UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos

ESTADÍSTICA E INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA.
DICIEMBRE 2002. Examen Final.

1. (1 PUNTO) Escribir las expresiones de los siguientes indicadores: Indice de Gini, Indice media agregativa, Indice cuántico de Laspeyres, Indice de precios de Paasche, Indice cuántico de Edgeworth.

2. (1,5 PUNTOS) Deducir la esperanza matemática de la varianza muestral. En el caso de una población N(μ;σ=3,6) se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 4 ¿Cuál es la probabilidad de que la varianza muestral sea superior a 30?

3. (2,5 PUNTOS) Dada la distribución (X;Y) se conocen los siguientes datos:

$$\overline{X} = \frac{2}{3} \quad ; S_X^2 = \frac{1}{18} \quad ; S_y^2 = \frac{1}{72}$$

Si en la recta de regresión Y=a+bX resulta que a=0 y b=1/4.

a) Calcular el coeficiente de correlación linear (r)
b) Determinar la varianza residual.
c) Obtener el valor medio de Y.
d) Obtener la recta de regresión X=c+dY
e) Realizar una predicción para X = 0,2 ¿El resultado es fiable?

4. (2,5 PUNTOS) La vida útil, medida en años, de un ordenador personal fabricado por la empresa TIMOSA es una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{2}{25}x & \text{si} \quad 0 < x < 5 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,5) \end{cases}$$

Dicha marca ofrece una garantía de un año y medio, de modo que si el ordenador falla en ese periodo habrá de reemplazarlo por uno nuevo.

a) Calcular la probabilidad de que haya que reemplazar un ordenador en el periodo de garantía.
b) Si en un aula de informática se han recibido 10 de estos ordenadores, determinar la probabilidad de que al menos dos de ellos se averíen en el periodo de garantía.
c) Cuál debería ser el periodo de garantía, si la empresa desea reemplazar sólo el 5% de los ordenadores?

5. (2,5 PUNTOS) Una planta de distribución de agua mineral envasa su producto en botellas de vidrio cuyo peso medio es de 500 gramos y su desviación típica 50 gramos. La máquina automática vierte en las botellas una cantidad de agua mineral que es una variable aleatoria de media 1.000 gramos y desviación típica 40 gramos. Las botellas se envasan en cajas de 12 unidades y el peso de las cajas vacías tiene una media de 2.500 gramos.

Supuesto que todas las poblaciones citadas obedecen a distribuciones normales, calcular:

a) La media y la desviación típica de la variable "peso de las cajas llenas"
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja llena pese menos de 19 Kgr.?
c) Si las cajas se transportan en avión a varias ciudades, ¿cuál es el número máximo de cajas que deben cargarse en cada vuelo para que, por razones de seguridad, la carga sólo supere los 3000 Kgr. con probabilidad 0,05?

Pregunta 1 y 2 son teoría:

<u>Solución al ejercicio 3:</u>

$$y = 0 + \frac{1}{4}.x$$

a) $r = \dfrac{Sxy}{SxSy}$ $\quad b = \dfrac{1}{4} = \dfrac{Sxy}{Sx^2} \rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{Sxy}{\frac{1}{18}} \rightarrow Sxy = \dfrac{1}{72}$

Así:

$$r = \frac{Sxy}{SxSy} = \frac{\frac{1}{72}}{\frac{1}{\sqrt{18}}.\frac{1}{\sqrt{72}}} = \frac{\sqrt{18}.\sqrt{72}}{72} = \sqrt{\frac{18}{72}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

b) $R^2 = 1 - \dfrac{Se^2}{Sy^2} \rightarrow \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{Se^2}{\frac{1}{72}} \rightarrow \dfrac{Se^2}{\frac{1}{72}} = \dfrac{3}{4} \rightarrow Se^2 = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{72} = \dfrac{1}{96}$

c) $\overline{y} = 0 + \dfrac{1}{4}.\overline{x} \rightarrow \overline{y} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$ (0,5 ptos)

d) $d = \dfrac{Sxy}{Sy^2 72} = \dfrac{\frac{1}{72}}{\frac{1}{72}} = 1$

Como $\overline{x} = c + d.\overline{y} \rightarrow c = \overline{x} - d.\overline{y} \rightarrow c = \dfrac{2}{3} - 1.\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$; por lo que: $x = \dfrac{1}{2} + y$

e) Si $x = 0,2 \rightarrow y = 0 + \dfrac{1}{4}.0,2 = \dfrac{1}{20}$

Lo que indica que el resultado no es fiable ya que $r = 0,5$

<u>Solución al ejercicio 4:</u>

a) P(reeemplazar en periodo de garantía) =

$$P(x \le 1,5) = \int_0^{1,5} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{25}x\right)dx = \left(\frac{2}{5}x - \frac{x^2}{25}\right)_0^{1,5} = \left(\frac{\cancel{2}}{5}.\frac{3}{\cancel{2}} - \frac{1}{25}.\frac{9}{4}\right) = 0,6 - 0,09 = 0,51$$

b) X = Número de éxitos en 10 realizaciones.
   Éxito = El ordenador se acerie en el periodo de garantía.

$X \equiv B(10 ; 0,51)$

$P(X \ge 2) = 1 - P(x<2) = 1 - P(X=0) - P(x=1)$

$P(X=0) = \binom{10}{0} p^0.q^{10} = 0,49^{10}$

$P(X=1) = \binom{10}{1} p^1.q^9 = 10 \,.\, 0,51.\, 0,49^9$

c) $P(X< k) = 0{,}05 \rightarrow \left(\frac{2k}{5} - \frac{k^2}{25}\right) = 0{,}05 \rightarrow k = 0{,}1266 \rightarrow 365.0{,}1266 \rightarrow k \approx 46$ días.

$\frac{10k-k^2}{25} = 0{,}05 \rightarrow k^2 - 10k$

Solución al ejercicio 5:

a) Sean X_i e Y_i, respectivamente, los pesos del envase y del contenido de la botella i-ésima, $X_i \in N\ (1.000\ ,\ 40)$ (i = 1, 2,...,12) y sea V el peso de una caja vacía, $V \in N\ (2.500\ ,\ 500)$.

El peso de uan caja llena $T = \sum_{i=1}^{12}(X_i + Y_i) + V$ es una variable aleatoria normal con media.

E(T)= 12 (500+1.000) + 2.500 = 20.500 gramos y desviación típica:

$\sigma = \sqrt{12(50^2 + 40^2) + 500^2} = \sqrt{299.200} = 546{,}9918$ gramos

b) Si transportamos n cajas en el avión, el peso de todas ellas $U = \sum_{i=1}^{n} T_i$ es una variable aleatoria $N\left(20.500n\ ,\ 546{,}9918\sqrt{n}\right)$.

Tenemos que calcular "n" tal que:

$$P(U \leq 3.10^6) = P\left(Z \leq \frac{3.10^6 - 20.500n}{546{,}9918\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$$

Buscando en la tabla el vlaor de Z que deja a su izquierda probabilidad de 0,95 (z =1,645), ha de verificarse que:

$$\frac{3.10^6 - 20.500n}{546{,}9918\sqrt{n}} \geq 1{,}645$$

Es decir $n \leq 145$