Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso
Examen final septiembre. Curso 2013/2014
(01/09/2014)

(Incluye la solución de todos los ejercicios propuestos, independientemente que se examine de la asignatura completa y/o del primer o segundo parcial)

PRIMER PARCIAL

1. De un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con matriz asociada A, sabemos que $\lambda_1 = -2$ es un valor propio con sub. vectorial propio asociado $S_{-2} =< (1,1,1) >$, y que $\lambda_2 = 1$ es otro valor propio con sub. vectorial propio asociado

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y+z = 0\right\}$$

a. Justificar porqué A es diagonalizable y hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $A = PDP^{-1}$.

b. Hallar la expresión de A.

c. Calcular $\ker(f)$ e Im(f). Clasificar f.

d. Hallar la nueva matriz asociada a f si se consideran en el conjunto inicial y final la base

$$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

SOLUCIÓN:

(1.a) Se tiene que $S_{-2} =< (1,1,1) >$, mientras que

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y+z = 0\right\} =< (x,y,-x-y) >=< (1,0,-1),(0,1,-1) >$$

Por lo tanto el valor propio $\lambda_1 = -2$ es simple y tiene un solo vector propio asociado, mientras que el valor propio $\lambda_2 = 1$ ha de ser doble y sus valores propios asociados serán $(1,0,-1)$ y $(0,1,-1)$. De esta forma, la matriz A es diagonalizable, con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.b) Puesto que $A = PDP^{-1}$, solo hemos de hacer las operaciones para obtener

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\ldots=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

(1.c) Como $|A|=\ldots=-2\neq 0$, resulta que $rang(A)=3$, por lo que f será suprayectiva, es decir, $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$. Al mismo tiempo sabemos que $\dim(\ker(f))=0$, lo que quiere decir que f será inyectiva y $\ker(f)=(0,0,0)$.

(1.d) Realizando el esquema correspondiente, tendremos que

$$M_{B,B}(f)=M_{C,B}\times A\times M_{B,C}=M_{B,C}^{-1}\times A\times M_{B,C}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$$

_ _

2. Responder a los siguientes apartados:

a. ¿Existe alguna matriz de la forma

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}&0&0\\0&\mathbf{b}&1\\0&0&\mathbf{b}\end{pmatrix}$$

con $a\neq b$ que sea diagonalizable?

b. Dado el subespacio vectorial

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+y-2z=0\right\}$$

hallar una base ortogonal de W y una base de $W^{\perp}$. Calcular la proyección del vector $v=(1,0,1)$ sobre W. (Nota: En todo el apartado usar el producto escalar usual o canónico).

SOLUCIÓN:

(2.a) Si calculamos los valores propios de la matriz:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\mathbf{a}-\lambda&0&0\\0&\mathbf{b}-\lambda&1\\0&0&\mathbf{b}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = \mathbf{a}$ (simple) y $\lambda_2 = \mathbf{b}$ (doble). Si obtenemos los correspondientes subespacios vectoriales asociados:

$$S_{\mathbf{a}} = \left\{ (x,y,z) : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{a}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =\ldots= \{(x,0,0)\}$$

mientras que

$$S_{\mathbf{b}} = \left\{ (x,y,z) : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{b}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =\ldots= \{(0,y,0)\}$$

Por tanto, la matriz no puede ser diagonalizable ya que el valor propio $\lambda_2 = \mathbf{b}$ (doble) solo tiene un vector propio asociado.

(2.b) Se tiene que

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y-2z = 0\right\} = \{(2z-y,y,z)\} =< (2,0,1),(-1,1,0) >$$

mientras que

$$W^{\perp} =< (1,1,-2) >$$

(es el vector normal, con el producto escalar usual, al plano W). Por tanto una base ortonormal para $W^{\perp}$ viene dada por

$$B_{W^{\perp}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{(1,1,-2)\}$$

Para hallar la correspondiente base ortonormal a W aplicaremos el método de Gram-Schmitd, por lo que

$$u_1 = e_1 = (2,0,1)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \cdot e_2}{u_1 \cdot u_1}u_1 = (-1,1,0) - \frac{(2,0,1)\cdot(-1,1,0)}{(2,0,1)\cdot(2,0,1)}(2,0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}, & 1, & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

De esta forma la base ortonormal para W viene dada por

$$B_W = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1), \frac{1}{\sqrt{6/5}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5}, & 1, & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

La proyección ortogonal pedida consiste en hallar el vector $u \in W,$ tal que $v = (1,0,1) = u+w$, con $u \in W$ y $w \in W^{\perp}$. Así

$$v = (1,0,1) = [\alpha(2,0,1) + \beta(-1,1,0)] + \gamma(1,1,-2)$$

y si multiplicamos escalarmente esta igualdad por los dos vectores de W, tendremos

$$\begin{cases} 3 = 5\alpha - 2\beta \\ -1 = -2\alpha + 2\beta \end{cases}$$

de donde $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = \frac{1}{6}$. De esta forma, la proyección ortogonal pedida viene dada por

$$u = \frac{2}{3}(2,0,1) + \frac{1}{6}(-1,1,0) = \left(\frac{7}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{3} \right)$$

– –

3. Un taller se abastece de interruptores y lámparas a través de dos mayoristas, A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos. El mayorista A envía en cada contenedor dos cajas de interruptores y tres de lámparas, al precio de 350 euros el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno cinco cajas de lámparas y una caja de interruptores, al precio de 550 euros el contenedor. El taller necesita, como mínimo, 50 cajas de interruptores y 180 de lámparas, pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores. ¿Cuántos contenedores deber a pedir el taller a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible?. Indique cuál será ese coste mínimo.

SOLUCIÓN:

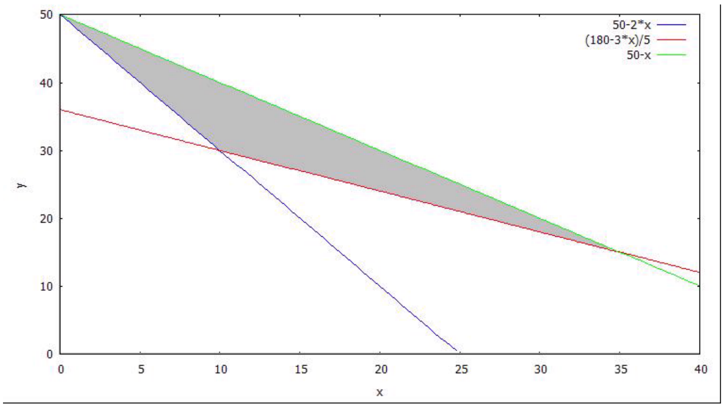
Si denotamos por x al número de contenedores del mayorista A, y por y al de contenedores de B, la función objetivo que pretendemos minimizar será

$$z = 350x + 550y$$

siendo las restricciones las dadas por

$$\begin{cases} 2x + y \geq 50 & \text{(cajas de interruptores que precisa el taller)} \\ 3x + 5y \geq 180 & \text{(cajas de lámparas que precisa el taller)} \\ x + y \leq 50 & \text{(contenedores que puede almacenar)} \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Si representamos la región factible (zona sombreada de la siguiente gráfica)



resulta que los vértices de la misma son los puntos $A(0,50)$, $B(10,30)$ y $C(35,15)$. Si sustituimos los mismos en la función objetivo, el resultado es $z(A) = 27.500$, $z(B) = 20.000$ y $z(C) = 20.500$. Por tanto, para que el coste sea menor, se han de pedir 10 contenedores al mayorista A y 30 al mayorista B, siendo este coste mínimo de 20.000€.

– –

4. Responder a los siguientes apartados:

a. Calcular los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

b. Calcular el polinomio de McLaurin de grado 3 para

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\sin(\pi x)$$

Usar este polinomio para estimar $f(0.1)$, acotando el error cometido.

SOLUCIÓN:

(4.a) En el primer caso se trata de una indeterminación 1^∞, mientras que en el segundo caso es $\frac{0}{0}$. Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right]-x}{x^3}\right) = e^{-\frac{1}{6}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left[1-\frac{x^2}{2!}+\dots\right]-\left[x-\frac{x^3}{3!}+\dots\right]}{2x^3} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}}{2} = -\frac{1}{6}$$

(Nota: También podríamos haber resuelto ambos límites usando la regla de L'Hôpital en lugar de usar desarrollos de McLaurin)

(4.b) Hemos de aplicar

$$P(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

siendo el resto el dado por

$$R = \frac{f^{IV}(c)}{4!}x^4$$

De esta forma

$$P(x) = 0+\frac{3\pi}{2}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{\frac{9}{8}\pi^3}{3!}x^3$$

por lo que

$$f(0.1) = \frac{3\pi}{2}0.1+\frac{\frac{9}{8}\pi^3}{3!}0.1^3 \approx 0.47705$$

teniendo como cota del error

$$R = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}x^4\right| = \frac{1}{4!}\left|\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\sin\left(\frac{\pi}{2}c\right)+\pi^4\sin(\pi c)\right|0.1^4 \le$$

$$\le \frac{1}{4!}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^4+\pi^4\right)0.1^4 \approx 4.3124\times 10^{-4}$$

_ _

SEGUNDO PARCIAL

5. Responder a los siguientes apartados:

a. Hallar el volumen del elipsoide engendrado por la elipse $16x^2+25y^2 = 400$ al girar alrededor del eje X. ¿Cuál sería el volumen si lo hiciésemos girar alrededor del eje Y?

b. Calcular los extremos relativos de

$$f(x,y) = x^3+3xy^2-15x-12y$$

SOLUCIÓN:

(5.a) Se trata de una elipse centrada en el origen y de semiejes 5 y 4 (ya que la ecuación $16x^2+25y^2 = 400$ puede ponerse de la forma $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$). Por la simetría que tiene el problema, calcularemos el volumen que genera el área del 1er cuadrante y lo multiplicaremos por 2. Así

$$V_{OX} = 2 \cdot \pi \int_a^b y^2 dx = 2\pi \int_0^5 16\left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx = \ldots = \frac{320}{3}\pi$$

mientras que para el volumen alrededor del eje Y

$$V_{OY} = 2 \cdot 2\pi \int_a^b xy dx = 4\pi \int_0^5 x\sqrt{16\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)}\, dx = \ldots = \frac{400}{3}\pi$$

siendo esta última integral inmediata si se realiza el cambio $t = 16\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$.

(5.b) Los puntos críticos de la función vienen dados por

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución los puntos

$$A\left(\frac{\sqrt{15+\sqrt{129}}}{2}, \frac{4}{\sqrt{15+\sqrt{129}}}\right),\ B\left(-\frac{\sqrt{15+\sqrt{129}}}{2}, \frac{-4}{\sqrt{15+\sqrt{129}}}\right)$$

$$C\left(\frac{\sqrt{15-\sqrt{129}}}{2}, \frac{4}{\sqrt{15-\sqrt{129}}}\right),\ D\left(-\frac{\sqrt{15-\sqrt{129}}}{2}, \frac{-4}{\sqrt{15-\sqrt{129}}}\right)$$

Como el hessiano viene dado por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}$$

si particularizamos en cada uno de los puntos, resulta que f tiene máximo relativo en B, mínimo relativo en A y puntos de silla en C y D.

– –

6. **Probar que la expresión**

$$xe^{y+z} + (z-x)\sin(y+1) + \sqrt{2xyz} = 0$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(-2,-1,1)$. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto $(-2,-1)$.

SOLUCIÓN:
Si denotamos por

$$\Phi(x,y,z) = xe^{y+z} + (z-x)\sin(y+1) + \sqrt{2xyz} = 0$$

como se verifica que

$$\Phi(-2,-1,1) = 0$$

y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \mid_{(-2,-1,1)} = \left(xe^{y+z} + \sin(y+1) + \frac{xy}{\sqrt{2xyz}} \right) \mid_{(-2,-1,1)} = -1 \neq 0$$

es cierto que z queda definida como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(-2,-1,1)$.

La ecuación del plano tangente viene dada por

$$z - z(-2,-1) = \frac{\partial z}{\partial x}(-2,-1)(x+2) + \frac{\partial z}{\partial y}(-2,-1)(y+1)$$

por lo que si derivamos respecto de x (resp. si derivamos respecto de y) la expresión

$$xe^{y+z(x,y)} + (z(x,y) - x)\sin(y+1) + \sqrt{2xyz(x,y)} = 0$$

y particularizamos en $(-2,-1)$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-2,-1) = \frac{1}{2} \qquad \left(\text{resp. } \frac{\partial z}{\partial y}(-2,-1) = 0 \right)$$

siendo por tanto la ecuación del plano pedida la dada por

$$z - 1 = \frac{1}{2}(x+2) + 0(y+1)$$

– –

7. Hallar el valor de la siguiente integral doble en el recinto de integración indicado

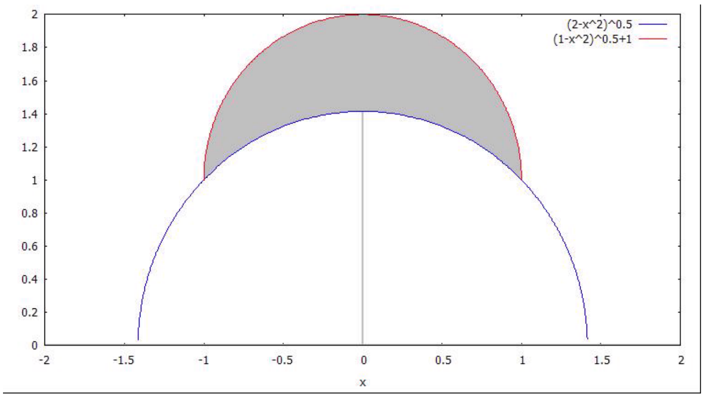
$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$$

siendo D el conjunto dado por

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 2y \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La región D tiene por gráfica la siguiente parte sombreada



siendo los puntos de intersección de ambas circunferencias $(-1,1)$ y $(1,1)$. Por tanto, si efectuamos un cambio a coordenadas polares, tendremos que el radio r varía entre $\sqrt{2}$ y 2, mientras que el argumento θ varía entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$. De esta forma

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{r\sin(\theta)}{r^2} rdr = \left(2-\sqrt{2}\right)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(\theta)d\theta = 2\sqrt{2} - 2$$

_ _

8. Responder a los siguientes apartados:

a. Resolver la edo

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y+e^x)y' = 0$$

probando previamente que admite a $\mu(x) = e^x$ como factor integrante.

b. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

(8.a) Escribimos la ecuación en la forma

$$\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right)dx + (y+e^x)dy = 0$$

y se puede comprobar que no es exacta (ya que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$). Sin embargo, si multiplicamos por e^x, obtenemos

$$e^x\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right)dx + e^x(y+e^x)dy = 0$$

que ahora sí que es exacta, puesto que se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x y + 2e^{2x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si resolvemos entonces esta edo exacta, al ser $\frac{\partial f}{\partial x} = M = e^x\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right)$, habrá de ser

$$f(x,y) = \int e^x\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right)dx = ye^{2x} + \frac{1}{2}y^2e^x + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usaremos que $\frac{\partial f}{\partial y} = N = e^x(y + e^x)$, de donde

$$e^{2x} + ye^x + g'(y) = e^x(y + e^x)$$

por lo que $g'(y) = 0$, es decir, $g(y) = C$.

Por todo lo anterior, sabemos que la solución de nuestra edo exacta es

$$ye^{2x} + \frac{1}{2}y^2e^x = cte$$

(8.b) Se trata de una edo homogénea (puesto que las funciones $x^2 + y^2$ y xy son homogéneas de orden 2). De esta forma hemos de realizar el cambio de variable $y = vx$ (de donde $dy = vdx + xdv$). Sustituyendo en la ecuación original, tendremos

$$(x^2 + v^2x^2)dx + xvx(vdx + xdv) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$x^2(1 + 2v^2)dx + x^3vdv = 0$$

que es una edo en variables separadas, puesto que la podemos poner en la forma

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v}{1 + 2v^2}dv$$

Si integramos ambos miembros, tendremos

$$\ln(x) = -\frac{1}{4}\ln\left(v^2 + \frac{1}{2}\right) + C$$

y solo hemos de deshacer el cambio de variable para tener la solución general de la edo inicial

$$\ln(x) = -\frac{1}{4}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) + C$$

Para hallar la solución particular del PVI solo hemos de determinar la constante C : Como $y(1) = -2$

$$\ln(1) = -\frac{1}{4}\ln\left(\left(\frac{-2}{1}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) + C$$

de donde $C = \frac{1}{4}\ln\frac{9}{2}$, por lo que la solución del PVI es

$$\ln(x) = -\frac{1}{4}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\frac{9}{2}$$

_ _