Aplicaciones lineales

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I

Contenidos

Definición de aplicación lineal

Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Una función $f : V \to W$ se dice que es una **aplicación lineal** (o un **homomorfismo**) si cumple las dos siguientes propiedades:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para todo par de vectores $u, v \in V$.
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para todo vector $u \in V$ y todo escalar $\alpha \in K$.

Propiedades

1. Una aplicación $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales es lineal $\Leftrightarrow$ $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, para todo par de vectores $u, v \in V$ y todo par de escalares $\alpha, \beta \in K$ (esto significa que f transforma cualquier CL de dos vectores de V en la correspondiente CL de las imágenes de esos vectores en W) $\Leftrightarrow$ f transforma CL de cualquier número finito de vectores de V en la correspondiente CL de las imágenes de esos vectores en W.

Supongamos que $f : V \to W$ es lineal. Entonces:

1. $f(0_V) = 0_W$.
2. $f(-u) = -f(u)$, para todo vector $u \in V$.
3. para todo subespacio $V' \leq V \quad f(V') \leq W$.
4. $f^{-1}(W') \leq V$, para todo subespacio $W' \leq W$.

Ejemplos

1. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2x, 0, -x + 5y)$ es lineal.
Cuando tengamos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a la expresión de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ como CL de las coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$ la denominaremos **expresión analítica** de f. Así en el ejemplo anterir la expresión analítica de f es $f(x, y) = (2x, 0, -x + 5y)$.

2. En el espacio vectorial de las funciones reales de variable real: $F[\mathbb{R}] = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ la aplicación derivada $\frac{d}{dx} : F[\mathbb{R}] \to F[\mathbb{R}]$ es una aplicación lineal.
(la aplicación integral es una aplicación lineal)
3. En el espacio geométrico real tridimensional, la rotación alrededor de un eje, la proyección sobre un plano, la simetría, son ejemplos de aplicaciones lineales.

Teorema de existencia y unicidad de aplicaciones lineales

Teorema

Dados dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo K; una base $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ de V y un sistema de vectores $u_1, u_2, ..., u_n$ de W. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(e_i) = u_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Esta aplicación lineal está definida del siguiente modo: dado un vector $v \in V$ tomamos sus coordenadas $v_B = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en la base de V, y definimos $f(v) = x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n$.

Matriz de una aplicación

Sean : V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ aplicación lineal

Sean: $B_v = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ una base de V , y $B_w = \{w_1, w_2, .., w_m\}$, una base de W, $(\to dim(V) = n$ y $dim(W) = m)$

$\to \forall e_i \in B_v \qquad f(e_i) = u_i \in W \to f(e_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{mi}w_m$

$$(f(e_1))_{B_w} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_w \quad (f(e_2))_{B_w} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}_w \quad ...(f(e_n))_{Bw} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}_w$$

$\forall x \in V \ , \exists x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K} \ / \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$
y $\quad f(x) = y \in W$

$\rightarrow f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n) =$ (por ser f lineal)
$= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_n f(e_n)$

$$\rightarrow (f(x))_{B_w} = x_1 \left(f(e_1)\right)_{B_w} + x_2 \left(f(e_2)\right)_{B_w} + ... + x_n \left(f(e_n)\right)_{B_w}$$

$$\rightarrow (f(x))_{B_w} = \left((f(e_1))_{B_w}, (f(e_2))_{B_w}, ..., (f(e_n))_{B_w} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(x)_{Bv}$$

$$A = \left((f(e_1))_{B_w}, (f(e_2))_{B_w}, ..., (f(e_n))_{B_w} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición

Llamaremos **matriz asociada a f respecto de B_v y B_w** a la matriz $A \in M_{mxn}(\mathbb{K})$, cuyas columnas son $(f(e_1))_{B_w}, (f(e_2))_{B_w}, ..., (f(e_n))_{B_w}$, es decir, las coordenadas en B_w de las imágenes de los vectores de B_v. Denotaremos a esta matriz por $M(f)_{B_v B_W} = M_{B_v B_W}(f)$, y nos va a servir para tener determinada f en coordenadas respecto de las bases.

Al multiplicar las coordenadas del vector x en la base B_v por la matriz A obtenemos las coordenadas del vector $y = f(x)$ en la base $B_w \rightarrow \boxed{A = M(f)_{B_v B_W}}$ y $f(x) = y \leftrightarrow \boxed{A(x)_{B_v} = (y)_{B_w}}$ (1)

Observaciones

Si $V = W$ y $B = B_v = B_w$, puede utilizarse la notación $M_B(f)$ para designar a $M_{BB}(f)$.

A la aplicación definida por $I(v) = v$, para todo $v \in V$, tiene asociada en una misma base $B = B_v = B_w$ la matriz unidad y la llamaremos aplicación **identidad** (también se denota por $I_V, 1$ o 1_V)

Si $V = W$ y $f = 1_V$ y tenemos dos bases B y B' de V, entonces se tiene que $\forall x \in V \quad 1_V(x) = x \quad M_{BB'}(1_V)\cdot(x)_B = (x)_{B'} \rightarrow M_{BB'}(1_V) = C_{BB'}$, con lo que vemos que la matriz cambio de base entre dos bases de un espacio vectorial V puede obtenerse como un caso particular de matriz asociada a la aplicación identidad.

Ejemplos

1. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2x, 0, -x+5y)$. Su matriz asociada en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ es : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. La matriz de la aplicación $\frac{d^2}{dx^2} : \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \to \mathbb{P}_1[\mathbb{R}]$ (a cada polinomio de grado menor o igual que tres le hace corresponder su derivada segunda que es un polinomio de grado menor o igual que uno), es:
$D_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, en las bases de $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ $\{1, x, x^2, x^3\}$ y de $\mathbb{P}_1[\mathbb{R}]$, $\{1, x\}$

Continuación

3. En el espacio geométrico real tridimensional la matriz de giro alrededor del eje z de amplitud α es:

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Sea A la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

a) Obten las imágenes de los vectores de la base canónica, $f(1,0,1)$ y la expresión analítica de f.

b)Discutir según los valores de a y b si existen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que: $f(x,y,z) = (1,b,1)$.

El núcleo de una aplicación

Definición

Supongamos que $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W. Se llama **núcleo** de f al siguiente conjunto de vectores de V

$$\ker f = \{v \in V | f(v) = 0\}.$$

Es decir, si B es una base de V y B' una base de W .$\ker f = \{v \in V \mid M(f)_{BB'} \cdot (v)_B = 0\}$,

Propiedad: Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entonces $\ker f \leq V$
El núcleo es el subconjunto de los vectores de V que son solución del sistema homogéneo

$$M(f)_{BB'} \cdot (v)_B = 0,$$

por lo tanto es un subespacio vectorial de V y si $\boxed{dim(V) = n}$ (tendremos n coordenadas que serán las incógnitas y el grado de indeterminación del sistema homogéneo es la dimensión del núcleo)

$\boxed{\dim \ker f = n - rang(M(f)_{BB'})}$ (I)

Subespacio Imagen

Definición

Se llama **imagen** de f al siguiente conjunto de vectores de W

$$\mathrm{Im} f = \{w \in W | \exists v \in V \text{ cumpliendo que } f(v) = w\} = \{f(v) | v \in V\},$$

es decir, es la imagen como aplicación.

Propiedades

1. Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entonces $\mathrm{Im} f \leq W$.
   Sea $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ una base de V entonces $\forall v \in V$
   $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ y

   $f(v) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n) =$ (por ser lineal)
   $= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_n f(e_n)$

2. $\boxed{\mathrm{Im} f =< f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n) >}$
3. En general, si $v_1, ..., v_k$ son vectores que generan V entonces $f(v_1), ..., f(v_k)$ generan $\mathrm{Im} f$.
4. El rango de la matriz asociada coincide con la dimensión de la imagen, sean cuales sean las dos bases elegidas. Ya que las columnas de la matriz $M(f)_{BB'}$ son un conjunto de vectores generador $\mathrm{Im} f$ (puestos en coordenadas respecto de la base B')
   $\boxed{\dim \mathrm{Im} f = rang(M(f)_{BB'})}$ (II)

En la práctica el núcleo de una aplicación lineal se halla usualmente mediante ecuaciones implícitas, y la imagen mediante un conjunto generador.

Propiedad: Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W, entonces se cumple que (de (I) y (II)):

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V.$$

Tipos

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W, diremos que f es:

1. **Monomorfismo**, si f es una aplicación inyectiva, es decir, si no hay vectores distintos de V con la misma imagen.
2. **Epimorfismo**, si f es una aplicación suprayectiva, es decir, si $\mathrm{Im} f = W$.
3. **Isomorfismo**, si f es una aplicación biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.
4. **Endomorfismo**, si $V = W$, es decir, si el espacio inicial y el espacio final son el mismo.
5. **Automorfismo**, si f es un isomorfismo y un endomorfismo a la vez.

Llamaremos clasificar la aplicación lineal f a decir si f es, o no es, de alguno de estos tipos .

Propiedades

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.

1. f es un monomorfismo si y sólo si $\ker f = \{0\}$. ($\leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim V$ $\leftrightarrow rang(M(f)_{mxn}) = n$)
2. f es un epimorfismo si y sólo si $\dim \mathrm{Im} f = \dim W$. $\leftrightarrow rang(M(f)_{mxn}) = m$
3. f es un isomorfismo si y sólo si $\dim \mathrm{Im} f = \dim W = \dim V$. $\leftrightarrow m = n = rang(M(f)_{mxn})$
4. Si $v_1, ..., v_k$ son vectores LD de V entonces $f(v_1), ..., f(v_k)$ son vectores LD de W.
5. f es un monomorfismo si y sólo si para todo sistema de vectores LI $v_1, ..., v_k$ de V se tiene que $f(v_1), ..., f(v_k)$ son vectores LI de W.

Continuación

Supongamos que tenemos bases B y B' de dos espacios vectoriales V y W, respectivamente. Entonces: Para una aplicación lineal $f : V \to W$ se tiene que $M_{BB'}(f)$ **es invertible si y sólo si** f **es un isomorfismo**. Ya que $M_{BB'}(f)$ es invertible si y sólo si, es cuadrada: $\dim V = \dim W$ y su rango es n: $rang(M_{BB'}(f)) = \dim V$, y es decir: $\dim V = \dim W = \dim \mathrm{Im} f$, lo que significa que f es un monomorfismo, y un isomorfismo.

Ejemplos

1) En el ejemplo anterior teníamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (2x, 0, -x+5y)$. Vamos a hallar el núcleo y la imagen de esta aplicación.
2) Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida por: $f(1,0,0,0,0) = (2,0,0,5)$, $f(0,1,0,0,0) = (0,0,0,0)$, $f(0,0,1,0,0) = (0,3,0,0)$, $f(0,0,0,1,0) = (-1,0,0,0)$, $f(0,0,0,0,1) = (0,0,0,1)$.

Suma.

Supongamos que tenemos dos aplicaciones lineales $f : V \to W$ y $g : V \to W$. Se define la aplicación suma de f y g como la aplicación $f + g : V \to W$ dada por $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$, para cada $v \in V$. Además se cumple que $f + g$ es de nuevo una aplicación lineal. (Observemos que sólo tiene sentido sumar dos aplicaciones lineales que tengan el mismo dominio y el mismo codominio.)

Multiplicación por un escalar

Dada una aplicación lineal $f : V \to W$ y un escalar $\alpha \in K$ se define la aplicación lineal producto $\alpha f : V \to W$ por $(\alpha f)(v) = \alpha \cdot f(v)$. Además se cumple que αf es una aplicación lineal.

Estas dos operaciones dotan de estructura de espacio vectorial al conjunto de las aplicaciones lineales de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W, al que denotaremos por $L(V, W)$ o $Hom(V, W)$. En este espacio vectorial el cero es la aplicación nula $0 : V \to W$, definida para cada $v \in V$ por $0(v) = 0$.

Supongamos que tenemos bases B y B' de dos espacios vectoriales V y W, respectivamente. Entonces: Si tenemos aplicaciones lineales $f, g : V \to W$ y escalares $\alpha, \beta \in K$. :

$$M_{BB'}(\alpha f + \beta g) = \alpha M_{BB'}(f) + \beta M_{BB'}(g).$$

$M_{B_v B_W}(0) = 0$, así, la matriz asociada a la aplicación lineal nula $0 : V \to W$ es la matriz nula.

Composición

Dadas dos aplicaciones lineales $f : V \to W$ y $g : W \to U$. Recordemos que la composición de las aplicaciones f y g se definía así:
$(g \circ f)(v) = g(f(v))$ para cada vector $v \in V$. Además se cumple que $g \circ f$ es una aplicación lineal.
Dadas dos aplicaciones lineales $f : V \to W$ y $g : W \to U$ y que las bases respectivas B, B' y B''. Matricialmente: $(f(v))_{B'} = M_{BB'}(f) \cdot (v)_B$,
$(g(f(v)))_{B''} = M_{B'B''}(g) \cdot (f(v))_{B'} = M_{B'B''}(g) \cdot (M_{BB'}(f) \cdot (x)_B)$.
Entonces la matriz asociada a la aplicación composición es:

$$(*) \quad M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g) \cdot M_{BB'}(f).$$

Propiedades Sean las aplicaciones lineales $f, h : V \to W$, $g : W \to U$; $k : U \to V$ se verifica:

1. **Asociativa** $(g \circ f) \circ k = g \circ (f \circ k)$.
2. **Distributivas** : $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$. Y $(f + h) \circ k = f \circ k + h \circ k$.
3. **Elemento neutro** Existe una aplicación lineal $I : V \to V$ tal que se cumple que $f \circ I = f$ y $I \circ k = k$. Esta aplicación está definida por $I(v) = v$, para todo $v \in V$, es decir es la aplicación **identidad**

Si $f : V \to W$ es un **isomorfismo** entonces f **tiene inverso,** para la composición, es decir, la correspondencia inversa f^{-1} es aplicación lineal. $f^{-1} : W \to V$, que cumple que $f^{-1} \circ f = 1_V$ y $f \circ f^{-1} = 1_W$. Los isomorfismos son las únicas aplicaciones lineales que tienen inversa. Y dadas las bases B y B' de dos espacios vectoriales V y W, respectivamente. Entonces se tiene que: $\boxed{M_{B'B}(f^{-1}) = (M_{BB'}(f))^{-1}}$

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$,
$f : V \rightarrow W$ aplicación lineal, B_v y B'_v bases de V , B_w , B'_w bases de W, $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$
La matriz de f en las bases B_v y B_w es :

$$A = M(f)_{B_v B_W} \ / \ \ f(x) = y \leftrightarrow \boxed{A(x)_{B_v} = (y)_{B_w}} (1)$$

La matriz de f en las bases B'_v y B'_w es :

$$A' = M(f)_{B'_v B'_W} \ / \ \ f(x) = y \leftrightarrow \boxed{A'(x)_{B'_v} = (y)_{B'_w}} (2)$$