Matrices y sistemas de ecuaciones

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I

Definición de Matriz

Definición

Dado un cuerpo $(\mathbb{K}, +, .)$ *y* n *y* m *números naturales, diremos que el conjunto* $A \subset \mathbb{K}^{m \cdot n}$ *es una matriz de tipo (o tamaño)* $m \times n$ *sobre* $\mathbb{K}$*, si los elementos del conjunto* A *están dispuestos en forma de rectángulo de* m *filas y* n *columnas, es decir,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

siendo a_{ij} *elementos del cuerpo* $\mathbb{K}$.

Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define la matriz suma de A y B como una matriz de tamaño $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ en la que cada elemento viene dado como suma de los elementos de A y B que ocupan ese mismo lugar, es decir, $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, o bien

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Las propiedades del cuerpo $\mathbb{K}$ nos permiten extrapolar las propiedades de la suma de los elementos del cuerpo a la suma de matrices. Así, es posible definir la matriz opuesta a una matriz dada.

Definición

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *se llama matriz opuesta de* A*, y se denota por* $-A$*, a la matriz de tamaño* $m \times n$ *definida por*
$-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
Llamaremos ***matriz nula*** *de tamaño* $m \times n$ *a la matriz formada únicamente por ceros.*

Proposición

$(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ *es un grupo abeliano.*

Producto por escalares

Al hablar de producto por escalares nos referimos al producto de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, por un elemento del cuerpo $\alpha \in \mathbb{K}$. La definición de $\alpha \cdot A$ es la siguiente, $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es decir, consiste en multiplicar cada uno de los elementos de A por α.

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

El producto por escalares es una ley de composición externa y por tanto, que el grupo abeliano $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ con el producto por escalares es un espacio vectorial.

Producto de matrices

Definición

Dadas las matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ *y* $B = (b_{ij}) \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$, *se define la matriz producto* $A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, *donde*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kj}, \qquad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Para que la operación esté bien definida han de coincidir el número de columnas de la primera matriz y el número de filas de la segunda matriz. El producto de matrices no es en general una aplicación conmutativa.

Matriz Identidad

Definición

Llamaremos matriz identidad de orden n a la matriz $I_n = (\delta_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *de forma que* $\delta_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$ *y* $\delta_{ii} = 1$*, es decir,*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se verifica que $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$.

Trasposición de matrices

Definición

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*, se denomina matriz traspuesta de* A*, y se la denota por* A^t *a la matriz que se obtiene al intercambiar las filas de* A *en columnas, es decir* $A^t = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$*, o bien*

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

La trasposición verifica las siguientes propiedades:

1. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se tiene que $(A+B)^t = A^t + B^t$.
2. Dadas $A \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$, se tiene que $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
3. Dados $\alpha \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$.
4. Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $(A^t)^t = A$.

Matrices cuadradas

Definición

Una matriz A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que es cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas.

Al conjunto de matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$ se le denota simplemente por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
El producto de matrices es una operación interna en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

El producto de matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ verifica las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ para $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Propiedad distributiva respecto de la suma, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ y $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ para $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
3. Elemento neutro, I_n es el elemento neutro ya que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Definición

Dada una matriz cuadrada, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, se llama diagonal principal al conjunto de los valores* $diag(A) = \{a_{ii} : 1 \leq i \leq n\}$.

Diremos que una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es:

1. *Simétrica* si $A = A^t$.
2. *Antisimétrica* si $A = -A^t$.
3. *Triangular superior*, si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros, es decir, si $a_{ij} = 0$ para cada $j < i$.
4. *Triangular inferior*, si todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros, es decir, si $a_{ij} = 0$ para cada $j > i$, o bien si su matriz traspuesta es triangular superior.
5. *Diagonal*, si es a la vez triangular superior e inferior, lo cual equivale a que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Denominaremos transformaciones elementales sobre una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ a las siguientes manipulaciones que pueden ser por filas o por columnas:

1. Intercambiar dos filas (o dos columnas).
2. Multiplicar una fila (o una columna) por un escalar no nulo.
3. Sumar a una fila (o a una columna) otra fila (u otra columna) multiplicada por un escalar.

Matrices elementales

Sea $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz identidad de orden n. Llamaremos matrices elementales a las matrices que se obtienen al realizar cada una de las transformaciones elementales básicas:

1. Intercambiando las filas o las columnas i y j, obteniendo de esta forma F_{ij} y C_{ij} respectivamente.
2. Multiplicando la fila o la columna i por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ distinto de cero, en cuyo caso obtenemos las matrices $F_i(\alpha)$ y $C_i(\alpha)$.
3. Sumando a la fila o columna i la fila j multiplicada por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, obteniendo entonces las matrices $F_{ij}(\alpha)$ y $C_{ij}(\alpha)$ respectivamente.

Se observa que:

1. $F_{ij} = C_{ij}$.
2. $F_i(\alpha) = C_i(\alpha)$.
3. $F_{ij}(\alpha) = C_{ij}(\alpha)$.

Además estas matrices son invertibles,

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij},$$
$$F_i(\alpha)^{-1} = F_i(\alpha^{-1}),$$
$$F_{ij}(\alpha)^{-1} = F_{ij}(-\alpha).$$

Matrices equivalentes

Definición

Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dice que son equivalentes si es posible obtener una a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Tras el apartado dedicado a las matrices elementales, una definición alternativa para matrices equivalentes es la siguiente:

Definición

Dadas dos matrices del mismo tamaño $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que son equivalentes si existen dos matrices P y Q, tales que P es una matriz cuadrada de orden m, obtenida como producto de matrices elementales de orden m, y Q es también una matriz cuadrada pero de orden n, obtenida como producto de matrices elementales de orden n verificando:

$$B = P \cdot A \cdot Q.$$

Las matrices P y Q reciben el nombre de matrices de paso de A a B. Para expresar que A es equivalente a B se utiliza la notación $A \sim B$.

Definición

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es regular o no singular si es equivalente a la matriz identidad, I_n. En caso contrario diremos que es una matriz singular.

Rango de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, siempre es posible convertirla mediante transformaciones elementales en una matriz de la forma:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{r} & \overbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad 0}}^{m-r} \end{array} \\
\begin{array}{r} r\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right. \\ \text{n-r}\left\{\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right. \end{array} &
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}
= \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Es decir, toda matriz A es equivalente a una matriz de la forma arriba expresada, $A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces existe un único $r \in \mathbb{N}$ tal que A es equivalente a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Diremos entonces que r es el rango de la matriz A, y lo denotaremos por $rg(A)$.

Obsérvese que $rg(A) \leq \min\{n, m\}$.

Si interpretamos la matriz como un conjunto de vectores fila o columna de un espacio vectorial tenemos la siguiente proposición.

Proposición

El rango de una matriz coincide con el número de vectores fila o columna que son linealmente independientes.

Algunas propiedades que verifica el rango de una matriz son las siguientes:

1. $rg(A \cdot B) \leq \text{mín}\{rg(A), rg(B)\}$.
2. $rg(A) = rg(A^t)$.
3. $rg(A + B) \neq rg(A) + rg(B)$ en general.

El siguiente teorema se obtiene directamente de la transitividad de la relación $A \sim B$.

Teorema

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Entonces A es equivalente a B si, y sólo si, $rg(A) = rg(B)$.

Demostración: Supongamos que $A \sim B$ y que $rg(A) = r$. Entonces A es equivalente a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Entonces $A \sim B$, $A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ implica $B \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, y de aquí obtenemos que $rg(B) = r$.

Recíprocamente, si $rg(A) = rg(B) = r$, entonces $A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ y $B \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, con lo cual $A \sim B$. $\square$

Matrices invertibles

Definición

Diremos que una matriz **cuadrada**, *A, de orden n es invertible si existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de forma que*

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A.$$

La matriz B recibe el nombre de matriz inversa de la matriz A y se denota por A^{-1}.

Una primera observación es que no toda matriz cuadrada tiene inversa.

Definición

Denotaremos por $GL_n(\mathbb{K})$ *al grupo de las matrices invertibles de orden* n *sobre* K. *Observar que*

$$GL_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Proposición

El producto de matrices es una operación interna en $GL_n(\mathbb{K})$, es decir, el producto de matrices invertibles sigue siendo invertible. Además si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, entonces

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz regular, entonces A es invertible.

Ver demostración.

Proposición

Sea A una matriz cuadrada de orden n invertible. Entonces A es una matriz regular.

Demostración: Para demostrar que es una matriz regular hay que demostrar que A es equivalente a I_n o lo que es lo mismo, tenemos que demostrar que el rango de A es n.
Puesto que A es invertible, existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$. Entonces

$$n = rg(I_n) = rg(A \cdot A^{-1}) \leq \text{mín}\left\{rg(A), rg(A^{-1}\right\} \leq rg(A) \leq n,$$

luego $rg(A) = n$ y A es regular. $\square$

Considerando los dos resultados previos obtenemos el siguiente teorema.

Teorema

Una matriz A cuadrada de orden n es regular si, y sólo si, es invertible.

El algoritmo de Gauss-Jordan

El teorema anterior constituye la base de un método que nos permite:

- Primero: Determinar si una matriz es o no invertible.
- Segundo: En el caso en el que la matriz sea invertible, calcular su inversa.

Este método se conoce como el **método de Gauss-Jordan**.

Los pasos que han de seguirse son:

1. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se construye la matriz $(A|I_n) \in \mathcal{M}_{n\times 2n}(\mathbb{K})$.
2. Se realizan transformaciones elementales por **filas** sobre dicha matriz y:
    1. Si el resultado de realizar dichas transformaciones nos da una matriz de la forma $(I_n|B)$, entonces A es invertible y $A^{-1} = B$.
    2. Si el resultado es otro la matriz A no es invertible.

Determinantes

Consideremos el conjunto de las matrices cuadradas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supongamos que queremos asociar a cada matriz un elemento del cuerpo $\mathbb{K}$, lo que denominaremos su determinante, de forma que se cumplan las siguientes propiedades:

1. si multiplicamos por $\alpha \in \mathbb{K}$ los elementos de una columna, el determinante queda multiplicado por α,
2. si una columna es suma de dos, el determinante es suma de los determinantes calculados con cada una de las columnas-sumandos, y
3. si dos columnas son iguales el determinante es cero.

Definición

Hasta ahora hemos definido el determinante de una matriz A como una forma multilineal alternada, veamos ahora una forma práctica para calcularlo. Para calcular un determinante lo haremos de forma recurrente.

- Si $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, entonces $|A| = a_{11}$.
- En general, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces suponiendo conocidos los determinantes de matrices de orden $n-1$ y fijado un valor $i \in \{1, \dots, n\}$, se define:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

siendo Δ_{ij} el determinante de la matriz cuadrada de orden $n-1$ resultante de eliminar la fija i y la columna j de A.

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se llama menor de orden (i, j) de la matriz A al determinante de la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A. Dicho menor se denota por Δ_{ij}.

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se llama adjunto de orden (i, j) de la matriz A, A_{ij}, al valor

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Con las definiciones anteriores podemos reescribir la fórmula que hemos dado para el cálculo de un determinante la cual quedaría de la forma:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

para cada $1 \leq i \leq n$, o bien

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

para cada $1 \leq j \leq n$, si el desarrollo del determinante lo hacemos por la columna j.

El determinante verifica además otras propiedades destacables. Así,

1. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.
$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$
2. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
$$|A| = |A^t|.$$
3. Si A es una matriz invertible, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz de orden n. Entonces A es regular si, y sólo si, $|A| \neq 0$.

Aplicaciones

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, se define su matriz adjunta como la matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son los adjuntos de A. Es decir,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proposición

Si una matriz A es invertible, la matriz inversa vendrá dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t.$$

También es posible, utilizando determinantes, calcular el rango de una matriz.

Proposición

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Entonces el rango de A coincide con el orden del mayor menor no nulo de A.

Planteamiento del problema

Diremos que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas en un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es el formado por m ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

donde a_{ij} y b_i son elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ para cada $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ y $\{x_j : 1 \leq j \leq n\}$ son las incógnitas del sistema.

El sistema también puede expresarse en forma matricial como

$$A \cdot X = B,$$

es decir,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

- La matriz A recibe el nombre de matriz de coeficientes,
- la matriz X, que es un vector de $\mathbb{K}^n$, recibe el nombre de vector incógnita, y
- la matriz B es el vector de términos independientes.

Definición

Diremos que $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ *es una solución del sistema si se verifica que*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot s_j = b_i,$$

para cada $i = 1, \ldots, m$.

Clasificación

Según su estructura se distinguen dos tipos de sistemas lineales:

1. **Homogéneos**, si el vector de términos independientes es el cero $b_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Estos sistemas tienen siempre al menos una solución, ya que el vector $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ siempre verifica el sistema.
2. **No homogéneos o completos**, si $b_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Según sus soluciones los sistemas se clasifican en:

1. **Incompatibles**, si no tienen solución.
2. **Compatibles**, si tienen alguna solución. Dentro de los compatibles los sistemas pueden ser a su vez,
    1. **Compatibles determinados**, si tienen una única solución.
    2. **Compatibles indeterminados**, si tienen más de una solución.

Definición

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son equivalentes si tienen el mismo número de incógnitas y tienen las mismas soluciones.

Teorema

Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas son equivalentes si y sólo si las ecuaciones de un o son combinación lineal de las del otro y viceversa.

Definición

Sea $A \cdot X = B$, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Se llama matriz ampliada del sistema a la matriz de tamaño $m \times (n+1)$ formada por la matriz A y añadiéndole en último lugar una columna adicional formada por los elementos de B, es decir, $(A|B)$.

Después del teorema, tenemos que en términos de la matrices ampliadas dos sistemas $A \cdot X = B$ y $M \cdot X = N$ serán equivalentes si, y solamente si, existe una matriz P producto de matrices elementales tal que

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) = P \cdot \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

El teorema de Rouché-Frobeniüs

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, la primera cuestión que nos planteamos es si el sistema tiene o no solución.
El teorema de Rouché-Frobenius nos proporciona un criterio según el cual podemos saber si el sistema es o no compatible, y en el caso en el que sea compatible también podemos conocer si es determinado o indeterminado.

Sea $A \cdot X = B$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, donde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es la matriz de coeficientes, $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ es el vector de términos independientes, y $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es el vector de las incógnitas del sistema. Si consideramos los vectores de la forma:

$$\vec{u}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

para $j = 1, \ldots, n$, podemos reescribir el sistema en la forma:

$$x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{u}_n = B,$$

de donde se deduce que la existencia de solución es equivalente a que el vector B puede obtenerse como combinación lineal de los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, o lo que es lo mismo que pertenezca al subespacio que generan. Así, si H es la envoltura lineal del conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, el sistema tendrá solución si, y sólo si, $B \in H$. Además esta solución será única si el conjunto de los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es linealmente independiente, ya que en ese caso los coeficientes que permiten expresarlo como combinación lineal de dichos vectores son únicos. Todo ello quedaría resumido en el siguiente teorema:

Teorema (Teorema de Rouché-Frobenius)

Sea $A \cdot X = B$, un sistema de ecuaciones, tal que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se verifica que:

1. *Si $rg(A) \neq rg(A|B)$ entonces el sistema es incompatible.*
2. *Si $rg(A) = rg(A|B)$, entonces el sistema es compatible.*
   1. *Si además $rg(A) = rg(A|B) = n$ el sistema es compatible determinado.*
   2. *Si $rg(A) = rg(A|B) < n$ el sistema es compatible indeterminado (con $(n - rg(A))$ grados de libertad.*

La regla de Cramer

Sea $A \cdot X = B$, un sistema de ecuaciones lineales, tal que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz cuadrada con determinante distinto de cero, en cuyo caso será una invertible. Multiplicando por A^{-1} obtenemos que el vector X queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1} \cdot b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn} \cdot b_k \end{pmatrix},$$

de lo cual se deduce lo siguiente:

Teorema (Regla de Cramer)

Sea $A \cdot X = B$ un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tal que $|A| \neq 0$. Entonces el sistema es compatible determinado y la única solución viene dada por las fórmulas:

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$x_j = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La regla de Cramer puede adaptarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales no necesariamente cuadrados. Así, si tenemos un sistema de la forma $A \cdot X = B$ con m ecuaciones y n incógnitas, y $m < n$, consideramos los vectores de $\mathbb{K}^m$ formados por $\vec{u}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, para $j = 1, \ldots, n$. Si el rango de la matriz A es m, entonces existen m vectores linealmente independientes en el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Suponiendo que dichos vectores fueran los m primeros, le asignamos a las variables asociadas a las restantes columnas, es decir, $x_{m+1}, \cdots, x_n$, parámetros $\mu_{m+1}, \cdots, \mu_n$, y pasando estos sumandos restando al otro miembro de la igualdad modificando de esta forma el vector B. Concretamente el nuevo sistema creado sería el siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \sum_{k=m+1}^{n} \mu_k a_{1k} \\ \vdots \\ b_m - \sum_{k=m+1}^{n} \mu_k a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Este sistema verifica las condiciones requeridas para utilizar la regla de Cramer, pero en este caso el sistema es compatible indeterminado.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo

Consideremos el sistema dado por

$$\begin{cases} 5x - 11y + 9z & = 4 \\ x - 3y + 5z & = 2 \\ 2x - 4y + 2z & = 1 \end{cases}$$

Método de diagonalización de Gauss

Sea $A \cdot X = B$, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. El método de Gauss, consta de las siguientes etapas:
En primer lugar se realizan transformaciones elementales **por filas** sobre la matriz ampliada del sistema $(A|B)$ hasta obtener una matriz equivalente de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A' & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$, donde A' es una matriz cuyo número de filas coincide con su rango y con el rango de la matriz A.

1. Si D es una matriz columna formada por elementos todos iguales a cero, entonces el sistema es compatible.
2. Si por el contrario existe algún elemento de D distinto de cero el sistema no tiene solución (es incompatible).

En el caso en el que el sistema tenga solución tenemos dos posibilidades:

1. Si A' es una matriz cuadrada entonces el sistema es C.D.. Realizando transformaciones elementales y resolvemos el sistema.
2. Si $(rg(A') = r < n)$, entonces el sistemas es C.I.. Se tienen entonces $n - r$ columnas de A' que son combinación lineal de las restantes, (por ejemplo las últimas), $\vec{u}_j$, $r + 1 \leq j \leq n$. Llamando $\mu_j = x_j$ dichas incógnitas tomarán valores arbitrarios, el resto de las incógnitas se calcula resolviendo el sistema,

$$A'' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = C - \sum_{k=r+1}^{n} \mu_k \vec{u}_k,$$

siendo A'' la matriz cuadrada formada por las primeras r columnas de A'.