Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ▷ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Guión resumen del tema 3

Desarrollos de Laurent: Clasificación de singularidades y Transformada Z

1. Series de potencias

Se denomina **serie de potencias** a una suma de funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

donde a_n es una sucesión de números complejos y z_0 es un punto del plano complejo. Tanto la sucesión como el punto son conocidos. Por el teorema de Abel, existe un radio $R>0$ tal que la serie de potencias:

- La serie converge (a una **función**) para todo $z \in D(z_0, R)$.
- La serie converge uniformemente en todo disco cerrado $\overline{D(z_0, r)}$ contenido en $D(z_0, R)$.
- La serie diverge para todo $z \notin D(z_0, R)$.
- La serie puede converger o diverger en los puntos z tales que $|z-z_0| = R$.

El radio $R>0$ se denomina **radio de convergencia** de la serie de potencias y se calcula (siempre y cuando los límites indicados existan), mediante alguna de las fórmulas:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$
$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

El radio de convergencia puede ser infinito. En ese caso la convergencia de la serie se tiene en todo el plano complejo.

1.1. Funciones analíticas en discos definidas mediante series de potencias

Una serie de potencias como (1) es una función analítica en el interior de su disco de convergencia. Además, la derivada de esa función también se representa mediante una serie de potencias. Más precisamente, si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0, R)$, entonces $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, que es una serie de potencias que converge en el mismo disco: $D(z_0, R)$.

Propiedad:
Toda serie de potencias se puede derivar e integrar término a término un número infinito de veces en el interior de su disco de convergencia. los radios de convergencia de las series obtenidas son iguales al radio de convergenciade la serie inicial. Además, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

2. Series de Taylor

2.1. Representación en series (de Taylor) de funciones analíticas en discos

Sea f una función analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in A$. Consideramos $r > 0$ tal que el disco $D(z_0, r)$ queda estrictamente contenido en A. Entonces la serie (de potencias)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

converge a $f(z)$ para todo $z \in D(z_0, r)$. La serie anterior se denomina **serie de Taylor** de f centrada en z_0.

2.2. Ceros de funciones analíticas

Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in A$ se denomina **cero de la función** $f(z)$ si $f(z_0) = 0$. El desarrollo de Taylor de la función $f(z)$ en un entorno de su cero es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

El punto z_0 se denomina **cero de orden** k si $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \cdots, f^(k-1)(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. En un entorno de un cero z_0 de orden k, el desarrollo en serie de potencias de la función $f(z)$ se puede descomponer de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k g(z),$$

donde $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$ es analítica en el entorno de z_0 considerado, $g(z_0) \neq 0$ y los discos de convergencia de las series que definen a f y a g coinciden.

3. Series de Laurent

3.1. Representación en series (de Laurent) de funciones analíticas en anillos

Sea f una función analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in A$. Consideramos $0 \leq r < R \leq +\infty$ tal que el anillo $A(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C};\, r < |z-z_0| < R\}$ queda estrictamente contenido en A. Entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{2}$$

converge a $f(z)$ para todo $z \in A(z_0, r, R)$. La serie (2) se denomina **serie de Laurent** centrada en z_0 en el anillo $A(z_0; r, R)$. La primera suma de (2) se denomina **parte regular** del desarrollo de Laurent. La segunda suma de (2) se denomina **parte singular o principal** del desarrollo de Laurent. El coeficiente b_1 de la parte principal del desarrollo, y que aparece multiplicando al término $\dfrac{1}{z - z_0}$, se denomina **residuo** de f en z_0.

3.2. Puntos singulares aislados. Clasificación de singularidades

Un punto z_0 se denomina **punto singular aislado** de una función $f(z)$ si en un entorno perforado suyo $D^\star(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r, z \neq z_0\}$ la función f es analítica y unívoca. En el punto z_0 la función puede estar o no definida. Los puntos singulares aislados son de tres tipos:

- Punto singular evitable o singularidad evitable: Existe el límite $\lim_{z\to z_0} f(z)$ y es finito.
- Polo: $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
- Punto singular esencial o singularidad esencial: No existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

La clasificación de puntos singulares puede hacerse atendiendo al desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrada en z_0. Supongamos que $f(z)$ se representa mediante una serie de Laurent de la forma (2), i.e. existe un anillo $A(z_0; r, R)$ tal que para todo $z \in A(z_0; r, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \tag{3}$$

Entonces:

- Si todos los coeficientes b_n son cero, entonces z_0 es una **singularidad evitable** y puede definirse $f(z_0)$ mediante $f(z_0) = a_0$.
- Si $b_n = 0$, para todo $n > k$, entonces z_0 es un **polo de orden** k de la función $f(z)$. En este caso, la parte principal de $f(z)$ es

$$\frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(z - z_0)^k}.$$

- Si un número infinito de coeficientes b_n son distintos de cero, entonces z_0 es una **singularidad esencial**.

El coeficiente b_1 del desarrollo en serie de Laurent (3) se denomina **residuo** de f en z_0 y juega un papel importante en el cálculo de integrales de variable compleja que se estudiará en el siguiente tema.

4. Definición general de Transformada

Consideremos dos conjuntos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$. Los elementos de estos conjuntos pueden ser funciones, sucesiones, etc. y no tienen por qué tener el mismo dominio. Por ejemplo, los elementos de $\mathcal{F}_1$ podrían ser $h(w)$, $w \in \mathbb{R}$ o sucesiones a_k, $k \in \mathbb{N}$. Los elementos de $\mathcal{F}_2$ podrían definirse como $f(s), s \in \mathbb{C}$ o en nuestra notación, $f(z), z \in \mathbb{C}$.

Se define **transformada** de $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ a una aplicación $\mathbf{T}$ que “transforma” elementos de $\mathcal{F}_1$ en elementos $\mathcal{F}_2$, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathcal{F}_1 \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{F}_2 \\ h \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{T}(h) = f. \end{aligned} \tag{4}$$

- La transformada $\mathbf{T}$ es **lineal** si $\mathbf{T}(h+g) = T(h) + T(g)$ y $\mathbf{T}(Ah) = A\mathbf{T}(h)$, para todo número A o bien $\mathbf{T}(Ah+Bg) = AT(h) + BT(g)$; para todo par de números A y B.
- La transformada $\mathbf{T}$ tiene **inversa** si existe una aplicación $\tilde{\mathbf{T}}$ que transforma $\mathcal{F}_2$ en $\mathcal{F}_1$ de manera que $\mathbf{T} \circ \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}} \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}$. En este caso, $\tilde{\mathbf{T}}$ se denota $\mathbf{T^{-1}}$.
- En la práctica se suele tener un problema P en $\mathcal{F}_1$. Lo que se hace es transformar el problema en otro (que es más sencillo de resolver en $\mathcal{F}_2$) y devolver la solución a $\mathcal{F}_1$ mediante la transformada inversa:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{T} : \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 \\
P & \longrightarrow & \mathbf{T}(P) \\
\text{Problema original} & \longrightarrow & \text{Problema transformado} \\
\hline
\mathbf{T^{-1}}(S) & \longleftarrow & S \\
\text{Solución del problema original} & \longleftarrow & \text{Solución del problema transformado}
\end{array}
$$

Un caso particular de transformada se define como aplicación de la teoría de las series de Laurent. Es la Transformada Z.

4.1. Definición de la Transformada Z directa

Se considera $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión (conocida) de números complejos. La transformada Z de la sucesión a_k es la serie de Laurent

$$Z[a_k](z) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

La serie de Laurent anterior tiene parte regular la constante a_0 y parte singular la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$. Por tanto, la serie de Laurent que define a la transformada Z de a_k es una serie convergente (a una función en la variable z) en el anillo $A(0; r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z|\}$.

La Transformada Z es un caso particular de (4), con $\mathcal{F}_1$ un conjunto formado por sucesiones y $\mathcal{F}_2$ un conjunto formado por funciones que se definen mediante series de Laurent convergentes.

Propiedades básicas de la Transformada Z directa

(P1) **Linealidad:** $Z[Aa_k + Bb_k](z) = AZ[a_k](z) + BZ[b_k](z); \quad (A, B \in \mathbb{C})$.

(P2) **Traslación hacia adelante:** $Z[a_{k+m}](z) = z^m Z[a_k](z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n z^{m-n}; \quad (m \in \mathbb{N})$.

(P3) **Traslación hacia atrás:** $Z[a_{k-m}](z) = \frac{1}{z^m} Z[a_k](z); \quad (m \in \mathbb{N})$.

(P4) $Z[c^k\, a_k](z) = Z[a_k](z/c); \quad (c \in \mathbb{C}, c \neq 0)$.

(P5) $Z[k^m\, a_k](z) = \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m Z[a_k](z); \quad (m \in \mathbb{N})$.

Se puede comprobar mediante la definición anterior y las propiedades que la transformada Z directa de las siguientes sucesiones definen ciertas funciones en su región de convergencia.

Sucesión a_n	Transformada Z de a_n	Región de convergencia
$a_k = (1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots, 0, \cdots)$	$Z[a_k](z) = 1$	$\mathbb{C}$
$a_k = (1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots, 1, \cdots)$	$Z[a_k](z) = \dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$a_k = (1, p, p^2, p^3, \cdots)$	$Z[a_k](z) = \dfrac{z}{z-p}$	$\|z\| > p$; $p > 0$
$a_k = (0, p, p^2, p^3, \cdots)$	$Z[a_k](z) = \dfrac{p}{z-p}$	$\|z\| > p$; $p > 0$
$a_k = (1, 2p, 3p^2, 4p^3, \cdots)$	$Z[a_k](z) = \dfrac{z}{(z-p)^2}$	$\|z\| > p$; $p > 0$

Transformada Z inversa

A la vista de la tabla anterior, podemos decir que la **Transformada** Z **inversa** de (por ejemplo) la función $\dfrac{z}{z-1}$ es la **sucesión** $a_k = (1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots, 1, \cdots)$. En general, la transformada Z de una función $F(z)$ es una sucesión a_k tal que $Z[a_k](z) = F(z)$. En este caso, se suele escribir $a_k = Z^{-1}(F(z))$. La transformada Z inversa se utiliza para resolver ecuaciones en diferencias con sucesiones que representan a señales discretas. En la práctica, las sucesiones a_k de denotan $a[k]$, y_k o $y[k]$.