9. LA TOPOGRAFÍA SUBTERRÁNEA. JUSTIFICACIÓN

EJERCICIOS

9.1.- Calcula la pendiente, la longitud y la orientación de una galería cuyos extremos A y B tienen las siguientes coordenadas:

A (1.000 ; 1.000 ; 100) B (970 ; 1.100 ; 101,5)

La longitud D_N total de la galería es la distancia natural entre los puntos *A* y *B*:

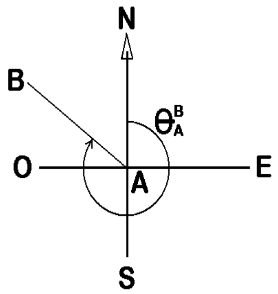
$$D_N = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} = 104{,}414m$$

La longitud horizontal D_R de la galería es la distancia reducida entre los puntos *A* y *B*:

$$D_R = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 104{,}403m$$

La pendiente es la relación entre el desnivel existente entre los puntos extremos *A* y *B* de la galería y la distancia reducida entre ellos:

$$p = \frac{Z_B - Z_A}{D_R} = 0{,}0144 = 1{,}44\%$$



La orientación de la galería es el acimut de la alineación formada por los dos puntos extremos. Las posiciones relativas aproximadas de los puntos *A* y *B*, deducidas de sus coordenadas planas, se muestran en la figura. Por tanto, el acimut se calcula:

$$\theta_A^B = 400^g - arc\ tg \frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} = 381{,}445^g$$

9.2.- De un punto A, de coordenadas (1.000 ; 1.000 ; 100) parte una galería de 25m de longitud (en distancia natural) y con una pendiente descendente del 3%. Calcula las coordenadas del otro extremo B de la galería, sabiendo que su orientación corresponde a un acimut de 130^g.

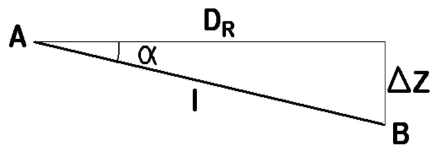
La pendiente de la galería es igual a la tangente del ángulo *α* que forma la galería con su proyección horizontal:

$$p = \frac{\Delta Z}{D_R} = tg\ \alpha = 3\% = 0{,}03$$

$$\alpha = arc\ tg\ 0{,}03 = 1{,}909^g\ \%$$

$$D_R = l\ cos\ \alpha = 24{,}989m$$

$$\Delta Z = -l\ sen\ \alpha = -0{,}750 = Z_A^B$$



Como el acimut de la galería es $\theta_A{}^B = 130^g$,

$$X_B = X_A + D_R \ sen \ \theta_A^B = 1.022{,}265 m$$

$$Y_B = Y_A + D_R \ cos \ \theta_A^B = 988{,}655 m$$

$$Z_B = Z_A + Z_A^B = 99{,}250 m$$

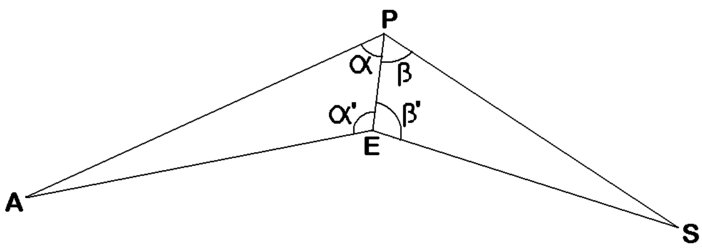
10. INSTRUMENTOS USADOS EN TOPOGRAFÍA SUBTERRÁNEA

EJERCICIOS

10.1.- Ante la imposibilidad de estacionar en un punto E de un itinerario en una galería minera, se hizo estación en otro punto P, visando a las estaciones anterior (A) y siguiente (S) del mismo y a la plomada situada en E. Se obtuvieron los siguientes datos: $D_{PA} = 27,425m$ $\quad$ $D_{PS} = 38,596m$

α ***= ángulo APE =*** $51,286^g$ $\quad$ β ***= ángulo EPS =*** $69,772^g$

Se midió también la distancia reducida $D_{PE} = 2,143m$***. Calcula las distancias y el ángulo interior que se habrían medido de haber podido estacionar en E.***



Aplicando el teorema del coseno en el triángulo *APE*:

$$D_{AE}^2 = D_{AP}^2 + D_{PE}^2 - 2\ D_{AP}\ D_{PE}\ \cos\alpha$$

$$D_{AE} = 25,986m$$

Aplicando el teorema del seno en el mismo triángulo:

$$\frac{D_{AE}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{D_{AP}}{\operatorname{sen}\alpha'} \qquad \alpha' = 144,925^g$$

Operando del mismo modo en el triángulo *SPE*:

$$D_{ES}^2 = D_{PS}^2 + D_{PE}^2 - 2\ D_{PS}\ D_{PE}\ \cos\beta$$

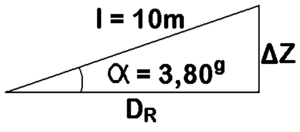
$$D_{ES} = 37,665m$$

$$\frac{D_{ES}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{D_{PS}}{\operatorname{sen}\beta'} \qquad \beta' = 127,005^g$$

El ángulo interior formado por los tramos *AE* y *ES* del itinerario será:

$$\alpha' + \beta' = 271,930^g$$

10.2.- Con un eclímetro colgado se midió la inclinación, respecto a la horizontal, de una galería, que resulto ser de $3,80^g$***. Sabiendo que la longitud inclinada de la galería es de 10m, calcula su distancia reducida y el desnivel entre sus extremos.***



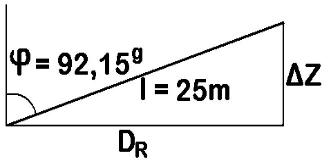
El ángulo vertical medido es una altura de horizonte, es decir un ángulo referido a la horizontal. Por tanto:

$$D_R = l\cos\alpha = 9,982m$$

$$\Delta Z = l \ sen \ \alpha = 0{,}597m$$

Según sea ascendente o descendente, el desnivel entre los extremos de la galería será positivo o negativo.

10.3.- Calcula la distancia reducida de una alineación cuya distancia natural es de 25m. El ángulo vertical de la alineación corresponde a una distancia cenital φ = 92,15^g. Calcula el desnivel entre los extremos de la alineación



El ángulo medido es una distancia cenital, es decir un ángulo referido a la vertical. Por tanto:

$$D_R = l \ sen \ \varphi = 24{,}810m$$
$$\Delta Z = l \cos \varphi = 3{,}075m$$

10.4.- Calcula la corrección por alargamiento de un hilo de acero con el que se midió una longitud inicial L = 100m. El hilo tenía un diámetro de 1mm y estaba lastrado con una pesa de 5kg.

Aplicamos la expresión que aparece en 10.3.2.

$$\Delta L = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{P L}{\Omega E}$$

Siendo: ΔL: corrección por alargamiento
$L = 100m = 10.000cm$
γ = peso específico del acero = $0{,}0079kg/cm^3$
E = módulo de elasticidad del acero = $2.100.000kg/cm^2$
$P = 5kg$

Como el diámetro del hilo es de 1mm, el radio R será 0,5mm. Por tanto:

$$\Omega = \text{sección del hilo en } cm^2 = \pi R^2 = 0{,}0079cm^2$$

Aplicando la expresión anterior:

$$\Delta L = 3{,}22cm = 0{,}032m$$

Esta corrección siempre debe sumarse a la longitud medida. Por tanto, la longitud corregida será:

$$L_T = 100 + 0{,}032 = 100{,}032m$$

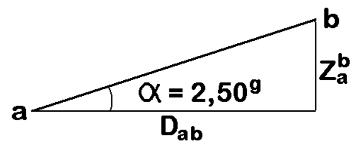
10.5.- En una galería se dispone de dos puntos a y b, de coordenadas planas (100 ; 100) y (120 ; 130) respectivamente. Se ha determinado el ángulo vertical de la alineación a-b, que es de α = 2,5^g ascendente. Calcula la distancia reducida y el desnivel entre ambos puntos. Calcula la pendiente de la alineación.

Calculamos la distancia reducida D_{ab}:

$$D_{ab} = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2} = 36{,}056m$$

De la figura:

$$Z_a^b = D_{ab}\ tg\,\alpha = 1{,}416\,m$$



Por tanto:

$$p = \frac{Z_a^b}{D_{ab}} = tg\ \alpha = 0{,}039 = 3{,}9\%$$

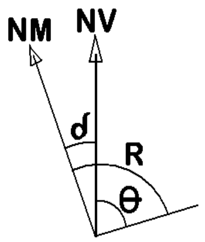
10.6.- Con una brújula colgada se ha medido el rumbo de una alineación. Se tomaron dos lecturas, una con la aguja norte (83,6^g) y otra con la aguja sur (284,0^g). Calcula el acimut de la alineación, sabiendo que la declinación magnética es 5,5^g Oeste.

Antes de promediar las lecturas tomadas con los dos extremos de la aguja debemos corregir la correspondiente a la aguja Sur, sumándole o restándole 200^g. Así, el valor medio del rumbo será:

$$R = \frac{L_N + (L_S \pm 200^g)}{2} = \frac{83{,}6^g + (284^g - 200^g)}{2} = 83{,}8^g$$

Como la declinación (δ) es occidental, calculamos el acimut haciendo:

$$\theta = R - \delta = 83{,}8^g - 5{,}5^g = 78{,}3^g$$



11. MÉTODOS TOPOGRÁFICOS SUBTERRÁNEOS

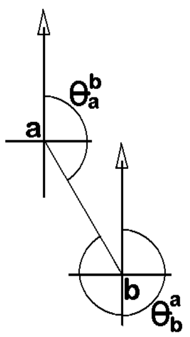
<u>EJERCICIOS</u>

11.1.- ***Para levantar un punto inaccesible en el frente de una explotación minera de interior se situaron y se levantaron dos puntos a y b próximos al frente. Se estacionó un teodolito en cada uno de ellos y se visó al otro punto conocido y al punto incógnita P. Calcula las coordenadas de P, conociendo las de los puntos de estación y las lecturas horizontales tomadas:***

$X_a = 110 \qquad Y_a = 115$

$X_b = 112 \qquad Y_b = 110$

Estación	*Punto visado*	*Lectura horizontal*
a	*P*	*202,57^g*
	b	*288,40^g*
b	*a*	*46,32^g*
	P	*141,86^g*



Calculamos el acimut de la alineación *a-b*. Para ello situamos ambos puntos en un croquis en función de sus coordenadas planas. En este caso, el acimut será:

$$\theta_a^b = 100^g + arc\ tg\frac{|Y_b - Y_a|}{|X_b - X_a|} = 175{,}776^g$$

$$\theta_b^a = \theta_a^b \pm 200^g = 375{,}776^g$$

Calculamos la distancia reducida D_{ab}:

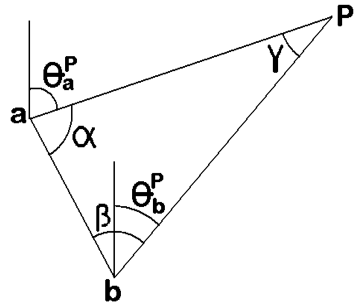
$$D_{ab} = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2} = 5{,}385m$$

Para resolver el triángulo *abP* comenzamos por calcular sus ángulos interiores a partir de las lecturas horizontales de la libreta de campo:

$$\alpha = L_a^b - L_a^P = 288{,}40^g - 202{,}57^g = 85{,}83^g$$

$$\beta = L_b^P - L_b^a = 141{,}86^g - 46{,}32^g = 95{,}54^g$$

$$\gamma = 200^g - \alpha - \beta = 18{,}63^g$$



De la figura se deduce:

$$\theta_a^P = \theta_a^b - \alpha = 89{,}946^g$$

$$\theta_b^P = \theta_b^a + \beta - 400^g = 71{,}316^g$$

Calculamos las distancias reducidas D_{aP} y D_{bP} aplicando el teorema del seno:

$$\frac{D_{aP}}{sen\ \beta}=\frac{D_{bP}}{sen\ \alpha}=\frac{D_{ab}}{sen\ \gamma} \qquad D_{aP}=18{,}621m \qquad D_{bP}=18{,}206m$$

Finalmente:

$$X_P = X_a + D_{aP}\ sen\ \theta_a^P = 128{,}389m$$
$$Y_P = Y_a + D_{aP}\ cos\ \theta_a^P = 117{,}929m$$

Comprobamos los resultados calculando también las coordenadas de *P* a partir del punto *b*:

$$X_P = X_b + D_{bP}\ sen\ \theta_b^P = 128{,}389m$$
$$Y_P = Y_b + D_{bP}\ cos\ \theta_b^P = 117{,}929m$$

11.2.- Se desea realizar un itinerario planimétrico encuadrado, recorriendo una galería que enlaza dos pozos A y D. A través de los pozos se determinaron mediante plomadas las coordenadas de los puntos interiores a y d y se transmitió la orientación, calculando los acimutes de las alineaciones de interior a-a' y d-d'. Calcula las coordenadas compensadas de las estaciones del itinerario, sabiendo que se empleó una estación total, orientándola en todas las estaciones.

$\theta_a^{a'} = 15{,}40^g \qquad \theta_d^{d'} = 205{,}50^g$

$X_a = 100 \quad Y_a = 100 \qquad X_d = 212{,}33 \quad Y_d = 119{,}26$

Estación	Punto visado	L. acimutal	D. reducida
a	a'	$15{,}40^g$	
	b	87,32	45,30 m
b	a	287,32	
	c	91,56	30,85
c	b	291,56	
	d	89,15	37,76
d	c	289,15	
	d'	205,42	

Puesto que el instrumento se orientó en todas las estaciones del itinerario, las lecturas acimutales de la tabla anterior son acimutes. Por tanto, el error de cierre acimutal será:

$$e_{ca} = (\theta_d^{d'})_{TOP} - (\theta_d^{d'})_{TRIG} = 205{,}42^g - 205{,}50^g = -\ 0{,}08^g$$

El acimut $\theta_d^{d'}$ topográfico, que se ha determinado mediante la última visual del itinerario, incorpora los errores acimutales cometidos a lo largo de éste. El acimut trigonométrico es el que nos sirve de referencia y procede de la orientación que se transmitió a la alineación *d-d'*. Puesto que el itinerario está formado por *4* estaciones:

$$f_c = \frac{e_{ca}}{4} = -\ 0{,}02^g$$

Los acimutes se compensan teniendo en cuenta que los errores acimutales tienden a acumularse a medida que avanza el itinerario. Los acimutes compensados serán:

$$(\theta_a^b)_C = \theta_a^b - f_c = 87{,}32^g - (-0{,}02^g) = 87{,}34^g$$

$$(\theta_b^c)_C = \theta_b^c - 2\,f_c = 91{,}56^g - (-0{,}04^g) = 91{,}60^g$$

$$(\theta_c^d)_C = \theta_c^d - 3\,f_c = 89{,}15^g - (-0{,}06^g) = 89{,}21^g$$

$$(\theta_d^{d'})_C = \theta_d^{d'} - 4\,f_c = 205{,}42^g - (-0{,}08^g) = 205{,}50^g$$

El acimut $\theta_d^{d'}$, una vez compensado, debe coincidir con el trigonométrico. Las coordenadas (todavía sin compensar) se calculan con las distancias reducidas de la libreta de campo y los acimutes compensados. Las expresiones genéricas a emplear para calcular las coordenadas parciales de una estación *j* respecto a la anterior *i* son las siguientes:

$$X_i^j = D_{ij}\ sen\,(\theta_i^j)_C$$

$$Y_i^j = D_{ij}\ cos\,(\theta_i^j)_C$$

Con ellas obtenemos las correspondientes columnas de la tabla siguiente:

	Parciales sin compensar		Parciales compensadas		Totales	
	X	Y	X	Y	X	Y
a					100,000	100,000
	44,407	8,949	44,455	8,895		
b					144,455	108,895
	30,582	4,059	30,615	4,034		
c					175,070	112,929
	37,219	6,369	37,259	6,331		
d					212,330	119,260

$\Sigma X_i^j = 112{,}208$ $\Sigma Y_i^j = 19{,}377$

$\Sigma|X_i^j| = 112{,}208$ $\Sigma|Y_i^j| = 19{,}377$

Para calcular los errores de cierre en coordenadas se han obtenido los sumatorios de los valores de cada de las columnas anteriores; cada sumatorio debería coincidir con la coordenada parcial de la última estación respecto a la primera. El error de cierre en cada una de las coordenadas se obtiene comparando el valor del sumatorio con la diferencia entre las coordenadas conocidas de *a* y *d*:

$$e_{cx} = \Sigma X_i^j - (X_d - X_a) = 112{,}208 - (212{,}33 - 100{,}00) = -0{,}122$$

$$e_{cy} = \Sigma Y_i^j - (Y_d - Y_a) = 19{,}377 - (119{,}26 - 100{,}00) = 0{,}117$$

Para compensar las coordenadas calculamos los sumatorios de los valores absolutos de las dos columnas anteriores. Estos sumatorios coinciden con los anteriores puesto que todas las coordenadas son positivas. Para compensar cada coordenada parcial hacemos:

$$(X_i^j)_C = X_i^j - e_{cx}\,\frac{|X_i^j|}{\Sigma|X_i^j|}$$

Se actúa de igual modo con las coordenadas *Y* y se obtienen las coordenadas parciales *X* e *Y* compensadas de la tabla anterior. Finalmente, por arrastre de coordenadas, se obtienen las coordenadas totales.

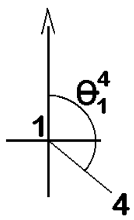
11.3.- ***Se ha realizado un itinerario encuadrado entre dos puntos 1 y 4, de coordenadas planas:*** ***X_1 = 1.000*** ***Y_1 = 1.000***

X_4 = 1.103,703 ***Y_4 = 919,414***

En el punto 1 se disponía de una visual de acimut conocido. El instrumento topográfico se orientó en todas las estaciones. Calcula las coordenadas de los puntos de estación, con la siguiente libreta de campo:

Estación	***Punto visado***	***Acimut***	***D. reducida***
1	***2***	***$148{,}52^g$***	***38,20m***
2	***3***	***136,97***	***49,67***
3	***4***	***142,70***	***43,58***

Cuando sólo se dispone de una visual de acimut conocido en una de las estaciones extremas, el itinerario no puede compensarse con el método empleado en el ejercicio 11.2. En casos como el que nos ocupa calcularemos el acimut y la distancia reducida de la alineación que forman las estaciones extremas *1* y *4*, tanto mediante las coordenadas conocidas de ambos puntos (valores "trigonométricos") como empleando las coordenadas obtenidas al calcular el itinerario (valores "topográficos"). La diferencia entre los dos acimutes se resta a todos los acimutes del itinerario. Las distancias se corrigen dividiéndolas por la relación entre las dos distancias que hemos calculado.



Calculamos el acimut trigonométrico de la alineación *1-4*. Para ello situamos ambos puntos en un croquis en función de sus coordenadas planas:

$$(\theta_1^4)_{TRIG} = 100^g + arc\ tg \frac{|Y_4 - Y_1|}{|X_4 - X_1|} = 142{,}055^g$$

La distancia reducida entre ambas estaciones será:

$$(D_{14})_{TRIG} = \sqrt{(X_4 - X_1)^2 + (Y_4 - Y_1)^2} = 131{,}333m$$

Calculamos las coordenadas parciales de cada estación respecto a la anterior, empleando para ello los valores que figuran en la libreta de campo. Como en el ejercicio anterior, las expresiones genéricas son las siguientes:

$$X_i^j = D_{ij}\ sen\ (\theta_i^j)_C$$

$$Y_i^j = D_{ij}\ cos\ (\theta_i^j)_C$$

	X	*Y*
1		
	27,632	*-26,376*
2		
	41,527	*-27,250*
3		
	34,139	*-27,088*
4		

Las coordenadas parciales topográficas de *4* respecto a *1* se obtienen sumando las columnas de la tabla anterior:

$$X_1^4 = X_1^2 + X_2^3 + X_3^4 = 103{,}299m$$
$$Y_1^4 = Y_1^2 + Y_2^3 + Y_3^4 = -80{,}714m$$

Con ayuda de la figura anterior calculamos el acimut topográfico:

$$(\theta_1^4)_{TOP} = 100^g + arc\ tg \frac{|Y_1^4|}{|X_1^4|} = 142{,}225^g$$

La distancia reducida será:

$$(D_{14})_{TOP} = \sqrt{(X_1^4)^2 + (Y_1^4)^2} = 131{,}093m$$

Para corregir las coordenadas hacemos:

$$c = (\theta_1^4)_{TOP} - (\theta_1^4)_{TRIG} = 0{,}17^g$$
$$f = \frac{(D_{14})_{TOP}}{(D_{14})_{TRIG}} = 0{,}998$$

y corregimos acimutes y distancias:

$$(\theta_1^2)_C = \theta_1^2 - c = 148{,}52^g - 0{,}17^g = 148{,}350^g$$
$$(\theta_2^3)_C = \theta_2^3 - c = 136{,}97^g - 0{,}17^g = 136{,}800^g$$
$$(\theta_3^4)_C = \theta_3^4 - c = 142{,}70^g - 0{,}17^g = 142{,}530^g$$
$$(D_{12})_C = D_{12} / f = 38{,}20m / 0{,}998 = 38{,}270m$$
$$(D_{23})_C = D_{23} / f = 49{,}67m / 0{,}998 = 49{,}761m$$
$$(D_{34})_C = D_{34} / f = 43{,}58m / 0{,}998 = 43{,}660m$$

Con los valores corregidos de distancias y acimutes, y las expresiones anteriores, obtenemos las coordenadas parciales compensadas de la tabla siguiente. Las coordenadas totales se obtienen por arrastre de coordenadas:

	Parciales compensadas		Totales	
	X	*Y*	*X*	*Y*
1			*1.000,000*	*1.000,000*
	27,753	*-26,351*		
2			*1.027,753*	*973,649*
	41,676	*-27,189*		
3			*1.069,429*	*946,460*
	34,274	*-27,046*		
4			*1.103,703*	*919,414*

Terminamos comprobando que los valores de X_4 y de Y_4 obtenidos (*1.103,703* y *919,414*, respectivamente) coinciden con los valores conocidos de las coordenadas.

11.4.- ***Se estacionó una estación total en un punto a próximo al frente de una explotación minera. Se lanzó una visual a la estación d y, a continuación, se visaron***

dos puntos del frente P y P’. Calcula las coordenadas de los puntos visados, conocidas las de a y d y la libreta de campo.

$$X_a = 100 \qquad Y_a = 100 \qquad Z_a = 100$$
$$X_d = 200 \qquad Y_d = 50$$

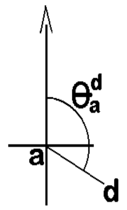
Estación	i	Punto visado	L. acimutal	D. reducida	t	a_p
a	1,50	d	$314,28^g$		–	
		P	207,42	27,550m	0,320	1,60
		P’	38,96	32,180	0,210	1,65

Nota: La determinación del desnivel se llevó por el piso de la labor.

La visual lanzada al punto *d*, en la que el operador se limita a anotar la lectura acimutal, nos servirá para calcular la corrección de orientación en la estación *a*:

$$(\theta_a^d)_{TRIG} = 100^g + arc\ tg \frac{|Y_d - Y_a|}{|X_d - X_a|} = 129,517^g$$

$$Co_a = \theta_a^d - L_a^d = 129,517^g - 314,28^g = -184,763^g$$



Calculamos los acimutes correspondientes a las visuales a los puntos *P* y *P’*:

$$\theta_a^P = Co_a + L_a^P = -184,763^g + 207,42^g = 22,657^g$$
$$\theta_a^{P'} = Co_a + L_a^{P'} = -184,763^g + 38,96^g + 400^g = 254,197^g$$

En el segundo caso, hemos sumado 400^g para evitar que el acimut sea negativo. Las coordenadas se calculan:

$$X_P = X_a + D_{aP}\ sen\ \theta_a^P = 100,000 + 27,550\ sen\ 22,657^g = 109,600m$$
$$Y_P = Y_a + D_{aP}\ cos\ \theta_a^P = 100,000 + 27,550\ cos\ 22,657^g = 125,823m$$
$$Z_P = Z_a + t + i - a_p = 100,00 + 0,320 + 1,50 - 1,60 = 100,22m$$

$$X_{P'} = X_a + D_{aP'}\ sen\ \theta_a^{P'} = 75,796m$$
$$Y_{P'} = Y_a + D_{aP'}\ cos\ \theta_a^{P'} = 78,794m$$
$$Z_{P'} = Z_a + t + i - a_p = 100,06m$$

11.5.- Calcular el desnivel entre los puntos a y b de un levantamiento de interior en los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> Los dos puntos están señalados en el piso de la labor.

t = 0,20m   i = 1,50m   m = 1,70m

<u>Caso 2.</u> a está señalados en el piso de la labor y b en el techo.

t = 0,20m   i = 1,50m   m’ = 1,10m

<u>Caso 3.</u> a está señalados en el techo de la labor y b en el piso.

t = 0,20m   i’ = 1,00m   m = 1,70m

<u>Caso 4.</u> Los dos puntos están señalados en el techo de la labor.

t = 0,20m   i ‘ = 1,00m   m’ = 1,10m

Las expresiones a emplear figuran en el apartado 11.3.1 de los apuntes de la asignatura.

1) $Z_a^b = t + i - m = 0,20 + 1,50 - 1,70 = 0,00m$

2) $Z_a^b = t + i + m' = 0,20 + 1,50 + 1,10 = 2,80m$

3) $Z_a^b = t - i' - m = 0{,}20 - 1{,}00 - 1{,}70 = -2{,}50m$

4) $Z_a^b = t - i' + m' = 0{,}20 - 1{,}00 + 1{,}10 = 0{,}30m$

11.6.- Para determinar las coordenadas de la estación 2, se ha realizado un itinerario encuadrado de interior entre las estaciones 1 y 3, de coordenadas planas: 1 (100 ; 100), 3 (41,50 ; 134,50). En la estación 1 se disponía de una dirección de acimut conocido 1-1' que se empleó para orientar el instrumento topográfico. En la estación 3 se disponía también de una dirección 3-3' de acimut conocido: $\theta_3^{3'} = 260{,}40^g$. Resuelve el itinerario con la siguiente libreta de campo, sabiendo que el instrumento topográfico se orientó en todas las estaciones:

Estación	Punto visado	Acimut	Distancia media
1	2	345,82	25,372
2	3	327,15	43,368
3	3'	260,34	

Se resuelve como el ejercicio 11.2. El error de cierre acimutal será:

$$e_{ca} = (\theta_3^{3'})_{TOP} - (\theta_3^{3'})_{TRIG} = 260{,}34^g - 260{,}40^g = -\,0{,}06^g$$

Puesto que el itinerario está formado por 3 estaciones:

$$f_c = \frac{e_{ca}}{3} = -\,0{,}02^g$$

Los acimutes compensados serán:

$$(\theta_1^2)_C = \theta_1^2 - f_c = 345{,}84^g$$

$$(\theta_2^3)_C = \theta_2^3 - 2\,f_c = 327{,}19^g$$

$$(\theta_3^{3'})_C = \theta_3^{3'} - 3\,f_c = 260{,}40^g$$

El acimut $\theta_3^{3'}$, una vez compensado, debe coincidir con el trigonométrico.

	Parciales sin compensar		Parciales compens.		Totales	
	X	Y	X	Y	X	Y
1					100,000	100,000
	-19,074	16,731	-19,059	16,637		
2					80,941	116,637
	-39,472	17,964	-39,441	17,863		
3					41,50	134,50

$\Sigma X_i^j = -58{,}546$ $\quad \Sigma Y_i^j = 34{,}695$

$\Sigma|X_i^j| = 58{,}546$ $\quad \Sigma|Y_i^j| = 34{,}695$

$$e_{cx} = \Sigma X_i^j - (X_3 - X_1) = -0{,}046$$

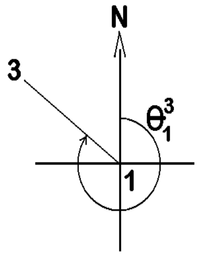
$$e_{cy} = \Sigma Y_i^j - (Y_3 - Y_1) = 0{,}195$$

11.7.- Resuelve y compensa el itinerario anterior en el caso de que no se disponga del acimut de la dirección 3-3'.

Se resuelve como el ejercicio 11.3:

Acimut trigonométrico de la alineación *1-3*:

$$(\theta_1^3)_{TRIG} = 300^g + arc\ tg\frac{|Y_3 - Y_1|}{|X_3 - X_1|} = 333{,}922^g$$



Distancia reducida trigonométrica entre ambas estaciones:

$$(D_{13})_{TRIG} = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = 67{,}915m$$

Calculamos las coordenadas de cada estación respecto a la anterior, empleando para ello los valores que figuran en la libreta de campo.

	X	*Y*
1		
	-19,079	*16,725*
2		
	-39,484	*17,940*
3		

Las coordenadas parciales topográficas de *4* respecto a *1* se obtienen sumando las columnas de la tabla anterior:

$$X_1^3 = X_1^2 + X_2^3 = -58{,}563m$$
$$Y_1^3 = Y_1^2 + Y_2^3 = 34{,}665m$$

Con ayuda de la figura anterior calculamos el acimut topográfico:

$$(\theta_1^3)_{TOP} = 300^g + arc\ tg\frac{|Y_1^3|}{|X_1^3|} = 334{,}025^g$$

La distancia reducida topográfica será:

$$(D_{13})_{TOP} = \sqrt{(X_1^3)^2 + (Y_1^3)^2} = 68{,}054m$$

Para corregir las coordenadas hacemos:

$$c = (\theta_1^3)_{TOP} - (\theta_1^3)_{TRIG} = 0{,}103^g$$

$$f = \frac{(D_{13})_{TOP}}{(D_{13})_{TRIG}} = 1{,}00204$$

y corregimos acimutes y distancias:

$$(\theta_1^2)_C = \theta_1^2 - c = 345{,}717^g$$
$$(\theta_2^3)_C = \theta_2^3 - c = 327{,}047^g$$
$$(D_{12})_C = D_{12} / f = 25{,}320m$$
$$(D_{23})_C = D_{23} / f = 43{,}2795m$$

	Parciales compensadas		Totales	
	X	*Y*	*X*	*Y*
1			*100,000*	*100,000*
	-19,068	*16,661*		
2			*80,932*	*116,661*
	-39,432	*17,839*		
3			*41,50*	*134,50*

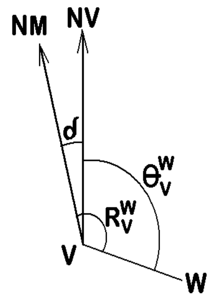
12. ENLACE ENTRE LEVANTAMIENTOS SUBTERRÁNEOS Y DE SUPERFICIE

EJERCICIOS

12.1.- Para calcular la declinación de una brújula, se hizo estación en un vértice V (coordenadas 1.000 ; 1.000) y se visó a otro vértice W (coordenadas 1.500 ; 800). El rumbo leído fue 131,3^g. A continuación se visó una alineación del interior de la mina, obteniendo un rumbo de 248,8^g. Calcula el acimut de la alineación.

Las posiciones planimétricas relativas de los puntos *V* y *W* se ven en la figura adjunta. El acimut de la alineación que forman se calcula:

$$\theta_V^W = 100^g + arc\ tg \frac{|Y_W - Y_V|}{|X_W - X_V|} = 124{,}2^g$$



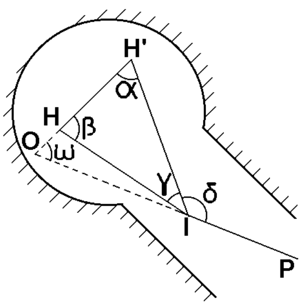
Para calcular la declinación magnética δ:

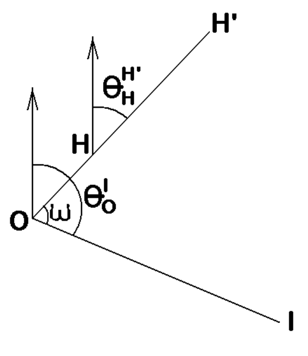
$$\delta = \theta_V{}^W - R_V{}^W = 124{,}2^g - 131{,}3^g = -7{,}1^g \quad \rightarrow \quad 7{,}1^g \text{ Oeste}$$

El acimut de la alineación interior será:

$$\theta = R + \delta = 248{,}8^g - 7{,}1^g = 241{,}7^g$$

12.2.- Se ha medido en exterior el acimut del plano formado por los hilos de dos plomadas tendidas a lo largo de un pozo: $\theta_H{}^{H'}$= 40,362^g. A continuación se hace estación en el punto interior I, midiendo los ángulos γ = 29,562^g y δ = 156,697^g. Se midieron también la distancia entre hilos ($D_{HH'}$ = 4m) y la distancia entre el punto de estación y el primero de los hilos (D_{IH} = 7,5m). Calcula el acimut de la alineación I-P de la figura.





Las expresiones a emplear figuran en el apartado 12.3.4 (a):

$$sen\ \alpha = \frac{D_{IH}}{D_{HH'}} sen\ \gamma$$

De donde:

$$\alpha = 63{,}456^g$$
$$\omega = \delta - \alpha = 93{,}241^g$$

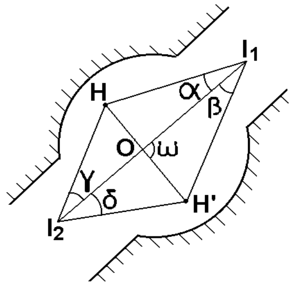
De la figura adjunta:

$$\theta_O{}^I = \theta_I{}^P = \theta_H{}^{H'} + \omega = 133{,}603^g$$

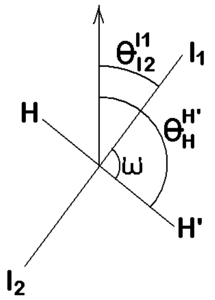
12.3.- ***Para determinar la orientación de la alineación formada por las estaciones I_1 e I_2, situadas en el interior de la mina, se estacionó en ambas y se midieron los ángulos:***

$$\alpha = 19{,}372^g \qquad \beta = 28{,}762^g$$
$$\gamma = 23{,}678^g \qquad \delta = 32{,}467^g$$

Se determinó en el exterior el acimut $\theta_H^{H'} = 172{,}829^g$. Calcula el acimut de la alineación formada por las dos estaciones de interior.



Las expresiones a emplear figuran en el apartado 12.3.4 (b):



$$tg\,\omega = \frac{cot\,g\,\alpha + cot\,g\,\beta + cot\,g\,\gamma + cot\,g\,\delta}{cot\,g\,\alpha\ cot\,g\,\delta\ -\ cot\,g\,\beta\ cot\,g\,\gamma} = 23{,}402$$

$$\omega = 97{,}281^g$$

En la figura:

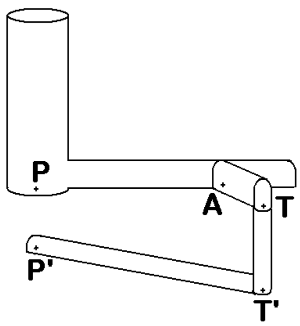
$$\theta_{I2}^{I1} = \theta_H^{H'} - \omega = 75{,}548^g$$

$$\theta_{I1}^{I2} = \theta_{I2}^{I1} \pm 200^g = 275{,}548^g$$

13. ROMPIMIENTOS MINEROS

EJERCICIOS

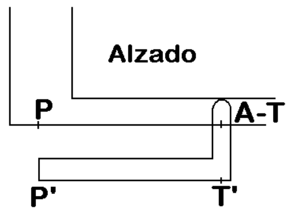
13.1.- ***Sea P (100 ; 100 ; 100) el punto central del fondo de un pozo que se pretende reprofundizar, dejando un macizo de protección. Del fondo del pozo parte una galería horizontal P-A, de acimut 55^g. Desde el punto A, situado a 20m de P, se excavará una traviesa de 5m, de orientación 155^g. Desde el punto final de ésta se excavará un pocillo de 10m de profundidad y, finalmente, del fondo del pocillo partirá otra galería horizontal en dirección al centro del pozo. Calcula las coordenadas de los dos extremos de esta última labor y su orientación.***



Sea *P* el punto central del fondo del pozo, *A* y *T* los puntos extremos de la traviesa, *T'* el punto central del fondo del pocillo y *P'* el punto final de la galería trazada desde *T'* en dirección al centro del pozo. Se trata del caso descrito en 13.2.1. Calcularemos sucesivamente las coordenadas de los puntos hasta llegar a *T'* y *P'*.

Coordenadas de *P*:

$$X_P = 100{,}000 \quad Y_P = 100{,}000 \quad Z_P = 100{,}000$$



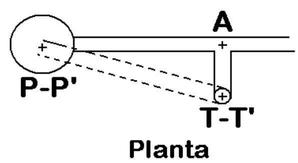
Coordenadas de *A*:

$$D_{PA} = 20m \qquad \theta_P^A = 55^g$$

$$X_A = X_P + D_{PA}\ sen\ \theta_P^A = 115{,}208m$$

$$Y_A = Y_P + D_{PA}\ cos\ \theta_P^A = 112{,}989m$$

$$Z_A = Z_P = 100{,}000m$$



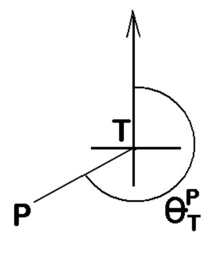
Coordenadas de *T*:

$$D_{AT} = 5m \qquad \theta_A^T = 155^g$$

$$X_T = X_A + D_{AT}\ sen\ \theta_A^T = 118{,}455m$$

$$Y_T = Y_A + D_{AT}\ cos\ \theta_A^T = 109{,}187m$$

$$Z_T = Z_A = 100{,}000m$$



Las coordenadas de *T'* coinciden con las de *T*, salvo la *Z*, que será:

$$Z_{T'} = Z_T - 10m = 90{,}000m$$

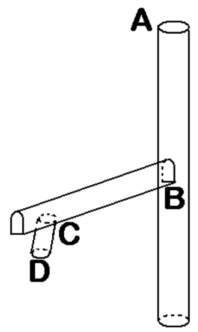
Las coordenadas de *P'* coinciden con las de *P*, salvo la *Z*, que será:

$$Z_{P'} = Z_P - 10m = 90{,}000m$$

Para calcular la orientación de la labor *T'-P'* se sitúan los dos puntos en un croquis en función de sus coordenadas planas *X* e *Y*. De la figura:

$$\theta_{T'}^{P'} = \theta_T^P = 200^g + arc\ tg \frac{|X_P - X_T|}{|Y_P - Y_T|} = 270{,}595^g$$

13.2.- Desde un punto A (1.000 ; 1.000 ; 100) de la superficie se ha excavado un pozo vertical de 50m de profundidad. Del extremo inferior B de este pozo parte una galería horizontal, en dirección S-30^g-O, de 30m de longitud. Esta galería acaba en una chimenea, con la misma orientación, inclinada 5^g respecto a la vertical y con una longitud de 5m. Calcula las coordenadas del extremo inferior B del pozo, del extremo C de la galería y del fondo D de la chimenea.



Coordenadas de *A*:

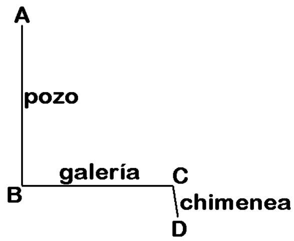
$X_A = 1.000m \qquad Y_A = 1.000m \qquad Z_A = 100m$

Coordenadas de *B*:

Como el pozo es vertical,

$X_B = X_A \qquad Y_B = Y_A \qquad Z_B = Z_A - 50 = 50m$

$X_B = 1.000m \qquad Y_B = 1.000m \qquad Z_B = 50m$



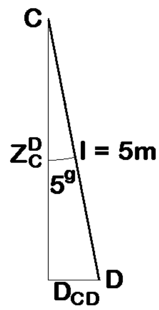
Coordenadas de *C*. La distancia reducida entre *B* y *C*, D_{BC}, es la longitud de la galería (*30m*), ya que ésta es horizontal:

$$\theta_B^C = S - 30^g - O = 230^g$$

$$X_C = X_B + D_{BC}\ sen\ \theta_B^C = 986{,}380m$$

$$Y_C = X_B + D_{BC}\ cos\ \theta_B^C = 973{,}270m$$

$Z_C = Z_B = 50m$, ya que la galería es horizontal



Coordenadas de *D*. De la figura se deduce que:

Distancia reducida $\quad D_{CD} = l\ sen\ 5^g = 0{,}392m$

Desnivel $\quad Z_C^D = -\ l\ cos\ 5^g = -4{,}985m$

Además, sabemos que: $\quad \theta_C^D = \theta_B^C = 230^g$

$$X_D = X_C + D_{CD}\ sen\ \theta_C^D = 986{,}202m$$

$$Y_D = Y_C + D_{CD}\ cos\ \theta_C^D = 972{,}920m$$

$$Z_D = Z_C + Z_C^D = 45{,}015m$$

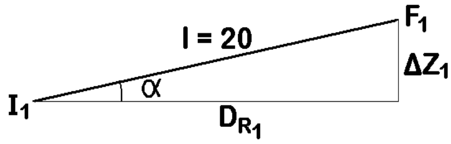
13.3.- De un pozo vertical parten dos galerías. La primera empieza a 30m de profundidad, tiene una longitud de 20m y una pendiente ascendente del 2% y su orientación (acimut) es de 40^g. La segunda empieza a 50m de profundidad, tiene una longitud de 25m y una pendiente descendente del 3% y su orientación es de 45^g. Si se quisieran conectar los extremos de las dos galerías, calcula la inclinación, la orientación y la longitud de la labor a perforar.

Vamos a suponer que las coordenadas del punto inicial de la primera galería son:

$X_{I1} = 0 \qquad Y_{I1} = 0 \qquad Z_{I1} = 0$

Si llamamos p_1 a la pendiente de la primera galería, de la figura se deduce que:

$$p_1 = tg\ \alpha = 2\% = 0{,}02$$
$$\alpha = arc\ tg\ 0{,}02 = 1{,}273^g$$
$$D_{R1} = l \cos \alpha = 19{,}996m$$
$$\Delta Z_1 = l\ sen\ \alpha = 0{,}400m$$



Conocido el acimut de la primera galería, las coordenadas del punto final *F1* de ésta se calculan:

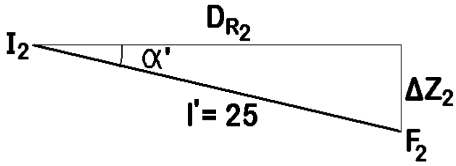
$$X_{F1} = X_{I1} + D_{R1}\ sen\ \theta_{I1}^{F1} = 11{,}753m$$
$$Y_{F1} = Y_{I1} + D_{R1}\ cos\ \theta_{I1}^{F1} = 16{,}177m$$
$$Z_{F1} = Z_{I1} + \Delta Z_1 = 0{,}400m$$

Las coordenadas planas (*X* e *Y*) del punto inicial *I2* de la segunda galería coinciden con las de *I1*. Respecto a la coordenada Z, como la primera galería empieza a *30m* de profundidad y la segunda a *50m*, tenemos:

$$X_{I2} = 0 \qquad Y_{I2} = 0 \qquad Z_{I2} = 30 - 50 = -20m$$

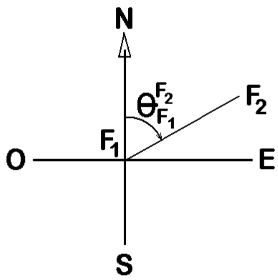
Si llamamos p_2 a la pendiente de la segunda galería, de la figura se deduce que:

$$p_2 = tg\ \alpha' = 3\% = 0{,}03$$
$$\alpha' = arc\ tg\ 0{,}03 = 1{,}909^g$$
$$D_{R2} = l' \cos \alpha' = 24{,}989m$$
$$\Delta Z_2 = -l'\ sen\ \alpha' = -0{,}750m$$



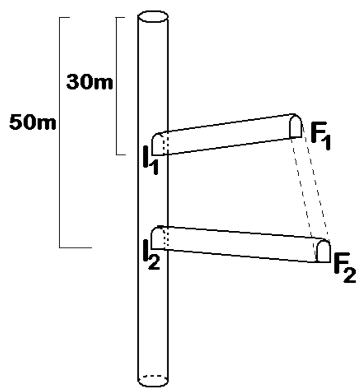
Conocido el acimut de la segunda galería, las coordenadas del punto final *F2* de ésta se calculan:

$$X_{F2} = X_{I2} + D_{R2}\ sen\ \theta_{I2}^{F2} = 16{,}229m$$
$$Y_{F2} = Y_{I1} + D_{R2}\ cos\ \theta_{I2}^{F2} = 19{,}002m$$
$$Z_{F2} = Z_{I2} + \Delta Z_2 = -20{,}750m$$



Para calcular la orientación de la labor que conectará los extremos de las dos galerías dibujamos en un croquis las posiciones relativas aproximadas de *F1* y *F2*, según sus coordenadas planas. De la figura obtenida se deduce que:

$$\theta_{F1}^{F2} = arc\ tg \frac{|X_{F2} - X_{F1}|}{|Y_{F2} - Y_{F1}|} = 64{,}158^g$$



Para calcular la longitud total a perforar (D_N) y la pendiente (p_3) hacemos:

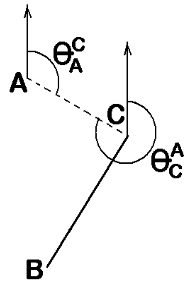
$$D_N = \sqrt{(X_{F2} - X_{F1})^2 + (Y_{F2} - Y_{F1})^2 + (Z_{F2} - Z_{F1})^2} = 21{,}802m$$
$$D_R = \sqrt{(X_{F2} - X_{F1})^2 + (Y_{F2} - Y_{F1})^2} = 5{,}293m$$

Siendo D_R la distancia reducida entre los puntos *F1* y *F2* y D_N la distancia natural entre ellos, que será la longitud a perforar. Para calcular la pendiente hacemos:

$$Z_{F1}^{F2} = Z_{F2} - Z_{F1} = -21{,}150\,m$$

$$p_3 = \frac{Z_{F1}^{F2}}{D_R} = -4{,}000$$

13.4.- Desde un punto A, de coordenadas planas (80 ; 170) se va a trazar una galería horizontal, perpendicular a otra galería que pasa por B (100 ; 100) y tiene un acimut de 25^g. Calcula las coordenadas del punto C de intersección de las dos galerías, la orientación de la labor a excavar y su longitud.



Es uno de los casos descritos en 13.3.1.

$$\theta_B{}^C = 25^g \qquad \theta_C{}^B = \theta_B{}^C \pm 200^g = 225^g$$

Como la galería *A-C* es perpendicular a la *B-C*:

$$\theta_C{}^A = \theta_C{}^B + 100^g = 325^g \qquad \theta_A{}^C = \theta_C{}^A \pm 200^g = 125^g$$

Para calcular las coordenadas de *C* se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$X_C = X_A + D_{AC}\ sen\ \theta_A^C = X_B + D_{BC}\ sen\ \theta_B^C$$

$$Y_C = Y_A + D_{AC}\ cos\ \theta_A^C = Y_B + D_{BC}\ cos\ \theta_B^C$$

Las incógnitas son las dos distancias D_{AC} y D_{BC}. Resolviendo el sistema:

$$D_{AC} = 45{,}265m$$

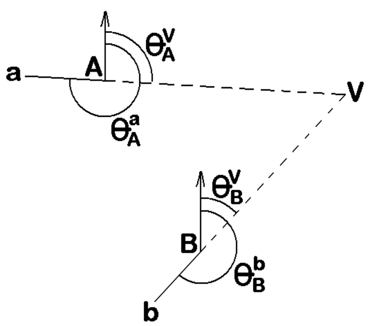
$$D_{BC} = 57{,}018$$

$$X_C = 121{,}820m$$

$$Y_C = 152{,}678m$$

La distancia D_{AC} es la longitud a perforar. La orientación será $\theta_A{}^C = 125^g$.

13.5.- Por el punto A (100 ; 100) pasa una galería de acimut $\theta_A{}^a = 310^g$ y por B (120 ; 30) pasa otra de acimut $\theta_B{}^b = 250^g$. Se desea enlazar las dos galerías con un tramo circular de radio 20m. Calcula las coordenadas de los puntos de tangencia, las del centro de curvatura y la longitud de la alineación curva.



Se trata del caso descrito en 13.4.1. Si *V* es el vértice de la curva circular, de la figura:

$$\theta_A{}^V = \theta_A{}^a - 200^g = 110^g \qquad \theta_B{}^V = \theta_B{}^b - 200^g = 50^g$$

$$\theta_V{}^A = \theta_A{}^V \pm 200^g = 310^g \qquad \theta_V{}^B = \theta_B{}^V \pm 200^g = 250^g$$

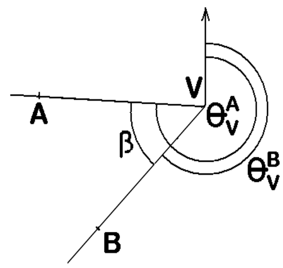
Para calcular sus coordenadas resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones siguientes, cuyas incógnitas son las distancias D_{AV} y D_{BV}:

$$X_V = X_A + D_{AV}\ sen\ \theta_A^V = X_B + D_{BV}\ sen\ \theta_B^V$$

$$Y_V = Y_A + D_{AV}\ cos\ \theta_A^V = Y_B + D_{BV}\ cos\ \theta_B^V$$

Resolviendo el sistema:

$$D_{BV} = 81{,}592m$$
$$X_V = 177{,}694m$$
$$Y_V = 87{,}694m$$



Sean *A′* y *B′* los puntos de entrada y de salida, respectivamente, de la curva y *T* la tangente, es decir la distancia entre uno de estos puntos y el vértice *V*. De la figura:

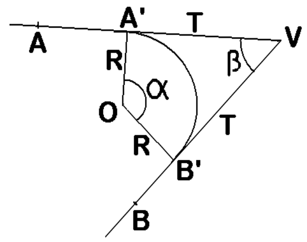
$$\beta = \theta_V^A - \theta_V^B = 310^g - 250^g = 60^g$$
$$\alpha = 200^g - \beta = 140^g$$

Para calcular la tangente *T* hacemos:

$$T = D_{VA'} = D_{VB'} = R \;\; tg\, \alpha/2 = 39{,}252m$$

Las coordenadas planas de *A′* y de *B′* serán:

$$X_{A'} = X_V + T \; sen\; \theta_V^A = 138{,}925m$$
$$Y_{A'} = Y_V + T \; cos\; \theta_V^A = 93{,}834m$$
$$X_{B'} = X_V + T \; sen\; \theta_V^B = 149{,}939m$$
$$Y_{B'} = Y_V + T \; cos\; \theta_V^B = 59{,}939m$$



Para calcular las coordenadas del centro *O* de la curva tenemos en cuenta que el radio y la tangente son perpendiculares. En la figura:

$$\theta_{A'}^O = \theta_{A'}^A - 100^g = \theta_V^A - 100^g = 210^g \qquad D_{A'O} = D_{B'O} = R$$
$$X_O = X_{A'} + R \; sen\; \theta_{A'}^O = 135{,}796m$$
$$Y_O = Y_{A'} + R \; cos\; \theta_{A'}^O = 74{,}080m$$

Conviene comprobar los resultados calculando también las coordenadas de *O* a partir de las del punto de salida *B′*:

$$X_O = X_{B'} + R \; sen\; \theta_{B'}^O = 135{,}796m$$
$$Y_O = Y_{B'} + R \; cos\; \theta_{B'}^O = 74{,}080m$$

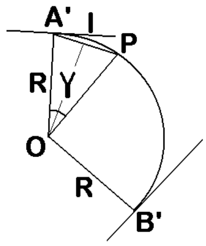
Para calcular la longitud de la alineación curva hacemos:

$$l_C = \frac{2\,\pi\, R\, \alpha}{400} = 43{,}982m$$

13.6.- Con los datos del ejercicio anterior, y suponiendo que el desnivel entre A′ y B′, puntos de tangencia del tramo curvo, es $Z_{A'}^{B'}$ = -7m, se pretende enlazar las dos galerías con una curva helicoidal de pendiente uniforme. Calcula los datos necesarios (acimut y pendiente) para replantear un punto de la curva situado a 5m, en distancia reducida, del punto de ataque.

El desnivel entre los puntos de entrada y de salida es *-7m* y la longitud de la curva l_C se obtiene del ejercicio anterior. La pendiente de la alineación curva será:

$$p=\frac{Z_{A'}^{B'}}{l_C}=\frac{-7}{43{,}982}=-0{,}159=-15{,}9\%$$



En la figura, a una distancia reducida $l = 5m$ le corresponde un ángulo γ:

$$sen\ \frac{\gamma}{2}=\frac{l}{2\,R} \qquad \gamma = 15{,}957^{\,g}$$

En la figura:

$$\theta_{A'}^{\ P} = \theta_{A'}^{\ V} + \gamma/2 = 117{,}978^g \qquad D_{A'P} = l = 5m$$

La longitud del arco entre *A'* y *P* será:

$$l_{A'P}=\frac{2\,\pi\,R\,\gamma}{400}=5{,}013m$$

El desnivel entre *A'* y *P* será:

$$Z_{A'}^{\ P} = p\ \ l_{A'P} = -0{,}798m$$

La pendiente de la recta a replantear será:

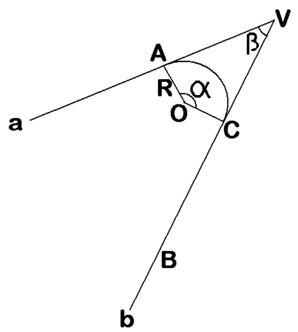
$$p'=\frac{Z_{A'}^{P}}{l}=0{,}160=16\%$$

13.7.- En un punto A (200, 200, 100) termina una galería horizontal, de orientación $\theta_a^{\ A} = 75^g$. Por otro punto B (200,100, 100) pasa otra galería horizontal, de orientación $\theta_b^{\ B} = 30^g$. Se desea enlazar las dos galerías mediante una curva circular, de forma que A sea el punto de entrada de la curva. Calcula: coordenadas del punto de salida, radio de curvatura, coordenadas del centro de curvatura y longitud del tramo curvo.

Sea *V* el vértice de la alineación curva. Los acimutes de las alineaciones rectas son:

$$\theta_A^{\ V} = \theta_a^{\ A} = 75^g \qquad \theta_V^{\ A} = \theta_A^{\ V} \pm 200^g = 275^g$$
$$\theta_B^{\ V} = \theta_b^{\ B} = 30^g \qquad \theta_V^{\ B} = \theta_B^{\ V} \pm 200^g = 230^g$$

Para calcular las coordenadas de *V* resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones siguientes:



$$X_V = X_A + D_{AV}\ \ sen\ \theta_A^V = X_B + D_{BV}\ \ sen\ \theta_B^V$$
$$Y_V = Y_A + D_{AV}\ \ cos\ \theta_A^V = Y_B + D_{BV}\ \ cos\ \theta_B^V$$

Resolviendo el sistema:

$$D_{BV} = 142{,}256m$$
$$D_{AV} = T = 69{,}904$$
$$X_V = 264{,}583m$$
$$Y_V = 226{,}751m$$

A es el punto de entrada de la curva. Por tanto, la distancia entre *A* y *V* es la tangente *T*. Si *C* es el punto de salida, sus coordenadas se calculan:

$$\theta_V{}^C = \theta_V{}^B = 230^g$$

$$X_C = X_V + T \ sen \ \theta_V^C = 232{,}847 m$$

$$Y_C = Y_V + T \ cos \ \theta_V^C = 164{,}466 m$$

En la figura:

$$\beta = \theta_V{}^A - \theta_V{}^C = 45^g$$

$$\alpha = 200^g - \beta = 155^g$$

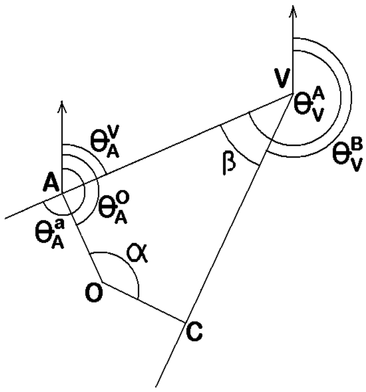
$$R = T \ tg \ \beta/2 = 25{,}789 m$$

Coordenadas del centro de curvatura *O*:

$$\theta_A{}^O = \theta_A{}^V + 100^g = 175^g \qquad D_{AO} = R$$

$$X_O = X_A + R \ sen \ \theta_A^O = 209{,}869 m$$

$$Y_O = Y_A + R \ cos \ \theta_A^O = 176{,}174 m$$



Conviene comprobar los resultados calculando también las coordenadas de *O* a partir de las del punto de salida *C*.

Longitud del tramo curvo:

$$l_C = \frac{2 \ \pi \ R \ \alpha}{400} = 62{,}789 m$$