Lógica y Teoría de conjuntos

María Muñoz Guillermo
maria.mg@upct.es

U.P.C.T.

Matemáticas I

Breve repaso histórico

- Aristóteles (384 - 322 a.C.). En una forma modificada este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.
- Gotfried Wilhelm Leibnitz (1.646 - 1.716).
- George Boole (1.815 - 1.864) creó un sistema de lógica matemática que presentó en 1.847 en el panfleto "The Mathematical Analysis of Logic, Begin an essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning".
- August Morgan (1.806 - 1.871) "Formal Logic".
- Charles Sanders Peirce (1.839 - 1.914).
- Alfred North Whitehead (1.861 - 1.947) y Bertrand Russell (1.872 - 1.970).

Breve repaso histórico

- Aristóteles (384 - 322 a.C.). En una forma modificada este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.
- Gotfried Wilhelm Leibnitz (1.646 - 1.716).
- George Boole (1.815 - 1.864) creó un sistema de lógica matemática que presentó en 1.847 en el panfleto "The Mathematical Analysis of Logic, Begin an essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning".
- August Morgan (1.806 - 1.871) "Formal Logic".
- Charles Sanders Peirce (1.839 - 1.914).
- Alfred North Whitehead (1.861 - 1.947) y Bertrand Russell (1.872 - 1.970).

Breve repaso histórico

- Aristóteles (384 - 322 a.C.). En una forma modificada este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.
- Gotfried Wilhelm Leibnitz (1.646 - 1.716).
- George Boole (1.815 - 1.864) creó un sistema de lógica matemática que presentó en 1.847 en el panfleto "The Mathematical Analysis of Logic, Begin an essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning".
- August Morgan (1.806 - 1.871) "Formal Logic".
- Charles Sanders Peirce (1.839 - 1.914).
- Alfred North Whitehead (1.861 - 1.947) y Bertrand Russell (1.872 - 1.970).

Breve repaso histórico

- Aristóteles (384 - 322 a.C.). En una forma modificada este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.
- Gotfried Wilhelm Leibnitz (1.646 - 1.716).
- George Boole (1.815 - 1.864) creó un sistema de lógica matemática que presentó en 1.847 en el panfleto "The Mathematical Analysis of Logic, Begin an essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning".
- August Morgan (1.806 - 1.871) "Formal Logic".
- Charles Sanders Peirce (1.839 - 1.914).
- Alfred North Whitehead (1.861 - 1.947) y Bertrand Russell (1.872 - 1.970).

Breve repaso histórico

- Aristóteles (384 - 322 a.C.). En una forma modificada este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.
- Gotfried Wilhelm Leibnitz (1.646 - 1.716).
- George Boole (1.815 - 1.864) creó un sistema de lógica matemática que presentó en 1.847 en el panfleto "The Mathematical Analysis of Logic, Begin an essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning".
- August Morgan (1.806 - 1.871) "Formal Logic".
- Charles Sanders Peirce (1.839 - 1.914).
- Alfred North Whitehead (1.861 - 1.947) y Bertrand Russell (1.872 - 1.970).

Breve repaso histórico

- Aristóteles (384 - 322 a.C.). En una forma modificada este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.
- Gotfried Wilhelm Leibnitz (1.646 - 1.716).
- George Boole (1.815 - 1.864) creó un sistema de lógica matemática que presentó en 1.847 en el panfleto "The Mathematical Analysis of Logic, Begin an essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning".
- August Morgan (1.806 - 1.871) "Formal Logic".
- Charles Sanders Peirce (1.839 - 1.914).
- Alfred North Whitehead (1.861 - 1.947) y Bertrand Russell (1.872 - 1.970).

Conceptos básicos

Definición

Llamaremos proposición a toda afirmación de la que se pueda decir sin ambigüedad y de manera excluyente que es cierta o falsa.

Las proposiciones más sencillas se denominan **atómicas**. Las proposiciones constituidas por proposiciones atómicas y otras partículas que sirven de nexo se llaman **moleculares**. Habitualmente vendrán denotadas por las letras p, q, . . .

El **cálculo proposicional** se ocupa de la formación de proposiciones moleculares y de su valor lógico.

Conceptos básicos

Definición

Llamaremos proposición a toda afirmación de la que se pueda decir sin ambigüedad y de manera excluyente que es cierta o falsa.

Las proposiciones más sencillas se denominan **atómicas**. Las proposiciones constituidas por proposiciones atómicas y otras partículas que sirven de nexo se llaman **moleculares**. Habitualmente vendrán denotadas por las letras p, q, . . .

El **cálculo proposicional** se ocupa de la formación de proposiciones moleculares y de su valor lógico.

Conceptos básicos

Definición

Llamaremos proposición a toda afirmación de la que se pueda decir sin ambigüedad y de manera excluyente que es cierta o falsa.

Las proposiciones más sencillas se denominan **atómicas**. Las proposiciones constituidas por proposiciones atómicas y otras partículas que sirven de nexo se llaman **moleculares**. Habitualmente vendrán denotadas por las letras p, q, . . .

El **cálculo proposicional** se ocupa de la formación de proposiciones moleculares y de su valor lógico.

Definición

Se llaman conectores (o conectivos) lógicos a las partículas que se utilizan para formar las proposiciones moleculares.

Algunos conectores son los que siguen:

- Disyunción " o ". La simbolizaremos por "$\vee$". Ejemplo: $p \vee q$ se lee *p o q*.
- Conjunción " y ". La simbolizaremos por "$\wedge$". Ejemplo: $p \wedge q$ se lee *p y q*.
- Negación " no ". La simbolizaremos por "$\neg$". Ejemplo: $\neg p$ se lee *no p*.
- El condicional " si ..., entonces ..." que simbolizaremos por $\to$, y que se define de manera que $p \to q$ (si p entonces q) es falsa cuando p es cierta y q es falsa.

Definición

Se llaman conectores (o conectivos) lógicos a las partículas que se utilizan para formar las proposiciones moleculares.

Algunos conectores son los que siguen:

- Disyunción " o ". La simbolizaremos por "$\vee$". Ejemplo: $p \vee q$ se lee *p o q*.
- Conjunción " y ". La simbolizaremos por "$\wedge$". Ejemplo: $p \wedge q$ se lee *p y q*.
- Negación " no ". La simbolizaremos por "$\neg$". Ejemplo: $\neg p$ se lee *no p*.
- El condicional " si ..., entonces ..." que simbolizaremos por $\rightarrow$, y que se define de manera que $p \rightarrow q$ (si p entonces q) es falsa cuando p es cierta y q es falsa.

Definición

Se llaman conectores (o conectivos) lógicos a las partículas que se utilizan para formar las proposiciones moleculares.

Algunos conectores son los que siguen:

- Disyunción " o ". La simbolizaremos por "$\vee$". Ejemplo: $p \vee q$ se lee *p o q*.
- Conjunción " y ". La simbolizaremos por "$\wedge$". Ejemplo: $p \wedge q$ se lee *p y q*.
- Negación " no ". La simbolizaremos por "$\neg$". Ejemplo: $\neg p$ se lee *no p*.
- El condicional " si . . . , entonces . . . " que simbolizaremos por $\rightarrow$, y que se define de manera que $p \rightarrow q$ (si p entonces q) es falsa cuando p es cierta y q es falsa.

Definición

Se llaman conectores (o conectivos) lógicos a las partículas que se utilizan para formar las proposiciones moleculares.

Algunos conectores son los que siguen:

- Disyunción " o ". La simbolizaremos por "$\vee$". Ejemplo: $p \vee q$ se lee *p o q*.
- Conjunción " y ". La simbolizaremos por "$\wedge$". Ejemplo: $p \wedge q$ se lee *p y q*.
- Negación " no ". La simbolizaremos por "$\neg$". Ejemplo: $\neg p$ se lee *no p*.
- El condicional " si ..., entonces ..." que simbolizaremos por $\rightarrow$, y que se define de manera que $p \rightarrow q$ (si p entonces q) es falsa cuando p es cierta y q es falsa.

Definición

Se llaman conectores (o conectivos) lógicos a las partículas que se utilizan para formar las proposiciones moleculares.

Algunos conectores son los que siguen:

- Disyunción " o ". La simbolizaremos por "$\vee$". Ejemplo: $p \vee q$ se lee *p o q*.
- Conjunción " y ". La simbolizaremos por "$\wedge$". Ejemplo: $p \wedge q$ se lee *p y q*.
- Negación " no ". La simbolizaremos por "$\neg$". Ejemplo: $\neg p$ se lee *no p*.
- El condicional " si ..., entonces ..." que simbolizaremos por $\rightarrow$, y que se define de manera que $p \rightarrow q$ (si p entonces q) es falsa cuando p es cierta y q es falsa.

- El doble condicional o equivalencia "...si, y sólo si, ..." que simbolizaremos por "$\leftrightarrow$" se define de modo que p$\leftrightarrow$q (p si, y sólo si, q) es cierta sólo cuando p y q son ciertas a la vez o falsas a la vez.

En la siguiente tabla esquematizamos las definiciones anteriores. Habitualmente denotaremos con un 1 la proposición verdadera y con 0 indicaremos que la proposición es falsa:

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\neg$ p	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

La jerarquía de los conectores lógicos es la que sigue de mayor a menor ($\vee$ y $\wedge$ tienen igual status):

$$\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg$$

El uso del paréntesis puede hacer variar el sentido lógico.

Ejemplo:

Vienes a cenar, o vamos al cine y tomamos un helado.

p≡ (tú) vienes a cenar.
q≡ (nosotros) vamos al cine.
r≡ (nosotros) tomamos un helado.

$$p \vee (q \wedge r)$$

La jerarquía de los conectores lógicos es la que sigue de mayor a menor ($\vee$ y $\wedge$ tienen igual status):

$$\Leftrightarrow,\ \Rightarrow,\ \vee,\ \wedge,\ \neg$$

El uso del paréntesis puede hacer variar el sentido lógico.
Ejemplo:

Vienes a cenar, o vamos al cine y tomamos un helado.

p≡ (tú) vienes a cenar.
q≡ (nosotros) vamos al cine.
r≡ (nosotros) tomamos un helado.

$$p \vee (q \wedge r)$$

La jerarquía de los conectores lógicos es la que sigue de mayor a menor ($\vee$ y $\wedge$ tienen igual status):

$$\Leftrightarrow,\ \Rightarrow,\ \vee,\ \wedge,\ \neg$$

El uso del paréntesis puede hacer variar el sentido lógico.
Ejemplo:

Vienes a cenar, o vamos al cine y tomamos un helado.

p$\equiv$ (tú) vienes a cenar.
q$\equiv$ (nosotros) vamos al cine.
r$\equiv$ (nosotros) tomamos un helado.

$$p \vee (q \wedge r)$$

La jerarquía de los conectores lógicos es la que sigue de mayor a menor ($\vee$ y $\wedge$ tienen igual status):

$$\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg$$

El uso del paréntesis puede hacer variar el sentido lógico.
Ejemplo:

Vienes a cenar, o vamos al cine y tomamos un helado.

p$\equiv$ (tú) vienes a cenar.
q$\equiv$ (nosotros) vamos al cine.
r$\equiv$ (nosotros) tomamos un helado.

$$p \vee (q \wedge r)$$

La jerarquía de los conectores lógicos es la que sigue de mayor a menor ($\vee$ y $\wedge$ tienen igual status):

$$\Leftrightarrow,\ \Rightarrow,\ \vee,\ \wedge,\ \neg$$

El uso del paréntesis puede hacer variar el sentido lógico.
Ejemplo:

Vienes a cenar, o vamos al cine y tomamos un helado.

p$\equiv$ (tú) vienes a cenar.
q$\equiv$ (nosotros) vamos al cine.
r$\equiv$ (nosotros) tomamos un helado.

$$p \vee (q \wedge r)$$

Tautologías y contradicciones

Una forma proposicional que siempre es verdadera con independencia del valor de verdad de las proposiciones que la integran se llama **tautología**. Una forma proposicional que es siempre falsa con independencia del valor de verdad de las proposiciones que la integran se denomina **contradicción**. Si no se da alguno de los dos casos anteriores suele decirse que la forma proposicional es una **contingencia**.

Ejemplo

$$q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

p	q	p⇒q	q⇒(p⇒q)
1	0	0	1
1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Las siguientes proposiciones son tautologías y se denotan de forma simplificada con las letras que aparecen a continuación:

$p \wedge q \Rightarrow q$	S (Simplificación)
$p \Rightarrow p \vee q$	A (Adición)
$q \Rightarrow (p \rightarrow q)$	C (Condicional)
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$	SH (Silogismo hipotético)
$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$	SD (Silogismo disyuntivo)
$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$	MP (Modus (ponendo) ponens)
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$	MT (Modus (tollendo) tollens)

Dos formas proposicionales p y q se dicen equivalentes y se escribe $p \equiv q$ si sus tablas de verdad coinciden.

Ejemplo:

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Dos formas proposicionales p y q se dicen equivalentes y se escribe $p \equiv q$ si sus tablas de verdad coinciden.
Ejemplo:
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Dos formas proposicionales p y q se dicen equivalentes y se escribe $p \equiv q$ si sus tablas de verdad coinciden.
Ejemplo:

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Leyes de Morgan

$$\boxed{\begin{array}{c}\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q\end{array}}$$

Inferencia lógica

La inferencia lógica es el proceso que permite obtener una proposición cierta (conclusión) a través de otras proposiciones ciertas (premisas), de tautologías y de las leyes de inferencia que veremos a continuación:

- **Ley de la unión:** Si en un cierto lugar de una inferencia se tiene la premisa p y en otro la premisa q, se puede concluir $p \wedge q$.
- **Ley de inserción de tautologías:** En cualquier momento de una inferencia se puede usar (escribir) una tautología.

Inferencia lógica

La inferencia lógica es el proceso que permite obtener una proposición cierta (conclusión) a través de otras proposiciones ciertas (premisas), de tautologías y de las leyes de inferencia que veremos a continuación:

- **Ley de la unión:** Si en un cierto lugar de una inferencia se tiene la premisa p y en otro la premisa q, se puede concluir $p \wedge q$.
- **Ley de inserción de tautologías:** En cualquier momento de una inferencia se puede usar (escribir) una tautología.

Inferencia lógica

La inferencia lógica es el proceso que permite obtener una proposición cierta (conclusión) a través de otras proposiciones ciertas (premisas), de tautologías y de las leyes de inferencia que veremos a continuación:

- **Ley de la unión:** Si en un cierto lugar de una inferencia se tiene la premisa p y en otro la premisa q, se puede concluir $p \wedge q$.
- **Ley de inserción de tautologías:** En cualquier momento de una inferencia se puede usar (escribir) una tautología.

- **Ley de uso de las tautologías:** Si se tiene una tautología que es una implicación y se posee el antecedente (como cierto) se puede concluir el consecuente (como cierto).

Definición

Las reglas de inferencia son el proceso práctico de llevar a cabo la inferencia atendiendo a las leyes anteriores y las tautologías.

En Matemáticas, un implicación de la forma $A \Rightarrow B$ se llama **teorema**. Las premisas que constituyen A son las **hipótesis**, la conclusión se llama **tesis**. El razonamiento (matemático) basado en la inferencia lógica para llegar de la hipótesis a la tesis se llama **demostración**.

Definición

Las reglas de inferencia son el proceso práctico de llevar a cabo la inferencia atendiendo a las leyes anteriores y las tautologías.

En Matemáticas, un implicación de la forma $A \Rightarrow B$ se llama **teorema**. Las premisas que constituyen A son las **hipótesis**, la conclusión se llama **tesis**. El razonamiento (matemático) basado en la inferencia lógica para llegar de la hipótesis a la tesis se llama **demostración**.

Si $A \Rightarrow B$ constituye un *teorema directo*, se dice que $B \Rightarrow A$ es su **recíproco**. El teorema $\neg A \Rightarrow \neg B$ constituye el contrario de $A \Rightarrow B$ (equivalente a $B \Rightarrow A$).

Si $A \Rightarrow B$ constituye un *teorema directo*, se dice que $B \Rightarrow A$ es su **recíproco**. El teorema $\neg A \Rightarrow \neg B$ constituye el contrario de $A \Rightarrow B$ (equivalente a $B \Rightarrow A$).

Métodos de demostración

- Método directo. Se llega a la conclusión a través de las premisas mediante el uso de las reglas de inferencia.
- Reducción al absurdo. Este método se basa en que a partir de premisas ciertas y reglas válidas no se puede llegar a una contradicción. Para ello, si la conclusión buscada es S, se introduce como premisa auxiliar $\neg S$. El proceso matemático concluye en la práctica cuando al aplicar las reglas de inferencia se obtiene una contradicción cualquiera (por ejemplo $A \wedge \neg A$), luego S es cierta.

Métodos de demostración

- Método directo. Se llega a la conclusión a través de las premisas mediante el uso de las reglas de inferencia.
- Reducción al absurdo. Este método se basa en que a partir de premisas ciertas y reglas válidas no se puede llegar a una contradicción. Para ello, si la conclusión buscada es S, se introduce como premisa auxiliar $\neg S$. El proceso matemático concluye en la práctica cuando al aplicar las reglas de inferencia se obtiene una contradicción cualquiera (por ejemplo $A \wedge \neg A$), luego S es cierta.

Ejemplo:
P1: $p \vee q \rightarrow r$
P2: $q \vee \neg s$
P3: $\neg r$ Se desea concluir $\neg s$

P4: s (Premisa auxiliar)
P5: $s \rightarrow q$ C-D(2)
P6: q MP(4,5)
P7: $p \vee q$ A(6)
P8: r MP(1,7)

- Método de inducción. Para probar la validez del método necesitamos usar la siguiente propiedad de los números naturales $\mathbb{N}$:

  "Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento". El método se usa para probar que una propiedad $P(n)$ que se enuncia para cada número natural "n" es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Método de inducción. Para probar la validez del método necesitamos usar la siguiente propiedad de los números naturales $\mathbb{N}$:

  "Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento". El método se usa para probar que una propiedad $P(n)$ que se enuncia para cada número natural "n" es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

El proceso matemático consta de dos pasos:

1. Probar que $P(1)$ es cierta, y
2. probar que $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

El proceso matemático consta de dos pasos:

1. Probar que $P(1)$ es cierta, y
2. probar que $P(n) \to P(n+1)$.

P1: P(1)
P2: P(n)$\rightarrow$ P(n+1)
P3: Existe algún enunciado $P(n)$ falso. (Premisa auxiliar)
P4: Sea $P(m)$ el primer enunciado falso.
P5: $P(m-1)$ es cierto.
P6: $P(m)$ es cierto.

Ejemplo

Probar por inducción sobre "n" la fórmula:

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$$

Demostración:

- $n=1$.

$$1^2 = 1^3 = 1$$

- Supongamos que el resultado es cierto para n. Demostraremos que entonces también es cierto para $n+1$.

$$\begin{aligned}
(1+\cdots+n+(n+1))^2 &= (1+\cdots+n)^2+(n+1)^2 \\
&+ 2\cdot(1+\cdots+n)\cdot(n+1) \\
&= 1^3+\cdots+n^3+(n+1)^2 \\
&+ 2\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot(n+1) = \\
&= 1^3+\cdots+n^3+(n+1)^2+n\cdot(n+1)^2 \\
&= 1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3
\end{aligned}$$

Ejemplo

Probar por inducción sobre “n” la fórmula:

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$$

Demostración:

- $n=1$.

$$1^2 = 1^3 = 1$$

- Supongamos que el resultado es cierto para n. Demostraremos que entonces también es cierto para $n+1$.

$$\begin{aligned}(1+\cdots+n+(n+1))^2 &= (1+\cdots+n)^2+(n+1)^2 \\ &+2\cdot(1+\cdots+n)\cdot(n+1) \\ &= 1^3+\cdots+n^3+(n+1)^2 \\ &+2\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot(n+1) = \\ &= 1^3+\cdots+n^3+(n+1)^2+n\cdot(n+1)^2 \\ &= 1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3\end{aligned}$$

Ejemplo

Probar por inducción sobre "n" la fórmula:

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$$

Demostración:

- $n=1$.
$$1^2 = 1^3 = 1$$
- Supongamos que el resultado es cierto para n. Demostraremos que entonces también es cierto para $n+1$.
$$\begin{aligned}(1+\cdots+n+(n+1))^2 &= (1+\cdots+n)^2+(n+1)^2\\ &+2\cdot(1+\cdots+n)\cdot(n+1)\\ &=1^3+\cdots+n^3+(n+1)^2\\ &+2\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot(n+1)=\\ &=1^3+\cdots+n^3+(n+1)^2+n\cdot(n+1)^2\\ &=1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3\end{aligned}$$

Cuantificadores

$\forall$ cuantificador universal;

$\exists$ cuantificador existencial.

Cuantificadores

$\boxed{\begin{array}{l} \forall \text{ cuantificador universal;} \\ \\ \exists \text{ cuantificador existencial.} \end{array}}$

Ejercicios:

$$\neg(\forall x p(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x p(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$

$$(\forall x p(x)) \wedge (\forall x q(x)) \Leftrightarrow \forall x p(x) \wedge q(x)$$

Sin embargo:

$$(\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x))$$

Contraejemplo:
$p(x) \equiv x \leq 0$
$q(x) \equiv x \geq 0$
$\forall p(x) \vee q(x)$ Verdadero $(\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x))$ Falso.

Definición

Un conjunto es la reunión en un todo de determinados objetos bien definidos y diferenciables los unos de los otros.

Habitualmente los conjuntos se simbolizan mediante letras mayúsculas, y sus elementos mediante minúsculas. Si a es un elemento del conjunto A, diremos que a pertenece a A y escribiremos $a \in A$.

Definición

Un conjunto es la reunión en un todo de determinados objetos bien definidos y diferenciables los unos de los otros.

Habitualmente los conjuntos se simbolizan mediante letras mayúsculas, y sus elementos mediante minúsculas. Si a es un elemento del conjunto A, diremos que a pertenece a A y escribiremos $a \in A$.

Un conjunto queda completamente determinado si se conocen todos sus elementos. Para especificar un conjunto utilizaremos alguna de las opciones que siguen:

- Enumerando sus elementos. Ejemplo: $A = \{a, b, 3, 8, \pi\}$.
- Dando la propiedad (o propiedades) que caracteriza(n) a los elementos del conjunto. Por ejemplo: $B = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 1]\}$.

Un conjunto queda completamente determinado si se conocen todos sus elementos. Para especificar un conjunto utilizaremos alguna de las opciones que siguen:

- Enumerando sus elementos. Ejemplo: $A = \{a, b, 3, 8, \pi\}$.
- Dando la propiedad (o propiedades) que caracteriza(n) a los elementos del conjunto. Por ejemplo: $B = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in [0, 1]\}$.

Se llama *cardinal* de un conjunto A al número de elementos de dicho conjunto y su denota $|A|$. El conjunto vacío, es decir, de cardinal cero se denota por $\emptyset$.

Definición

Diremos que un conjunto B es subconjunto o parte de un conjunto A o que B está contenido en A si, todos los elementos de B son a su vez elementos de A. Es decir,

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Se llama *cardinal* de un conjunto A al número de elementos de dicho conjunto y su denota $|A|$. El conjunto vacío, es decir, de cardinal cero se denota por $\emptyset$.

Definición

Diremos que un conjunto B es subconjunto o parte de un conjunto A o que B está contenido en A si, todos los elementos de B son a su vez elementos de A. Es decir,

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Definición

Diremos que dos conjuntos A y B son iguales ($A = B$) si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, es decir si ambos poseen los mismos elementos.

Claramente, $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A. Además si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.
Ejemplo:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Definición

Si $A \subseteq X$ definimos el complementario de A en X y se denota por $A_X^c = \{x \in X : x \notin A\}$.

Definición

Sea A un conjunto se define el conjunto de las partes de A como el conjunto formado por todos los subconjuntos de A y se denota $\mathcal{P}(A)$. Así:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Ejemplo: (Conjunto de las partes de $A = \{1, a, \{a\}\}$).

$$\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{1, a\}, \{1, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{1, a, \{a\}\}, \emptyset\}.$$

Si A es un conjunto de n elementos, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Definición

Si $A \subseteq X$ *definimos el complementario de* A *en* X *y se denota por* $A_X^c = \{x \in X : x \notin A\}$.

Definición

Sea A *un conjunto se define el conjunto de las partes de* A *como el conjunto formado por todos los subconjuntos de* A *y se denota* $\mathcal{P}(A)$. *Así:*

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Ejemplo: (Conjunto de las partes de $A = \{1, a, \{a\}\}$).

$$\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{1, a\}, \{1, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{1, a, \{a\}\}, \emptyset\}.$$

Si A es un conjunto de n elementos, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Operaciones con conjuntos

Sean A y B conjuntos. Se define:

- A unión B y se denota $A \cup B$ al conjunto:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

- A intersección B y se denota $A \cap B$ al conjunto:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Cuando la intersección es el conjunto vacío se dice que A y B son disjuntos.

Operaciones con conjuntos

Sean A y B conjuntos. Se define:

- A unión B y se denota $A \cup B$ al conjunto:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

- A intersección B y se denota $A \cap B$ al conjunto:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

  Cuando la intersección es el conjunto vacío se dice que A y B son disjuntos.

- $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Propiedades:

- Idempotencia: $\forall A \subseteq X$,

$$A \cap A = A, \qquad A \cup A = A.$$

- Conmutativa: $\forall A, B \subseteq X$,

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

- Asociativa: $\forall A, B, C \subseteq X$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\ :$$

Propiedades:

- Idempotencia: $\forall A \subseteq X$,

$$A \cap A = A, \qquad A \cup A = A.$$

- Conmutativa: $\forall A, B \subseteq X$,

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

- Asociativa: $\forall A, B, C \subseteq X$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C:$$

Propiedades:

- Idempotencia: $\forall A \subseteq X$,

$$A \cap A = A, \qquad A \cup A = A.$$

- Conmutativa: $\forall A, B \subseteq X$,

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

- Asociativa: $\forall A, B, C \subseteq X$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C :$$

- Distributiva: $\forall A, B, C \subseteq X$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- Leyes de Morgan: $\forall A, B \subseteq X$,

$$(A \cap B)^c_X = A^c_X \cup B^c_X \qquad (A \cup B)^c_X = A^c_X \cap B^c_X.$$

- Distributiva: $\forall A, B, C \subseteq X$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- Leyes de Morgan: $\forall A, B \subseteq X$,

$$(A \cap B)^c_X = A^c_X \cup B^c_X \qquad (A \cup B)^c_X = A^c_X \cap B^c_X.$$

- Distributiva: $\forall A, B, C \subseteq X$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- Leyes de Morgan: $\forall A, B \subseteq X$,

$$(A \cap B)^c_X = A^c_X \cup B^c_X \qquad (A \cup B)^c_X = A^c_X \cap B^c_X.$$

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de X, denotamos:

$$\cap_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \, \forall i \in I\}$$

$$\cup_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Definición

Dados $A, B \subseteq X$ conjuntos se define el producto cartesiano de A y B y se denota por $A \times B$ a:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

De igual manera, dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se define el producto cartesiano de los conjuntos anteriores como el conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ a_i \in A_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Aplicaciones

Definición

Una aplicación es una terna $f = (A, B, G)$, donde A y B son conjuntos y $G \subset A \times B$ tal que $\forall a \in A\ \exists! b \in B$ tal que $(a, b) \in G$. Escribiremos $f : A \to B$ y diremos que A es el conjunto inicial y que B es el conjunto final.

Si $(a, b) \in F$ diremos que b es imagen de a por f y escribiremos $f(a) = b$. También diremos que a es antiimagen de b.

El subconjunto de B formado por todas las imágenes de todos los elementos de A se denomina imagen de f y se denota por $Im(f)$, esto es, $Im(f) = \{f(a) : a \in A\}$.

Aplicaciones

Definición

Una aplicación es una terna $f = (A, B, G)$, donde A y B son conjuntos y $G \subset A \times B$ tal que $\forall a \in A\ \exists! b \in B$ tal que $(a, b) \in G$. Escribiremos $f : A \to B$ y diremos que A es el conjunto inicial y que B es el conjunto final.

Si $(a, b) \in F$ diremos que b es imagen de a por f y escribiremos $f(a) = b$. También diremos que a es antiimagen de b.

El subconjunto de B formado por todas las imágenes de todos los elementos de A se denomina imagen de f y se denota por $Im(f)$, esto es, $Im(f) = \{f(a) : a \in A\}$.

Aplicaciones

Definición

Una aplicación es una terna $f = (A, B, G)$, *donde* A *y* B *son conjuntos y* $G \subset A \times B$ *tal que* $\forall a \in A \ \exists! b \in B$ *tal que* $(a, b) \in G$. *Escribiremos* $f : A \to B$ *y diremos que* A *es el conjunto inicial y que* B *es el conjunto final.*

Si $(a, b) \in F$ *diremos que* b *es imagen de* a *por* f *y escribiremos* $f(a) = b$.

También diremos que a *es antiimagen de* b.

El subconjunto de B *formado por todas las imágenes de todos los elementos de* A *se denomina imagen de* f *y se denota por* $Im(f)$, *esto es,* $Im(f) = \{f(a) : a \in A\}$.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

- Si $G = \{(1, a), (2, b)\}$, entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 3 no tiene imagen.
- Si $G = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 1 tiene más de una imagen.
- Si $G = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ sí es una aplicación en la que a tiene dos antiimágenes y b no tiene ninguna.
- Si $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$, donde $G = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ no es una aplicación.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

- Si $G = \{(1, a), (2, b)\}$, entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 3 no tiene imagen.
- Si $G = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 1 tiene más de una imagen.
- Si $G = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ sí es una aplicación en la que a tiene dos antiimágenes y b no tiene ninguna.
- Si $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$, donde $G = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ no es una aplicación.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

- Si $G = \{(1, a), (2, b)\}$, entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 3 no tiene imagen.
- Si $G = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 1 tiene más de una imagen.
- Si $G = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ sí es una aplicación en la que a tiene dos antiimágenes y b no tiene ninguna.
- Si $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$, donde $G = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ no es una aplicación.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

- Si $G = \{(1, a), (2, b)\}$, entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 3 no tiene imagen.
- Si $G = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 1 tiene más de una imagen.
- Si $G = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ sí es una aplicación en la que a tiene dos antiimágenes y b no tiene ninguna.
- Si $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$, donde $G = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ no es una aplicación.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

- Si $G = \{(1, a), (2, b)\}$, entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 3 no tiene imagen.
- Si $G = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ no es una aplicación dado que 1 tiene más de una imagen.
- Si $G = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ entonces $f = (A, B, G)$ sí es una aplicación en la que a tiene dos antiimágenes y b no tiene ninguna.
- Si $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$, donde $G = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ no es una aplicación.

1. Dado un conjunto A, llamaremos *identidad* de A a la aplicación

$$\begin{aligned} i_A : A &\to A \\ a &\rightsquigarrow a \end{aligned}$$

2. Dado un subconjunto $B \subseteq A$, llamamos *inclusión* de B en A a la aplicación:

$$\begin{aligned} i : B &\to A \\ b &\rightsquigarrow b \end{aligned}$$

1. Dado un conjunto A, llamaremos *identidad* de A a la aplicación

$$\begin{aligned} i_A : A &\to A \\ a &\rightsquigarrow a \end{aligned}$$

2. Dado un subconjunto $B \subseteq A$, llamamos *inclusión* de B en A a la aplicación:

$$\begin{aligned} i : B &\to A \\ b &\rightsquigarrow b \end{aligned}$$

1. Sean A y B conjuntos y $A \times B$ el producto cartesiano de ambos. A las aplicaciones

$$\begin{aligned} p_A : A \times B &\to A \\ (a, b) &\rightsquigarrow a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_B : A \times B &\to B \\ (a, b) &\rightsquigarrow b \end{aligned}$$

las denominaremos *proyecciones* asociadas al producto cartesiano $A \times B$.

Tipos de aplicaciones

Sean A y B dos conjuntos y $f : A \to B$ una aplicación.

- f se dice *inyectiva* si elementos distintos de A tienen imágenes distintas por f, es decir, si verifica que

$$\forall a, a' \in A, \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

  o equivalentemente,

$$\forall a, a' \in A, \quad f(a) = f(a') \Leftrightarrow a = a'.$$

- f se dice *sobreyectiva*, *exhaustiva* o *suprayectiva*, si todo elemento de B es imagen de algún elemento de A, es decir, si

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b,$$

  o lo que es lo mismo $Im(f) = B$.

- f se dice *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva. En este caso todo elemento tiene una única antiimagen y por tanto la correspondencia f^{-1} de B en A que asocia a cada elemento de B su origen por f, es una aplicación a la que llamaremos *inversa* de f, y f se llama invertible.

Ejemplos:

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = 2x + 1$ es una aplicación biyectiva.
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_2(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni suprayectiva.

- f se dice *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva. En este caso todo elemento tiene una única antiimagen y por tanto la correspondencia f^{-1} de B en A que asocia a cada elemento de B su origen por f, es una aplicación a la que llamaremos *inversa* de f, y f se llama invertible.

Ejemplos:

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = 2x + 1$ es una aplicación biyectiva.
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_2(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni suprayectiva.

Definición

Sean $f : A \to B$ *una aplicación y* $A_1 \subseteq A$*. Entonces* $f_{|A_1} : A_1 \to B$ *tal que* $f_{|A_1}(a_1) = f(a_1)\ \forall a_1 \in A_1$ *es una aplicación que se denomina aplicación restringida a* A_1*.*

Composición de aplicaciones

Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos aplicaciones de manera que $B \subseteq C$ (habitualmente B=C). Llamaremos *aplicación compuesta* de f y g, $g \circ f$ a la aplicación $g \circ f : A \to D$ definida como $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para cualquier $a \in A$.

Ejemplos: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x + 2$. Entonces:
$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 4$.
$g \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 2$.

Ejemplos: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x + 2$. Entonces:
$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 4$.
$g \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 2$.

Proposición

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ aplicaciones:

1. *Si f es biyectiva entonces $f \circ f^{-1} = i_B$ y $f^{-1} \circ f = i_A$.*
2. *$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*
3. *Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.*
4. *Si f y g son suprayectivas entonces $g \circ f$ es suprayectiva.*
5. *Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.*
6. *Si f y g son biyectivas entonces $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

En general, la composición de aplicaciones no es conmutativa.

Relaciones binarias

Definición

Si A es un conjunto, una relación binaria en A es un subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times A$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ escribiremos $a\mathcal{R}b$.

Definición

Dado A un conjunto, una relación binaria $\leq$ en A se dice que es una relación binaria de orden si verifica:

1. $a \leq a \; \forall a \in A$. *(Propiedad Reflexiva).*
2. *Si* $a, b \in A$ *tal que* $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$. *(Propiedad Antisimétrica).*
3. *Si* $a, b, c \in A$ *tal que* $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$. *(Propiedad transitiva).*

Relaciones binarias

Definición

Si A es un conjunto, una relación binaria en A es un subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times A$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ escribiremos $a\mathcal{R}b$.

Definición

Dado A un conjunto, una relación binaria $\leq$ en A se dice que es una relación binaria de orden si verifica:

1. $a \leq a \ \forall a \in A$. *(Propiedad Reflexiva).*
2. Si $a, b \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$. *(Propiedad Antisimétrica).*
3. Si $a, b, c \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$. *(Propiedad transitiva).*

Relaciones binarias

Definición

Si A es un conjunto, una relación binaria en A es un subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times A$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ escribiremos $a\mathcal{R}b$.

Definición

Dado A un conjunto, una relación binaria $\leq$ en A se dice que es una relación binaria de orden si verifica:

1. *$a \leq a \ \forall a \in A$. (Propiedad Reflexiva).*
2. *Si $a, b \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$. (Propiedad Antisimétrica).*
3. *Si $a, b, c \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$. (Propiedad transitiva).*

Relaciones binarias

Definición

Si A es un conjunto, una relación binaria en A es un subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times A$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ escribiremos $a\mathcal{R}b$.

Definición

Dado A un conjunto, una relación binaria $\leq$ en A se dice que es una relación binaria de orden si verifica:

1. $a \leq a \; \forall a \in A$. (Propiedad Reflexiva).
2. Si $a, b \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$. (Propiedad Antisimétrica).
3. Si $a, b, c \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$. (Propiedad transitiva).

Definición

Un conjunto ordenado es un par $(A, \leq)$ donde A es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria de orden definida en A.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$.
2. Si X es un conjunto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.
3. $(\mathbb{N}^*, |)$ es un conjunto ordenado donde si $n, m \in \mathbb{N}$, $n|m$ si y sólo si n es divisor de m.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$.
2. Si X es un conjunto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.
3. $(\mathbb{N}^*, |)$ es un conjunto ordenado donde si $n, m \in \mathbb{N}$, $n|m$ si y sólo si n es divisor de m.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$.
2. Si X es un conjunto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.
3. $(\mathbb{N}^*, |)$ es un conjunto ordenado donde si $n, m \in \mathbb{N}$, $n|m$ si y sólo si n es divisor de m.

Definición

Sea A un conjunto ordenado, $B \subseteq A$ y $b \in B$.

1. *Diremos que b es un elemento maximal de B si no existe $b' \in B$ con $b \leq b'$ y $b \neq b'$.*
2. *Diremos que b es un elemento minimal de B si no existe $b' \in B$ con $b' \leq b$ y $b \neq b'$.*

Definición

Sea $(A \leq)$ *un conjunto ordenado,* $B \subseteq A$ *y* $a \in A$.

1. *Diremos que* a *es cota superior de* B *si* $b \leq a$ *para cada* $b \in B$.
2. *Diremos que* a *es cota inferior de* B *si* $a \leq b$ *para cada* $b \in B$.
3. *Diremos que* a *es el supremo de* B *si:*
    1. a *es cota superior de* B.
    2. *Si* a' *es otra cota superior de* B *entonces* $a \leq a'$.
4. *Diremos que* a *es el ínfimo de* B *si:*
    1. a *es cota inferior de* B.
    2. *Si* a' *es otra cota inferior de* B *entonces* $a' \leq a$.

Ejemplos: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Consideremos en A la relación $|$ ser divisor. Entonces $(A, |)$ es un conjunto ordenado. 1 es el único elemento minimal y 5, 6 y 8 son los elementos maximales de A.
Si $B = \{2, 4\}$, 4 y 8 son las cotas superiores y 1 y 2 son las cotas inferiores de B.
Si $C = \{2, 5\}$, este subconjunto no tiene cotas superiores y por tanto no tiene supremo. Sin embargo, 1 es una cota inferior de B (la única).

Ejemplos: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Consideremos en A la relación $|$ ser divisor. Entonces $(A, |)$ es un conjunto ordenado. 1 es el único elemento minimal y 5, 6 y 8 son los elementos maximales de A.

Si $B = \{2, 4\}$, 4 y 8 son las cotas superiores y 1 y 2 son las cotas inferiores de B.

Si $C = \{2, 5\}$, este subconjunto no tiene cotas superiores y por tanto no tiene supremo. Sin embargo, 1 es una cota inferior de B (la única).

Ejemplos: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Consideremos en A la relación $|$ ser divisor. Entonces $(A, |)$ es un conjunto ordenado. 1 es el único elemento minimal y 5, 6 y 8 son los elementos maximales de A.
Si $B = \{2, 4\}$, 4 y 8 son las cotas superiores y 1 y 2 son las cotas inferiores de B.
Si $C = \{2, 5\}$, este subconjunto no tiene cotas superiores y por tanto no tiene supremo. Sin embargo, 1 es una cota inferior de B (la única).

Ejemplos: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Consideremos en A la relación $|$ ser divisor. Entonces $(A, |)$ es un conjunto ordenado. 1 es el único elemento minimal y 5, 6 y 8 son los elementos maximales de A.
Si $B = \{2, 4\}$, 4 y 8 son las cotas superiores y 1 y 2 son las cotas inferiores de B.
Si $C = \{2, 5\}$, este subconjunto no tiene cotas superiores y por tanto no tiene supremo. Sin embargo, 1 es una cota inferior de B (la única).

Definición

Un conjunto ordenado $(A, \leq)$ *se dice que es un retículo si* $\forall a, b \in A$ $\exists \inf\{a, b\} \wedge \exists \sup\{a, b\}$.

Ejemplo: Si X es un conjunto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo. Claramente si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $\sup\{A, B\} = A \cup B$ e $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

Definición

Un conjunto ordenado $(A, \leq)$ *se dice que es un retículo si* $\forall a, b \in A$ $\exists \text{ ínf}\{a, b\} \wedge \exists \sup\{a, b\}$.

Ejemplo: Si X es un conjunto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo. Claramente si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $\sup\{A, B\} = A \cup B$ e $\text{ínf}\{A, B\} = A \cap B$.

Relaciones de equivalencia

Dado un conjunto A, llamaremos *relación de equivalencia* a una relación binaria en A que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. A las relaciones de equivalencia las representamos mediante el símbolo $\sim$, de modo que si dos elementos a y b están relacionados $a \sim b$, y en caso contrario, $a \not\sim b$. Ejemplos:

1. En el conjunto formado por todas las rectas del plano, la relación ser paralelas es de equivalencia.
2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, fijado un entero $p > 1$, la relación definida por

$$m \sim n \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z} : m - n = t \cdot p, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

es de equivalencia y la denominaremos congruencia módulo p.

Relaciones de equivalencia

Dado un conjunto A, llamaremos *relación de equivalencia* a una relación binaria en A que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. A las relaciones de equivalencia las representamos mediante el símbolo $\sim$, de modo que si dos elementos a y b están relacionados $a \sim b$, y en caso contrario, $a \not\sim b$. Ejemplos:

1. En el conjunto formado por todas las rectas del plano, la relación ser paralelas es de equivalencia.
2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, fijado un entero $p > 1$, la relación definida por

$$m \sim n \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z} : m - n = t \cdot p, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

   es de equivalencia y la denominaremos congruencia módulo p.

Definición

Sea A un conjunto no vacío. Una ley de composición interna en A es una aplicación $*: A \times A \to A$. Si $(a, b) \in A \times A$, la imagen de (a, b) por $*$ se denota $a * b$.

Ejemplos:

- $. : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la imagen de $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el producto $a \cdot b$ en $\mathbb{N}$.
- La suma $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una ley de composición interna en $\mathbb{R}$.
- La resta de números naturales no es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$.

Definición

Sea A un conjunto no vacío. Una ley de composición interna en A es una aplicación $* : A \times A \to A$. Si $(a, b) \in A \times A$, la imagen de (a, b) por $*$ se denota $a * b$.

Ejemplos:

- $. : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la imagen de $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el producto $a \cdot b$ en $\mathbb{N}$.
- La suma $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una ley de composición interna en $\mathbb{R}$.
- La resta de números naturales no es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$.

Definición

Sea A un conjunto no vacío. Una ley de composición interna en A es una aplicación $* : A \times A \to A$. Si $(a, b) \in A \times A$, la imagen de (a, b) por $*$ se denota $a * b$.

Ejemplos:

- $. : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la imagen de $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el producto $a \cdot b$ en $\mathbb{N}$.
- La suma $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una ley de composición interna en $\mathbb{R}$.
- La resta de números naturales no es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$.

Definición

Sea A un conjunto no vacío. Una ley de composición interna en A es una aplicación $*: A \times A \to A$. Si $(a, b) \in A \times A$, la imagen de (a, b) por $*$ se denota $a * b$.

Ejemplos:

- $. : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la imagen de $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el producto $a \cdot b$ en $\mathbb{N}$.
- La suma $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una ley de composición interna en $\mathbb{R}$.
- La resta de números naturales no es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$.

Definición

Sea $*$ una ley de composición interna en A.

1. Diremos que $*$ satisface la propiedad conmutativa si $a * b = b * a$ $\forall a, b \in A$.
2. Diremos que $*$ satisface la propiedad asociativa si $(a * b) * c = a * (b * c)$ $\forall a, b, c \in A$.
3. Dado $e \in A$, diremos que e es elemento neutro de $*$ si $e * a = a * e$ $\forall a \in A$.
4. Si $*$ tiene elemento neutro e, dado $a \in A$ diremos que $b \in A$ es el elemento simétrico de a si $a * b = b * a = e$.

Definición

Sea $*$ una ley de composición interna en A.

1. *Diremos que $*$ satisface la propiedad conmutativa si $a * b = b * a$ $\forall a, b \in A$.*
2. *Diremos que $*$ satisface la propiedad asociativa si $(a * b) * c = a * (b * c)$ $\forall a, b, c \in A$.*
3. *Dado $e \in A$, diremos que e es elemento neutro de $*$ si $e * a = a * e$ $\forall a \in A$.*
4. *Si $*$ tiene elemento neutro e, dado $a \in A$ diremos que $b \in A$ es el elemento simétrico de a si $a * b = b * a = e$.*

Definición

Sea $*$ *una ley de composición interna en* A.

1. *Diremos que* $*$ *satisface la propiedad conmutativa si* $a * b = b * a$ $\forall a, b \in A$.
2. *Diremos que* $*$ *satisface la propiedad asociativa si* $(a * b) * c = a * (b * c)$ $\forall a, b, c \in A$.
3. *Dado* $e \in A$, *diremos que* e *es elemento neutro de* $*$ *si* $e * a = a * e$ $\forall a \in A$.
4. *Si* $*$ *tiene elemento neutro* e, *dado* $a \in A$ *diremos que* $b \in A$ *es el elemento simétrico de* a *si* $a * b = b * a = e$.

Definición

Sea $*$ *una ley de composición interna en* A.

1. *Diremos que* $*$ *satisface la propiedad conmutativa si* $a * b = b * a$ $\forall a, b \in A$.
2. *Diremos que* $*$ *satisface la propiedad asociativa si* $(a * b) * c = a * (b * c)$ $\forall a, b, c \in A$.
3. *Dado* $e \in A$, *diremos que* e *es elemento neutro de* $*$ *si* $e * a = a * e$ $\forall a \in A$.
4. *Si* $*$ *tiene elemento neutro* e, *dado* $a \in A$ *diremos que* $b \in A$ *es el elemento simétrico de* a *si* $a * b = b * a = e$.

Definición

Un grupo es un par $(G, *)$ donde G es un conjunto no vacío y $*$ es una ley de composición interna en G que verifica:

1. *$*$ es asociativa.*
2. *$\exists e \in G$ elemento neutro de $*$.*
3. *$\forall g \in G$ existe elemento simétrico de g.*

Diremos que un grupo $(G, *)$ es abeliano si $*$ es conmutativa.

Definición

Un grupo es un par $(G, *)$ donde G es un conjunto no vacío y $*$ es una ley de composición interna en G que verifica:

1. *$*$ es asociativa.*
2. *$\exists e \in G$ elemento neutro de $*$.*
3. *$\forall g \in G$ existe elemento simétrico de g.*

Diremos que un grupo $(G, *)$ es abeliano si $*$ es conmutativa.

Definición

Un grupo es un par $(G, *)$ donde G es un conjunto no vacío y $*$ es una ley de composición interna en G que verifica:

1. *$*$ es asociativa.*
2. *$\exists e \in G$ elemento neutro de $*$.*
3. *$\forall g \in G$ existe elemento simétrico de g.*

Diremos que un grupo $(G, *)$ es abeliano si $*$ es conmutativa.

Proposición

Sea G un grupo. Entonces:

1. El elemento neutro es único.
2. Si $g \in G$, g tiene un único elemento simétrico.

Definición

Un cuerpo es una terna $(K, +, \cdot)$ donde K es un conjunto no vacío y $+, \cdot$ son leyes de composición internas en K tales que:

1. *$(K, +)$ es un grupo abeliano. Denotaremos por 0 el elemento neutro de K y si $a \in K$ denotaremos por $-a$ al elemento simétrico de a.*
2.
   1. *$\cdot$ es asociativa.*
   2. *$\cdot$ es conmutativa.*
   3. *Existe $1 \in K \setminus \{0\}$ tal que $1 \cdot a = a \; \forall a \in K \setminus \{0\}$.*
   4. *$\forall a \in K \setminus \{0\}$ existe $a^{-1} \in K \setminus \{0\}$ tal que $a^{-1} * a = 1$. A a^{-1} le llamaremos el inverso de a.*
   5. *$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \; \forall a, b, c \in K$.*

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.
2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.
3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

Definición

Sean A y B conjuntos. Una ley de composición externa de A sobre B es una aplicación $\nu : A \times B \to B$.

Ejemplo: Consideramos $\nu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\nu(\lambda, (x, y)) = (\lambda x, \lambda y)$. Entonces ν es una ley de composición externa de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Definición

Sean A y B conjuntos. Una ley de composición externa de A sobre B es una aplicación $\nu : A \times B \to B$.

Ejemplo: Consideramos $\nu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\nu(\lambda, (x, y)) = (\lambda x, \lambda y)$. Entonces ν es una ley de composición externa de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Definición

Si $(K, +, \cdot)$ *es un cuerpo, se define:*

$$K[x] = \{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n : \; a_i \in K, 1 \leq i \leq n, \; n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *con* $a_n \neq 0$ *diremos que el grado de* $p(x)$ *es* n*. Cuando* $p(x) = a \in K$ *diremos que el grado de* $p(x)$ *es* 0*. A* a_i *cuando* $i = 0, 1, \ldots, n$ *se les llama coeficientes de* $p(x)$*.*

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

Si $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ *y el grado de* $p(x)$ *es mayor que* 0 *entonces existen* $a, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *tales que* $p(x) = a \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$*.*

Definición

Si $(K, +, \cdot)$ *es un cuerpo, se define:*

$$K[x] = \{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n : \; a_i \in K, \, 1 \leq i \leq n, \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *con* $a_n \neq 0$ *diremos que el grado de* $p(x)$ *es* n*. Cuando* $p(x) = a \in K$ *diremos que el grado de* $p(x)$ *es* 0*. A* a_i *cuando* $i = 0, 1, \ldots, n$ *se les llama coeficientes de* $p(x)$*.*

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

Si $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ *y el grado de* $p(x)$ *es mayor que* 0 *entonces existen* $a, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *tales que* $p(x) = a \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$*.*

Definición

Si $(K, +, \cdot)$ *es un cuerpo, se define:*

$$K[x] = \{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n : \ a_i \in K, \, 1 \leq i \leq n, \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *con* $a_n \neq 0$ *diremos que el grado de* $p(x)$ *es* n*. Cuando* $p(x) = a \in K$ *diremos que el grado de* $p(x)$ *es* 0*. A* a_i *cuando* $i = 0, 1, \ldots, n$ *se les llama coeficientes de* $p(x)$*.*

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

Si $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ *y el grado de* $p(x)$ *es mayor que* 0 *entonces existen* $a, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *tales que* $p(x) = a \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$*.*