polinomio se denota por $\sigma(A)$ y se denomina espectro de la matriz A.

Definición

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se dice que $\lambda \in \sigma(A)$ es un:

1. *Valor propio simple de A si es una raíz simple del polinomio característico.*
2. *Valor propio de multiplicidad $m(\lambda) \in \mathbb{N}$, $(1 \leq m(\lambda) \leq n)$ si es una raíz de multiplicidad $m(\lambda)$ del polinomio característico.*

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un valor propio de multiplicidad* $m(\lambda)$, *se verifican:*

- $1 \leq dim(V_\lambda) \leq m(\lambda)$
- $dim(V_\lambda) = n - rg(A - \lambda I_n)$.

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se dice que es diagonalizable si existe una matriz regular $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de forma que

$$D = T^{-1} \cdot A \cdot T,$$

siendo $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonal. La matriz T se denomina matriz de paso.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable, entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

El recíproco de este resultado no es cierto en general, veamoslo con un ejemplo.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *El espectro de esta matriz viene dado por* $\sigma(A) = \{1\} \subset \mathbb{R}$, *sin embargo la matriz* A *no es diagonalizable.*

Demostración.

Supongamos que existe $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$. La matriz inversa de P vendrá dada por $P^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Si suponemos que la matriz A es diagonalizable entonces

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad + ac + bc & a^2 \\ -c^2 & -bc + ac + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Para que la matriz sea diagonal a^2 y $-c^2$ han de ser cero, es decir, $a = 0$ y $c = 0$, lo cual es absurdo, ya que en ese caso la matriz P tendría determinante igual a cero y por tanto no podríamos construir su inversa. □

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A es diagonalizable si, y solamente si, todas las raíces del polinomio característico son reales, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, y además la dimensión del subespacio de los vectores propios asociados a cada valor propio coincide con la multiplicidad de dicho valor propio, es decir,

$$dim(V_\lambda) = m(\lambda),$$

para cada $\lambda \in \sigma(A)$.

En particular:

- *Si el polinomio característico tiene n raíces distintas, entonces A es diagonalizable.*
- *Si A es simétrica ($A = A^t$), entonces A es diagonalizable.*
- *La matriz A es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios. Dicha base se consigue tomando bases en cada uno de los subespacios propios siendo T la matriz de cambio de base de dicha base a la base canónica.*

Cálculo de las matrices diagonal y de paso

Sea $A \in \mathcal{M}_(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden n, para ver si es diagonalizable, y en su caso obtener la matriz diagonal seguiremos las siguientes etapas:

1. Calcular el polinomio característico y obtener sus raíces. Si alguna de ellas fuera compleja entonces la matriz A no sería diagonalizable.
2. Si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ para $\lambda \in \sigma(A)$ calculamos la dimensión del subespacio vectorial asociado a cada valor propio, $dim(V_\lambda)$. Si para algún $\lambda \in \sigma(A)$ se tiene que $dim V_\lambda < m(\lambda)$ entonces A no es diagonalizable.
3. Si por el contrario, $dim(V_\lambda) = m(\lambda)$, para cada $\lambda \in \sigma(A)$ entonces la matriz A es diagonalizable y,
   - La matriz diagonal, D, es la matriz formada con los valores propios en la diagonal principal, repetidos tantas veces como multiplicidad tengan.
   - La matriz de paso, T, se construye colocando en **columnas** los vectores de las bases de vectores propios en el orden en el que aparezcan los valores propios en D.

Veamos una aplicación práctica de lo anterior.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En primer lugar calculamos el polinomio característico.

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

2. Las raíces del polinomio característico son: $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad igual a 1 y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad igual a 2.

3. Calculamos ahora la dimensión de los subespacios asociados a cada valor propio:

$$V_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_3 = 0, \, x_2 = 0\right\}, \, dim(V_1) = 1$$

$$V_3 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - 2x_3 = 0\right\}, \, dim(V_3) = 2.$$

Luego A es diagonalizable, ya que las dimensiones de los subespacios coincide con la multiplicidad de los valores propios.

4. Para hallar la matriz diagonal y la matriz de paso basta obtener una base de V_1 y V_3.

$$\mathcal{B}_{V_1} = \{(1,0,1)\},$$

$$\mathcal{B}_{V_3} = \{(2,0,1),(0,1,0)\}.$$

Entonces,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

La diagonalización de matrices tiene multitud de aplicaciones para la resolución de problemas de la vida diaria.

Ejemplo

En una ciudad el 80 % de la gente que trabaja una año mantiene el trabajo al año siguiente y el 40 % de los que no lo tienen lo encuentran al año siguiente. suponiendo que inicialmente un millón de personas tienen trabajo y 200.000 no, deducir cuántas personas trabajarían a largo plazo.

Solución:

u_n=Trabajar un determinado año.

v_n=No trabajar.

Las ecuaciones vendrán dadas de forma recurrente por el sistema:

$$\begin{array}{l} u_n = 80/100 u_{n-1} + 40/100 v_{n-1} \\ v_n = 20/100 u_{n-1} + 60/100 v_{n-1} \end{array},$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{array}{l} u_n = 4/5 u_{n-1} + 2/5 v_{n-1} \\ v_n = 1/5 u_{n-1} + 3/5 v_{n-1} \end{array}$$

La expresión matricial del sistema vendrá dado por:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}}_{T_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}}_{T_{n-1}}$$

En general,

$$T_n = A^n \cdot T_0.$$

La matriz A es diagonalizable. $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix}$.
$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$, de manera que

$$A^n = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos que

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 1/3 \cdot (2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5) = 800{,}000$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 1/3 \cdot (10^6 + 2 \cdot 10^5) = 400{,}000$$

La población activa se estabilizaría en 800.000 personas mientras que la población en paro tendería a la cifra de 400.000 personas.

Nota

Observar que cuando estudiábamos las aplicaciones lineales, de un espacio vectorial V en otro V' (ambos de dimensión finita), vimos que, dada una tal aplicación $T : V \to V'$, la matriz asociada a la aplicación variaba en fun ción de las bases que se consideraran en los espacios vectoriales. En el caso en el que $V' = V$, la aplicación $T : V \to V$ es un endomorfismo y llamando A a la matriz de T en cierta base de V, vamos a estudiar si al cambiar de base se puede conseguir una matriz D de T que sea **diagonal** (en este caso, A' es semejante a A; esto es, $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, donde P es la matriz de cambio de coordenadas). Se llaman endomorfismos diagonalizables aquellos cuya matriz lineal asociada es diagonalizable, en este sentido hay un paralelismo y los conceptos estudiados para el caso de las matrices se pueden definir en el marco de las aplicaciones lineales.