

Espacios Vectoriales

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I

Definición de espacio vectorial

Definición

Un grupo abeliano $(V, *)$, se dice que es un *espacio vectorial* sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, si se tiene una l.c.e.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightsquigarrow \alpha v,\end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

$$EV.1 \quad \alpha(v * w) = \alpha v * \alpha w.$$

$$EV.2 \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v * \beta v.$$

$$EV.3 \quad (\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v).$$

$$EV.4 \quad 1v = v.$$

para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v, w \in V$, siendo $1 \in \mathbb{K}$ la unidad del cuerpo.

Definición de espacio vectorial

Definición

Un grupo abeliano $(V, *)$, se dice que es un *espacio vectorial* sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, si se tiene una l.c.e.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightsquigarrow \alpha v,\end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

$$EV.1 \quad \alpha(v * w) = \alpha v * \alpha w.$$

$$EV.2 \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v * \beta v.$$

$$EV.3 \quad (\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v).$$

$$EV.4 \quad 1v = v.$$

para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v, w \in V$, siendo $1 \in \mathbb{K}$ la unidad del cuerpo.

Definición de espacio vectorial

Definición

Un grupo abeliano $(V, *)$, se dice que es un *espacio vectorial* sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, si se tiene una l.c.e.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightsquigarrow \alpha v,\end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

$$EV.1 \quad \alpha(v * w) = \alpha v * \alpha w.$$

$$EV.2 \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v * \beta v.$$

$$EV.3 \quad (\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v).$$

$$EV.4 \quad 1v = v.$$

para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v, w \in V$, siendo $1 \in \mathbb{K}$ la unidad del cuerpo.

Definición de espacio vectorial

Definición

Un grupo abeliano $(V, *)$, se dice que es un *espacio vectorial* sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, si se tiene una l.c.e.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightsquigarrow \alpha v,\end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

$$EV.1 \quad \alpha(v * w) = \alpha v * \alpha w.$$

$$EV.2 \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v * \beta v.$$

$$EV.3 \quad (\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v).$$

$$EV.4 \quad 1v = v.$$

para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v, w \in V$, siendo $1 \in \mathbb{K}$ la unidad del cuerpo.

Definición de espacio vectorial

Definición

Un grupo abeliano $(V, *)$, se dice que es un *espacio vectorial* sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, si se tiene una l.c.e.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightsquigarrow \alpha v,\end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

$$EV.1 \quad \alpha(v * w) = \alpha v * \alpha w.$$

$$EV.2 \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v * \beta v.$$

$$EV.3 \quad (\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v).$$

$$EV.4 \quad 1v = v.$$

para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v, w \in V$, siendo $1 \in \mathbb{K}$ la unidad del cuerpo.

Ejemplos de espacios vectoriales

Ejemplo

$(\mathbb{R}^2, *)$ donde la operación $*$ viene dada por

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

para cada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ es un grupo abeliano. Por otra parte la ley de composición externa

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\alpha, (x_1, x_2)) \rightsquigarrow (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2)$$

verifica las propiedades **EV.1**, **EV.2**, **EV.3** y **EV.4**.

Más ejemplos

Ejemplo

$(\mathbb{R}^n, *)$ donde $n \in \mathbb{N}$ y la operación $*$ viene dada por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) * (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

siendo $+$ la suma en el cuerpo de los números reales, es un grupo abeliano. La ley de composición externa

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \rightsquigarrow (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$$

verifica las propiedades **EV.1**, **EV.2**, **EV.3** y **EV.4**, y así, $(\mathbb{R}^n, *, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplos

Ejemplo

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, *)$ es un grupo abeliano, siendo $*$ la operación dada por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) * (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots).$$

Observar que en este caso los elementos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones de números reales, las cuáles denotaremos en forma abreviada como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La ley de composición externa que definimos a continuación es la esperada tras los ejemplos previos.

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\alpha, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}) &\rightsquigarrow (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n, \dots) = (\alpha \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo

Denotamos por

$\mathbb{P}_n^{\mathbb{K}}[x] := \{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n : a_i \in \mathbb{K}, i = 0, \dots, n\}$, es decir al conjunto de los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$ cuyo grado es menor o igual que $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}_n^{\mathbb{K}}[x]$ es un grupo abeliano con la operación suma de polinomios.

Ejemplo

El anillo de los polinomios sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial.

Ejemplos

Ejemplo

Denotamos por

$\mathbb{P}_n^{\mathbb{K}}[x] := \{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n : a_i \in \mathbb{K}, i = 0, \dots, n\}$, es decir al conjunto de los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$ cuyo grado es menor o igual que $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}_n^{\mathbb{K}}[x]$ es un grupo abeliano con la operación suma de polinomios.

Ejemplo

El anillo de los polinomios sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial.

Ejemplos de espacios vectoriales

Ejemplo

El anillo $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, es decir,

$$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{K} \right\},$$

es también un espacio vectorial.

Propiedades

Proposición

- 1 $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- 2 $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- 3 $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- 4 $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- 5 si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- 6 si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- 7 $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Propiedades

Proposición

- 1 $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- 2 $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- 3 $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- 4 $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- 5 si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- 6 si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- 7 $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Propiedades

Proposición

- 1 $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- 2 $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- 3 $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- 4 $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- 5 si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- 6 si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- 7 $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Propiedades

Proposición

- ❶ $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- ❷ $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- ❸ $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- ❹ $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- ❺ si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- ❻ si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- ❼ $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Propiedades

Proposición

- 1 $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- 2 $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- 3 $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- 4 $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- 5 si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- 6 si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- 7 $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Propiedades

Proposición

- ❶ $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- ❷ $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- ❸ $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- ❹ $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- ❺ si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- ❻ si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- ❼ $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Propiedades

Proposición

- 1 $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- 2 $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- 3 $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- 4 $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- 5 si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- 6 si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- 7 $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Propiedades

Proposición

- 1 $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$;
- 2 $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para cada $\vec{v} \in V$;
- 3 $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$;
- 4 $(-\alpha) \cdot \vec{v} = -(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (-\vec{v})$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$;
- 5 si $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$;
- 6 si $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta$;
- 7 $(-\alpha) \cdot (-\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in V$.

Definición

Definición

Sea $(V, *, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $W \subset V$ un subconjunto de V . Diremos que W es un subespacio vectorial si $(W, *, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Tras la definición anterior para saber si un subconjunto W de un espacio vectorial es un subespacio vectorial tan sólo hay que comprobar que:

- 1 $\vec{v} * \vec{w} \in W$ para cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$, y
- 2 $\alpha \cdot \vec{v} \in W$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in W$.

Las condiciones anteriores se pueden sustituir, ambas, por la condición:

- 3 $\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \in W$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$.

Definición

Definición

Sea $(V, *, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $W \subset V$ un subconjunto de V . Diremos que W es un subespacio vectorial si $(W, *, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Tras la definición anterior para saber si un subconjunto W de un espacio vectorial es un subespacio vectorial tan sólo hay que comprobar que:

- ❶ $\vec{v} * \vec{w} \in W$ para cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$, y
- ❷ $\alpha \cdot \vec{v} \in W$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in W$.

Las condiciones anteriores se pueden sustituir, ambas, por la condición:

- ❸ $\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \in W$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$.

Definición

Definición

Sea $(V, *, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $W \subset V$ un subconjunto de V . Diremos que W es un subespacio vectorial si $(W, *, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Tras la definición anterior para saber si un subconjunto W de un espacio vectorial es un subespacio vectorial tan sólo hay que comprobar que:

- ❶ $\vec{v} * \vec{w} \in W$ para cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$, y
- ❷ $\alpha \cdot \vec{v} \in W$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in W$.

Las condiciones anteriores se pueden sustituir, ambas, por la condición:

- ❸ $\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \in W$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$.

Definición

Definición

Sea $(V, *, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $W \subset V$ un subconjunto de V . Diremos que W es un subespacio vectorial si $(W, *, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Tras la definición anterior para saber si un subconjunto W de un espacio vectorial es un subespacio vectorial tan sólo hay que comprobar que:

- ❶ $\vec{v} * \vec{w} \in W$ para cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$, y
- ❷ $\alpha \cdot \vec{v} \in W$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v} \in W$.

Las condiciones anteriores se pueden sustituir, ambas, por la condición:

- ❸ $\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \in W$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$.

Ejemplos de subespacios

Ejemplo

El conjunto que consta de únicamente el vector cero, $\vec{0} \in V$, es un subespacio de V , llamado subespacio nulo.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$. Entonces el subconjunto de $\mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$ formado por los polinomios de grado menor o igual que n para $n \in \mathbb{N}$ fijo, es decir, el conjunto $\mathbb{P}_n^{\mathbb{K}}[x]$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$.

Ejemplo

Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son el subespacio nulo, las rectas que pasan por el origen y el propio espacio $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos de subespacios

Ejemplo

El conjunto que consta de únicamente el vector cero, $\vec{0} \in V$, es un subespacio de V , llamado subespacio nulo.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$. Entonces el subconjunto de $\mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$ formado por los polinomios de grado menor o igual que n para $n \in \mathbb{N}$ fijo, es decir, el conjunto $\mathbb{P}_n^{\mathbb{K}}[x]$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$.

Ejemplo

Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son el subespacio nulo, las rectas que pasan por el origen y el propio espacio $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos de subespacios

Ejemplo

El conjunto que consta de únicamente el vector cero, $\vec{0} \in V$, es un subespacio de V , llamado subespacio nulo.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$. Entonces el subconjunto de $\mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$ formado por los polinomios de grado menor o igual que n para $n \in \mathbb{N}$ fijo, es decir, el conjunto $\mathbb{P}_n^{\mathbb{K}}[x]$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}^{\mathbb{K}}[x]$.

Ejemplo

Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son el subespacio nulo, las rectas que pasan por el origen y el propio espacio $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo

Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son el subespacio nulo, las rectas que pasan por el origen, los planos que pasan por el origen y el propio $\mathbb{R}^3$.

Obsérvese que $\mathbb{R}^2$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ya que ni siquiera es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Los elementos de $\mathbb{R}^3$ tienen tres coordenadas, mientras que los de $\mathbb{R}^2$ sólo tienen dos.

Ejemplo

Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son el subespacio nulo, las rectas que pasan por el origen, los planos que pasan por el origen y el propio $\mathbb{R}^3$.

Obsérvese que $\mathbb{R}^2$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ya que ni siquiera es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Los elementos de $\mathbb{R}^3$ tienen tres coordenadas, mientras que los de $\mathbb{R}^2$ sólo tienen dos.

Operaciones con subespacios

Suma

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $W, W' \subset V$, dos subespacios vectoriales. Llamamos **suma** de W y W' al conjunto

$$W + W' = \{ \vec{w} + \vec{w}' \in V : \vec{w} \in W \text{ y } \vec{w}' \in W' \}.$$

La **suma** de dos subespacios **es de nuevo un subespacio vectorial**. Diremos que la suma de dos subespacios W y W' es **directa** cuando $W \cap W' = \{ \vec{0} \}$ y la denotamos por $W \oplus W'$. En este caso cualquier vector del subespacio suma tiene una única expresión como suma de un vector de W y otro de W' .

Operaciones con subespacios

Intersección

La **intersección** de dos subespacios vectoriales vuelve a ser un **subespacio vectorial**.

Ejemplo

En $V = \mathbb{R}^3$ tenemos que la intersección de dos planos diferentes que pasan por el origen es una recta que pasa por el origen de coordenadas, lo cual según hemos visto es de nuevo un subespacio vectorial.

Operaciones con subespacios

Intersección

La **intersección** de dos subespacios vectoriales vuelve a ser un **subespacio vectorial**.

Ejemplo

En $V = \mathbb{R}^3$ tenemos que la intersección de dos planos diferentes que pasan por el origen es una recta que pasa por el origen de coordenadas, lo cual según hemos visto es de nuevo un subespacio vectorial.

Operaciones con subespacios

Unión

La unión de dos subespacios no es en general un subespacio. Basta para ello observar que la unión de dos rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^2$ no es un subespacio, ya que para que lo fuera la suma de dos elementos cualesquiera debería estar de nuevo en la unión lo cual no sucede.

Combinación lineal

Definición

Dados los vectores $v, v_1, v_2, \dots, v_n$ de un espacio vectorial V . Diremos que v es combinación lineal (abreviadamente **CL**) de los n vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ si existen n escalares del cuerpo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

(Se dice que v es CL del sistema de vectores S , $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$).

Ejemplo

- ① El vector nulo es siempre CL de cualquier conjunto de vectores.
- ② Cuando tengamos un sólo vector v_1 , los vectores que son CL de él serán los de la forma λv_1 , para cierto escalar λ , es decir, los múltiplos de v_1 . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres cuya dirección es la de v_1 y el vector nulo).
- ③ Dados los vectores $(0, 1, 2)$, $(3, 0, 1)$, las CL de ellos serán los vectores de la forma $\alpha(0, 1, 2) + \beta(3, 0, 1) = (3\beta, \alpha, 2\alpha + \beta)$ para cualesquier par de escalares α y β . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $(0, 1, 2)$ y $(3, 0, 1)$).

Ejemplo

- ❶ El vector nulo es siempre CL de cualquier conjunto de vectores.
- ❷ Cuando tengamos un sólo vector v_1 , los vectores que son CL de él serán los de la forma λv_1 , para cierto escalar λ , es decir, los múltiplos de v_1 . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres cuya dirección es la de v_1 y el vector nulo).
- ❸ Dados los vectores $(0, 1, 2)$, $(3, 0, 1)$, las CL de ellos serán los vectores de la forma $\alpha(0, 1, 2) + \beta(3, 0, 1) = (3\beta, \alpha, 2\alpha + \beta)$ para cualesquier par de escalares α y β . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $(0, 1, 2)$ y $(3, 0, 1)$).

Ejemplo

- ❶ El vector nulo es siempre CL de cualquier conjunto de vectores.
- ❷ Cuando tengamos un sólo vector v_1 , los vectores que son CL de él serán los de la forma λv_1 , para cierto escalar λ , es decir, los múltiplos de v_1 . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres cuya dirección es la de v_1 y el vector nulo).
- ❸ Dados los vectores $(0, 1, 2)$, $(3, 0, 1)$, las CL de ellos serán los vectores de la forma $\alpha(0, 1, 2) + \beta(3, 0, 1) = (3\beta, \alpha, 2\alpha + \beta)$ para cualesquier par de escalares α y β . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $(0, 1, 2)$ y $(3, 0, 1)$).

Ejemplo

- ❶ El vector nulo es siempre CL de cualquier conjunto de vectores.
- ❷ Cuando tengamos un sólo vector v_1 , los vectores que son CL de él serán los de la forma λv_1 , para cierto escalar λ , es decir, los múltiplos de v_1 . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres cuya dirección es la de v_1 y el vector nulo).
- ❸ Dados los vectores $(0, 1, 2)$, $(3, 0, 1)$, las CL de ellos serán los vectores de la forma $\alpha(0, 1, 2) + \beta(3, 0, 1) = (3\beta, \alpha, 2\alpha + \beta)$ para cualesquier par de escalares α y β . (En el espacio geométrico son todos los vectores libres del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $(0, 1, 2)$ y $(3, 0, 1)$).

Envoltura lineal

Definición

Dado un conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores de un espacio vectorial V , podemos coger el conjunto de todos los vectores que son CL de los vectores de S . Así tenemos el conjunto $\{v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \text{ tales que } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$, conjunto al que denotaremos por $\langle S \rangle$, $L(S)$, $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ o $L\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Proposición

Dados n vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial V . Entonces

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \subset V$$

y $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

A este subespacio vectorial obtenido tomando todas las C.L. de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ lo llamaremos **subespacio generado o engendrado** por los vectores de S , o *envoltura lineal* de S .

Definición

Diremos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un **conjunto generador** de V si

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle.$$

Proposición

Dados n vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial V . Entonces

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \subset V$$

y $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

A este subespacio vectorial obtenido tomando todas las C.L. de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ lo llamaremos **subespacio generado o engendrado** por los vectores de S , o *envoltura lineal* de S .

Definición

Diremos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un **conjunto generador** de V si

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle .$$

Propiedades destacables

Dado el sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores de V :

- 1 $S \subset \langle S \rangle$. De hecho puede comprobarse que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$
- 2 Si tenemos un subespacio W de V y $S \subset W$ entonces $\langle S \rangle \subset W$.
- 3 Si S y T son conjuntos de vectores de V tales que $S \subset T$ entonces se tiene que $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

Definición

Se dice que dos conjuntos de vectores S y T de un espacio vectorial V son **equivalentes** cuando $\langle S \rangle = \langle T \rangle$. Esto es equivalente a que todo vector de cada uno de los conjuntos sea CL de los vectores del otro conjunto.

Propiedades destacables

Dado el sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores de V :

- ❶ $S \subset \langle S \rangle$. De hecho puede comprobarse que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$
- ❷ Si tenemos un subespacio W de V y $S \subset W$ entonces $\langle S \rangle \subset W$.
- ❸ Si S y T son conjuntos de vectores de V tales que $S \subset T$ entonces se tiene que $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

Definición

Se dice que dos conjuntos de vectores S y T de un espacio vectorial V son **equivalentes** cuando $\langle S \rangle = \langle T \rangle$. Esto es equivalente a que todo vector de cada uno de los conjuntos sea CL de los vectores del otro conjunto.

Propiedades destacables

Dado el sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores de V :

- ❶ $S \subset \langle S \rangle$. De hecho puede comprobarse que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$
- ❷ Si tenemos un subespacio W de V y $S \subset W$ entonces $\langle S \rangle \subset W$.
- ❸ Si S y T son conjuntos de vectores de V tales que $S \subset T$ entonces se tiene que $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

Definición

Se dice que dos conjuntos de vectores S y T de un espacio vectorial V son **equivalentes** cuando $\langle S \rangle = \langle T \rangle$. Esto es equivalente a que todo vector de cada uno de los conjuntos sea CL de los vectores del otro conjunto.

Propiedades destacables

Dado el sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores de V :

- ❶ $S \subset \langle S \rangle$. De hecho puede comprobarse que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$
- ❷ Si tenemos un subespacio W de V y $S \subset W$ entonces $\langle S \rangle \subset W$.
- ❸ Si S y T son conjuntos de vectores de V tales que $S \subset T$ entonces se tiene que $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

Definición

Se dice que dos conjuntos de vectores S y T de un espacio vectorial V son **equivalentes** cuando $\langle S \rangle = \langle T \rangle$. Esto es equivalente a que todo vector de cada uno de los conjuntos sea CL de los vectores del otro conjunto.

Propiedades destacables

Dado el sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores de V :

- ❶ $S \subset \langle S \rangle$. De hecho puede comprobarse que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$
- ❷ Si tenemos un subespacio W de V y $S \subset W$ entonces $\langle S \rangle \subset W$.
- ❸ Si S y T son conjuntos de vectores de V tales que $S \subset T$ entonces se tiene que $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

Definición

Se dice que dos conjuntos de vectores S y T de un espacio vectorial V son **equivalentes** cuando $\langle S \rangle = \langle T \rangle$. Esto es equivalente a que todo vector de cada uno de los conjuntos sea CL de los vectores del otro conjunto.

Independencia lineal

Definición

Un sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ se dice que es **linealmente independiente (LI) o libre** cuando la única CL de estos vectores que da como resultado el vector 0 es la que está formada por todos los escalares nulos. Diremos indistintamente que el conjunto o los vectores son LI. Es decir,

S es L.I. si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Esto es, cuando el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, es C.D.,

(las incógnitas son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, y las columnas de la matriz de coeficientes son los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$).

En caso contrario se dice que el sistema de vectores es **linealmente dependiente (LD) o ligado**; esto ocurre cuando podamos encontrar alguna CL de los vectores que da cero, siendo algún escalar no nulo. es decir: S es LD si existe al menos un $\lambda_i \neq 0$ tal que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, por lo tanto el sistema homogéneo es Compatible Indeterminado.

Propiedades

- 1 Todo conjunto de vectores contenido en un conjunto LI es LI.
- 2 Todo conjunto de vectores que contenga a un conjunto LD es LD.
- 3 Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es LD.
- 4 Supongamos que tenemos un sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ en el que reemplazamos el vector v_i por el vector v'_i resultante de añadirle a v_i una CL de los demás vectores (o por αv_i , donde α es un escalar no nulo). Entonces el sistema inicial es LI o LD si y sólo si lo es el sistema que resulta $\{v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_n\}$.

Propiedades

- 1 Todo conjunto de vectores contenido en un conjunto LI es LI.
- 2 Todo conjunto de vectores que contenga a un conjunto LD es LD.
- 3 Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es LD.
- 4 Supongamos que tenemos un sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ en el que reemplazamos el vector v_i por el vector v'_i resultante de añadirle a v_i una CL de los demás vectores (o por αv_i , donde α es un escalar no nulo). Entonces el sistema inicial es LI o LD si y sólo si lo es el sistema que resulta $\{v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_n\}$.

Propiedades

- 1 Todo conjunto de vectores contenido en un conjunto LI es LI.
- 2 Todo conjunto de vectores que contenga a un conjunto LD es LD.
- 3 Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es LD.
- 4 Supongamos que tenemos un sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ en el que reemplazamos el vector v_i por el vector v'_i resultante de añadirle a v_i una CL de los demás vectores (o por αv_i , donde α es un escalar no nulo). Entonces el sistema inicial es LI o LD si y sólo si lo es el sistema que resulta $\{v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_n\}$.

Propiedades

- 1 Todo conjunto de vectores contenido en un conjunto LI es LI.
- 2 Todo conjunto de vectores que contenga a un conjunto LD es LD.
- 3 Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es LD.
- 4 Supongamos que tenemos un sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ en el que reemplazamos el vector v_i por el vector v'_i resultante de añadirle a v_i una CL de los demás vectores (o por αv_i , donde α es un escalar no nulo). Entonces el sistema inicial es LI o LD si y sólo si lo es el sistema que resulta $\{v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_n\}$.

Propiedades

- 1 Todo conjunto de vectores contenido en un conjunto LI es LI.
- 2 Todo conjunto de vectores que contenga a un conjunto LD es LD.
- 3 Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es LD.
- 4 Supongamos que tenemos un sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ en el que reemplazamos el vector v_i por el vector v'_i resultante de añadirle a v_i una CL de los demás vectores (o por αv_i , donde α es un escalar no nulo). Entonces el sistema inicial es LI o LD si y sólo si lo es el sistema que resulta $\{v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_n\}$.

Definición

Rango de un sistema de vectores S es el mayor número de vectores L.I. que hay en S , y lo denotaremos por $\text{rango}(S)$.

El rango de una matriz es el rango de sus vectores fila que coincide con el rango de sus vectores columna.

Definición

Rango de un sistema de vectores S es el mayor número de vectores L.I. que hay en S , y lo denotaremos por $\text{rango}(S)$.

El rango de una matriz es el rango de sus vectores fila que coincide con el rango de sus vectores columna.

Base de un espacio vectorial

Definición

Un conjunto ordenado de vectores de un espacio vectorial V se dice que es una **base** de V si es un conjunto generador de V y es LI.

Ejemplo

Base canónica. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideremos los vectores

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Es inmediato comprobar que este conjunto es L.I. y generador del espacio vectorial: es suficiente observar que un vector (x, y, z) se pone en la forma $x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Entonces este conjunto de vectores es una base de $\mathbb{R}^3$. A esta base la llamaremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$. De modo análogo puede definirse la base en cualquier $\mathbb{R}^n$ y en cualquier $\mathbb{K}^n$. Por ejemplo, en $\mathbb{K}^2$ la base canónica sería $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Más ejemplos

Ejemplo

- ② En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 $P_3[x]$, también hay una “base canónica”: $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- ③ En el espacio vectorial de las matrices $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ la base “canónica” está formada por las matrices que tienen un 1 en un lugar determinado y un 0 en los demás, por lo tanto, esta base contiene $(m \cdot n)$ matrices.

Más ejemplos

Ejemplo

- ② En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 $P_3[x]$, también hay una “base canónica”: $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- ③ En el espacio vectorial de las matrices $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ la base “canónica” está formada por las matrices que tienen un 1 en un lugar determinado y un 0 en los demás, por lo tanto, esta base contiene $(m \cdot n)$ matrices.

Tener una base en un espacio vectorial es algo que simplifica mucho las cosas, pues no hace falta trabajar con todos los vectores del espacio vectorial, es suficiente con tener los vectores de la base, teniendo en cuenta que todos los demás se ponen como CL (única) de ellos.

Propiedades de la base

Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V , y $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de V .

- 1 Si X es un conjunto generador de V entonces existe una base de V contenida en X . Es decir: $n \leq k$. (De hecho, $n = k$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no es necesario quitar ningún vector.)
- 2 Si X es un conjunto LI de vectores de V entonces existen vectores $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ de manera que el conjunto $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V . Es decir: $k \leq n$. (De hecho, $k = n$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no hace falta añadir ningún vector.)
- 3 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto generador de V .
- 4 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto LI de vectores de V .

Propiedades de la base

Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V , y $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de V .

- 1 Si X es un conjunto generador de V entonces existe una base de V contenida en X . Es decir: $n \leq k$. (De hecho, $n = k$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no es necesario quitar ningún vector.)
- 2 Si X es un conjunto LI de vectores de V entonces existen vectores $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ de manera que el conjunto $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V . Es decir: $k \leq n$. (De hecho, $k = n$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no hace falta añadir ningún vector.)
- 3 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto generador de V .
- 4 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto LI de vectores de V .

Propiedades de la base

Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V , y $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de V .

- 1 Si X es un conjunto generador de V entonces existe una base de V contenida en X . Es decir: $n \leq k$. (De hecho, $n = k$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no es necesario quitar ningún vector.)
- 2 Si X es un conjunto LI de vectores de V entonces existen vectores $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ de manera que el conjunto $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V . Es decir: $k \leq n$. (De hecho, $k = n$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no hace falta añadir ningún vector.)
- 3 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto generador de V .
- 4 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto LI de vectores de V .

Propiedades de la base

Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V , y $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de V .

- 1 Si X es un conjunto generador de V entonces existe una base de V contenida en X . Es decir: $n \leq k$. (De hecho, $n = k$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no es necesario quitar ningún vector.)
- 2 Si X es un conjunto LI de vectores de V entonces existen vectores $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ de manera que el conjunto $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V . Es decir: $k \leq n$. (De hecho, $k = n$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no hace falta añadir ningún vector.)
- 3 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto generador de V .
- 4 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto LI de vectores de V .

Propiedades de la base

Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V , y $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de V .

- 1 Si X es un conjunto generador de V entonces existe una base de V contenida en X . Es decir: $n \leq k$. (De hecho, $n = k$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no es necesario quitar ningún vector.)
- 2 Si X es un conjunto LI de vectores de V entonces existen vectores $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ de manera que el conjunto $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V . Es decir: $k \leq n$. (De hecho, $k = n$ si y sólo si X es ya una base de V , y entonces no hace falta añadir ningún vector.)
- 3 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto generador de V .
- 4 X es una base $\Leftrightarrow k = n$ y X es un conjunto LI de vectores de V .

Teorema

Todo espacio vectorial no nulo tiene alguna base. Además, todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Se llama **dimensión** de un espacio vectorial V al número de elementos de cualquiera de sus bases, y se denotará por $\dim V$.

Si S es un sistema generador de V entonces $\dim V = \text{rango}(S)$. Como consecuencia de las propiedades anteriores se deduce que la dimensión de un espacio vectorial V es el número máximo de vectores LI que pueden escogerse de V , e igualmente el número mínimo de vectores que pueden formar un conjunto generador.

Teorema

Todo espacio vectorial no nulo tiene alguna base. Además, todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Se llama **dimensión** de un espacio vectorial V al número de elementos de cualquiera de sus bases, y se denotará por $\dim V$.

Si S es un sistema generador de V entonces $\dim V = \text{rango}(S)$. Como consecuencia de las propiedades anteriores se deduce que la dimensión de un espacio vectorial V es el número máximo de vectores LI que pueden escogerse de V , e igualmente el número mínimo de vectores que pueden formar un conjunto generador.

Teorema

Todo espacio vectorial no nulo tiene alguna base. Además, todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Se llama **dimensión** de un espacio vectorial V al número de elementos de cualquiera de sus bases, y se denotará por $\dim V$.

Si S es un sistema generador de V entonces $\dim V = \text{rango}(S)$. Como consecuencia de las propiedades anteriores se deduce que la dimensión de un espacio vectorial V es el número máximo de vectores LI que pueden escogerse de V , e igualmente el número mínimo de vectores que pueden formar un conjunto generador.

Teorema

Todo espacio vectorial no nulo tiene alguna base. Además, todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Se llama **dimensión** de un espacio vectorial V al número de elementos de cualquiera de sus bases, y se denotará por $\dim V$.

Si S es un sistema generador de V entonces $\dim V = \text{rango}(S)$. Como consecuencia de las propiedades anteriores se deduce que la dimensión de un espacio vectorial V es el número máximo de vectores LI que pueden escogerse de V , e igualmente el número mínimo de vectores que pueden formar un conjunto generador.