industriales
etsii UPCT

Examen Final JUNIO 2013

Física II I. TECNOLOGÍA INDUSTRIAL

Nombre:_____

1. Parte:Teoría

① Determina el flujo del campo

$$\vec{V} = xy^2z\hat{i} + y^3z\,\hat{j} + (x^2 + y^2 - 2y^2z^2)\hat{k}$$

a través del disco de la figura adjunta 1, estando éste en el plano $z = 0$

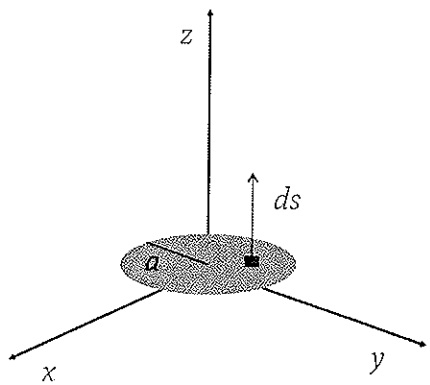


Figura 1: Flujo de $\vec{V}$ a través del disco indicado.

② Pilares del Electromagnetismo.

③ Establece la ecuación de ondas y verifica que

$$\Psi = A\,\sin(\omega t - kx)$$

representa una onda.

④ Características de los materiales conductores.

⑤ Si deseo determinar el valor de la resistencia de un conductor, aplico la ley de Ohm y determino para un cierto voltaje (media) la intensidad (media) que lo recorre. Es decir medimos y obtenemos

$$V = V_0 \pm \Delta V \qquad I = I_0 \pm \Delta I$$

¿Cuál sería el valor de la resistencia y su error?

2. Parte:Ejercicios

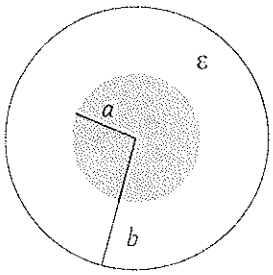


Figura 2: Esfera con dieléctrico.

① **Disponemos de una esfera** de radio a cargada con una densidad de carga $\rho = C/r$ donde C es una constante. Dicha esfera está rodeada por una cubierta esférica de radio b, figura 2. El espacio entre ambas esferas es un dieléctrico de constante ϵ.

Determina:

a) La carga en la esfera de radio a.

b) El campo eléctrico, el Desplazamiento eléctrico y la Polarización en todas las regiones.

c) La diferencia de potencial entre dichas esferas.

d) Se te ocurre alguna idea para determinar la constante C.

② **En el circuito de la figura adjunta**, determina:

a) La corriente que pasa por la resistencia de 5Ω. (Aplicando las leyes de Kirchhoff)

b) La corriente que pasa por la resistencia de 5Ω. (Aplicando el método de mallas)

c) La corriente que pasa por la resistencia de 5Ω. (Aplicando el teorema de superposición.)

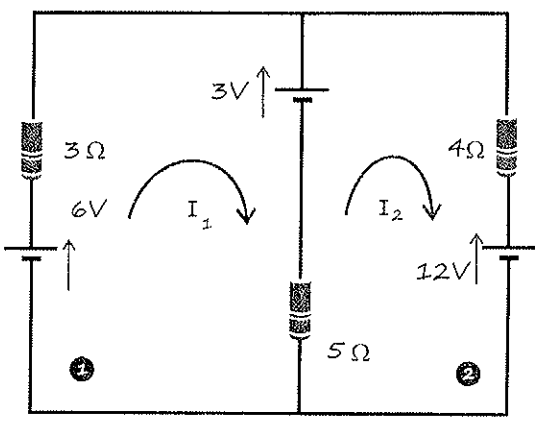


Figura 3: circuito.

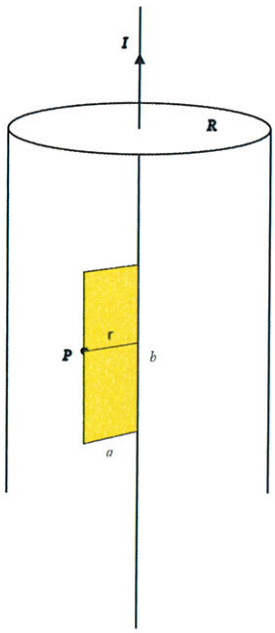


Figura 4: Conductor y espira.

③ **Disponemos de un conductor** cilíndrico de radio R e indefinido. Por dicho conductor circula una corriente I uniformemente distribuida a través del área de la sección transversal del conductor. Una espira rectangular se encuentra en su interior. Determina

a) El campo magnético creado por dicha corriente en el punto P. $r < R$

b) El flujo del campo magnético hallado en el apartado anterior, a través de dicha espira.

Instrucciones

- Los alumnos que tengan que examinarse de toda la asignatura, contestarán a 4 de las 5 **cuestiones** planteadas, siendo la cuestión número 5 obligatoria. De los **ejercicios** propuestos, sólo realizará tres.

- Los alumnos que han eliminado la primera parte de la asignatura contestarán de la siguiente forma: De las **cuestiones**, realizarán la número dos y tres y cinco. Relativo a los **ejercicios**, realizarán el número 2 y el 3.

Final Junio 2013.

1º: Flujo del campo

$$\bar{V} = xy^2z\,\hat{i} + y^3z\,\hat{j} + (x^2+y^2-2y^2z^2)\,\hat{k}$$

a través de la superficie indicada en la figura en el plano $z=0$.

La expresión del campo en coordenadas cilíndricas es

$$\bar{V} = r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta\, z\,(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}) + r^3\sin^2\theta\, z\,(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}) +$$

$$+ (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r^2\sin^2\theta\, z^2)\,\hat{z}.$$

$$\bar{V} = r^3\sin^2\theta\, z\,\hat{r} + (r^2 - 2r^2\sin^2\theta\; z^2)\,\hat{z}.$$

El flujo

$$\phi = \int_S \bar{V}\cdot\bar{dS} = \int_S \left(r^3\sin^2\theta\, z\,\hat{r} + (r^2 - 2r^2\sin^2\theta\, z^2)\,\hat{z}\right)\cdot\left(r\,dr\,d\theta\,\hat{z}\right)$$

luego $\phi = \int_0^a\int_0^{2\pi} (r^2 - 2r^2\sin^2\theta\, z^2)\, r\,dr\,d\theta$ ¡como estamos en el plano $z=0$!

$$\phi = \int_0^a\int_0^{2\pi} r^2\, r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = 2\pi\,\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}\;//$$

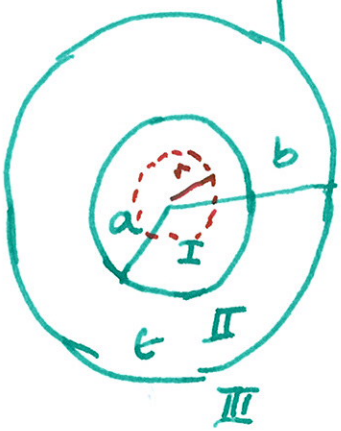
1. Disponemos de una esfera. cuyade con $\rho = \frac{c}{r}$.

a) Carga en dicha esfera.

$$Q = \int_V \rho \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \frac{c}{k} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$Q = c\,(2)\,(2\pi) \int_0^a r\,dr = 4\pi c \frac{a^2}{2} = 2\pi a^2 c \;//$$

b) Campo eléctrico, desplazamiento y polarización.



$r < a$

$$\phi = \int \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_f$$

la carga libre que encierra s

$$Q_f = \int_0^r \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} c\, r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 4\pi c \int_0^r r\,dr =$$

$$= 4\pi c \frac{r^2}{2} = 2\pi c r^2.$$

$$D\,4\pi r^2 = 2\pi c r^2 \Rightarrow \boxed{\bar{D}_I = \frac{2c}{4} = \frac{c}{2}\,\hat{r}.}$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\bar{E}_I = \frac{c}{2\epsilon_0}\,\hat{r}}$$

$$\boxed{\bar{P} = 0}$$

$a<r<b$

$$\phi = \int \bar{D}\cdot d\bar{s} = Q_f .$$

La carga libre que encierra es

$$Q = 2\pi a^2 C d .$$

Luego $D_{II}\, 4\pi r^2 = 2\pi a^2 C$

$$\boxed{\bar{D}_{II} = \frac{a^2 C d}{2r^2}\,\hat{r}}$$

y el campo eléctrico.

$$\boxed{\bar{E}_{II} = \frac{\bar{D}_{II}}{\epsilon} = \frac{a^2 C d}{2\epsilon r^2}\,\hat{r}}$$

La polarización vale:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\frac{a^2 C d}{2r^2} = \epsilon_0 \frac{a^2 C d}{2\epsilon r^2} + \bar{P} \Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{a^2 C d}{2r^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\hat{r}}$$

$a>b$

La carga libre que encierra es $Q = 2\pi a^2 C$

$$\phi = Q_f \Rightarrow D_{III}\, 4\pi r^2 = 2\pi a^2 C d \Rightarrow \boxed{\bar{D}_{III} = \frac{a^2 C d}{2r^2}\,\hat{r}}$$

$$\boxed{\bar{E}_{III} = \frac{\bar{D}_{III}}{\epsilon_0} = \frac{a^2 C d}{2\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

$$\boxed{\bar{P}_{III} = 0}$$

c) Diferencia de potencial entre dichas esferas.

$$V(b) = -\int_{\infty}^{b} \bar{E}_{III} \cdot d\bar{r}$$

$$V(a) = -\int_{\infty}^{b} \bar{E}_{III} \cdot d\bar{r} - \int_{b}^{a} \bar{E}_{II} \cdot d\bar{r}$$

$$V(a) - V(b) = -\int_{b}^{a} \bar{E}_{II} \cdot d\bar{r} = -\int_{b}^{a} \frac{a^2 C'}{2\epsilon r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} =$$

$$= -\frac{a^2 C'}{2\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_{b}^{a} = -\frac{a^2 C'}{2\epsilon} \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] =$$

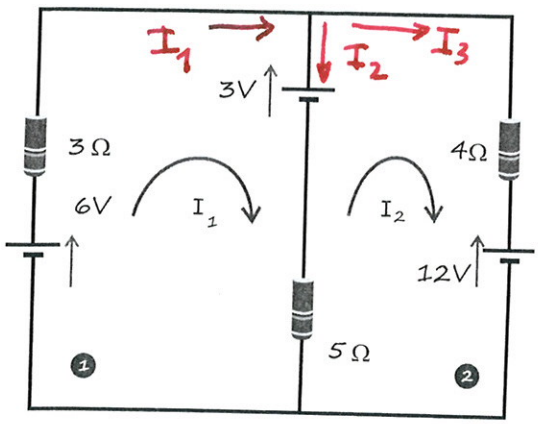
$$= -\frac{a^2 C'}{2\epsilon} \left[\frac{-b + a}{ab} \right]$$

$$\boxed{V(a) - V(b) = -\frac{a^2 C'}{2\epsilon} \left[\frac{a-b}{ab} \right]}$$

d) Introducimos una pila que genere entre a y b una d.d.p. V_0.

$$V_0 = -\frac{a^2 C'}{2\epsilon} \left[\frac{a-b}{ab} \right]$$

luego $C' = \frac{2\epsilon V_0 ab}{a^2(a-b)} = -\frac{2\epsilon V_0 b}{a(a-b)}$ //.



a) Corriente por la resistencia de 5Ω (método de Kirchhoff)

$$\left.\begin{aligned} -3+6 &= I_1(3) + I_2(5) \\ -12+3 &= I_3(4) - I_2(5) \\ I_1 &= I_2 + I_3 \end{aligned}\right\}$$

Es decir

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 3I_1 + 5I_2 \\ 9 &= -4I_3 + 5I_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} 3 &= 3(I_2+I_3) + 5I_2 \\ 9 &= -4I_3 + 5I_2 \end{aligned}\right\}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 3I_2 + 3I_3 + 5I_2 \\ 9 &= -4I_3 + 5I_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow 3 = 8I_2 + 3I_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-39}{-47} = \frac{39}{47} = \underline{\underline{0.83\,A.}}$$

b) Método de mallas.

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 8I_1 - 5I_2 \\ -9 &= 9I_2 - 5I_1 \end{aligned}\right\}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{47} \text{ A.}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-57}{47} \text{ A.}$$

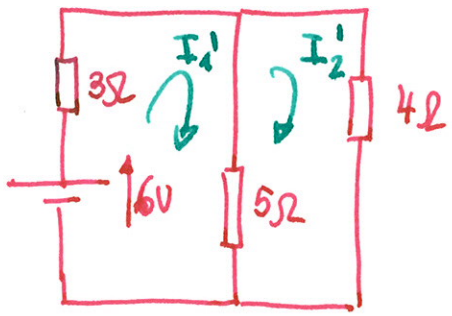
Corriente

$$I_1 - I_2 = -\frac{18}{47} + \frac{57}{47} = \frac{39}{47} \text{ A //.}$$

---

c) Aplicamos el teorema de superposición.

1. Sólo la de 6V.

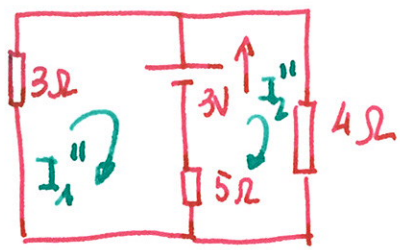


$$\left.\begin{aligned} 8I_1' - 5I_2' &= 6 \\ 9I_2' - 5I_1' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$I_1' = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{54}{47}\ A //$$

$$I_2' = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{47} = \frac{30}{47}\ A //$$

2. Sólo la de 3V

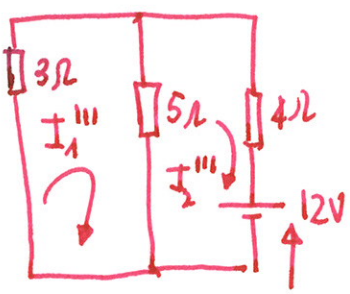


$$\left.\begin{aligned} -3 &= 8I_1'' - 5I_2'' \\ 3 &= 9I_2'' - 5I_1'' \end{aligned}\right\}$$

$$I_1'' = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{12}{47}\ A //$$

$$I_2'' = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}}{47} = \frac{9}{47}\ A //$$

3. Sólo la de 12V.



$$\left.\begin{aligned} 0 &= 8I_1''' - 5I_2''' \\ -12 &= 9I_2''' - 5I_1''' \end{aligned}\right\}$$

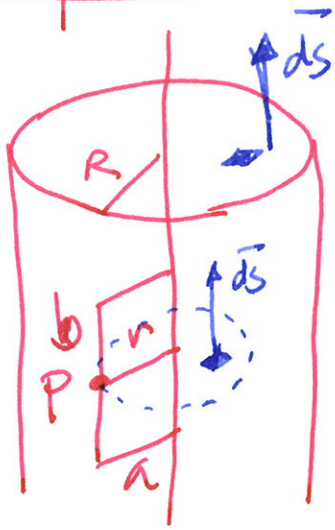
$$I_1''' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -12 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{60}{47}\ A \;//\; I_2''' = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -5 & -12 \end{vmatrix}}{47} = -\frac{96}{47}\ A //$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_2''' = \frac{54}{47} - \frac{12}{47} - \frac{60}{47} = -\frac{18}{47}\ A //$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = \frac{30}{47} + \frac{9}{47} - \frac{96}{47} = \frac{-57}{47}\ A //.$$

$$//.\ I_{5\Omega} = \frac{39}{47}\ A //$$

3: Ejercicio.



a) Campo creado en el punto P.

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\,\hat{z}$$

la intensidad que ~~circula~~

~~$I = \int \vec{j}\cdot d\vec{s}$~~

atraviesa la superficie encerrada por la circunferencia donde aplicaremos la circulación del campo, $\Rightarrow$

$$I^* = \int \vec{j}\cdot d\vec{s} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi R^2}\, r\,dr\,d\theta =$$

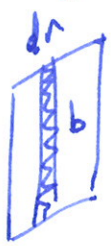
$$= \frac{I}{\pi R^2}\, 2\pi \,\frac{r^2}{2} = \frac{I r^2}{R^2}.$$

Aplicamos Ampere.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I^* \Rightarrow B\,2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}$$

luego $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\,\hat{\theta}}$

b) Flujo que atraviesa la espira cuadrada.



$d\vec{s} = b\,dr\,\hat{\theta}$

luego $\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_0^a \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\, b\,dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi R^2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a$

$$\phi = \frac{\mu_0 I b a^2}{4\pi R^2} \;//$$