Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ▷ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Guión resumen del tema 2

Funciones de Variable Compleja

1. Conjuntos en el plano complejo

Consideremos un número real $r > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se denomina **círculo o disco abierto** de radio r y centro z_0 al conjunto

$$D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{dist}(z, z_0) < r\},$$

donde $\mathrm{dist}(z, z_0) = |z - z_0|$. Un punto se denomina **punto interior** de un conjunto A si es posible centrar el él un disco que se quede contenido en A.

- Un conjunto se denomina **abierto** si todos sus puntos son interiores.
- Un conjunto se denomina **conexo** si siempre es posible unir dos se sus puntos mediante una poligonal contenida en el conjunto.
- Un conjunto se denomina **región** si es abierto y conexo.

2. Función de variable compleja

Una función de variable compleja es una regla mediante la cual se hace corresponder puntos entre distintos conjuntos de $\mathbb{C}$. En concreto toda función de variable compleja suele representarse de los siguientes modos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\mapsto \mathbb{C} \\ z &\mapsto w \\ z &\mapsto w = f(z) \quad (w \text{ depende de } z). \end{aligned}$$

En particular, si $z = x + i\,y$ y $w = u + i\,v$ entonces la función puede expresarse también como

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\mapsto \mathbb{C} \\ x + i\,y &\mapsto u + i\,v \quad (u \text{ depende de } x, y, \text{ y } v \text{ depende de } x, y). \end{aligned}$$

Por tanto, definir una función de variable compleja equivale a definir dos funciones de variable real: $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. De este modo,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

La función u (v) se denomina **parte real** (**imaginaria**) de f y se representa mediante $u = \mathrm{Re}(f)$ ($v = \mathrm{Im}(f)$).

2.1. Límite y continuidad de una función

Una función $f(z)$ tiene **límite** $L \in \mathbb{C}$ cuando z tiende a $z_0 \in \mathbb{C}$, y se representa $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in D(z_0, \varepsilon), z \neq z_0$, entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. El álgebra de límites de funciones de variable compleja es el mismo que el límite de funciones de variable real.

Una función definida en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \mapsto \mathbb{C}$, es continua en el punto $z_0 \in A$ si y solo si $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = f(z_0)$. La función es continua en A si es continua en todos los puntos de A. Este hecho se representa mediante $f \in \mathcal{C}^0(A)$. Los teoremas de continuidad para funciones de variable real se mantienen para las funciones de variable compleja.

La existencia de límite y la propiedad de continuidad para f equivale a la existencia de límite y propiedad de continuidad para u y v como funciones de variable real.

2.2. Derivabilidad compleja

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, con A un abierto en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in A$. Se dice que f es **derivable** en $z = z_0$ si y solo si el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existe y no es infinito. Conviene tener presente que el límite en z_0 se toma en cualquier dirección de acercamiento a z_0. Esto hará que, aunque la derivación compleja y la derivación real compartan muchas propiedades, la derivación compleja sea más rica.

El valor del límite se denota por $f'(z_0)$ o por $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$ y coincide también con la cantidad

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

donde la variable h es la variable compleja $h = z - z_0$.

- Una función se denomina **analítica** u **holomorfa** en un punto si es derivable en ese punto y en un cierto entorno de ese punto.
- $\odot$ | $\odot$ Una función se denomina **analítica** u **holomorfa** en A si es derivable en todos los puntos de A.
- Una función analítica en todo $\mathbb{C}$ se denomina función **entera**.

El álgebra de derivadas en $\mathbb{C}$ coincide con el álgebra de derivadas en $\mathbb{R}$:

- Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.
- Las reglas de derivación para la función suma, producto, cociente y regla de la cadena, coinciden en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
- **Regla de L'Hôpital:** Sean f y g dos funciones analíticas en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in A$. Si $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$, entonces $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$. La regla también es válida si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = \infty$.
- **Derivada de la función inversa:** Sea $f : A \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una función analítica. Supongamos que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno U de z_0 y un entorno V de $w_0 = f(z_0)$ tal que

$$\begin{aligned} f : U &\mapsto V \quad \text{es biyectiva,} \\ f^{-1} : V &\mapsto U \quad \text{es analítica y} \\ \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}w}(w_0) = \left(f^{-1}\right)'(w_0) &= \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}. \end{aligned}$$

La derivabilidad de una función $f(z)$ en un punto $z = x + iy$ implica ciertas condiciones de comportamiento de las funciones u y v. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado:

[Ecuaciones de Cauchy-Riemman]: Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función derivable en $z = x + iy$. Entonces las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tienen derivadas parciales en el punto (x,y) respecto a las variables x e y, y se verifican las igualdades:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

- Si se imponen ciertas condiciones a la parte real e imaginaria de una función de variable compleja entonces es posible garantizar su derivabilidad. En concreto, si

  (a) En el punto (x_0, y_0) las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son derivables.

  (b) En ese punto se cumplen las ecuaciones (1),

  entonces la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$. En particular, si (a) y (b) son ciertas en todos los puntos (x,y) de una región A entonces, teniendo en cuenta $\odot$ | $\odot$, deducimos que la función es analítica en A y además $f(z)$ cumple que

  $$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x; \quad (\forall z \in A).$$

- Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann es posible reconstruir una función analítica (a excepción de una constante), siempre y cuando se conozca o bien su parte real $u(x,y)$, o bien su parte imaginaria $v(x,y)$.

Una función $\psi(x,y)$ se denomina **armónica** en una región A si en esa región tiene derivadas parciales continuas hasta segundo orden inclusive y satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales (conocida como la **Ecuación de Laplace**):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

La expresión anterior se suele escribir como $\nabla\psi = 0$, donde ∇ denota al operador de Laplace o *Laplaciano.* Si una función $f(z) = u + iv$ es analítica en cierta región del plano complejo $\mathbb{C}$, entonces $\nabla u = 0$ y $\nabla v = 0$ en los correspondientes puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Es decir, u y v son funciones armónicas (y se denominan **armónicas conjugadas**).

En resumen, podemos establecer que:

- Si $f(z)$ es una función analítica con $z = x + iy$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces u y v son funciones armónicas que satisfacen (1).

- Si u y v son dos funciones armónicas que verifican (1), entonces $u(x,y) + iv(x,y)$ es una función analítica.

3. Algunas funciones elementales de variable compleja

3.1. Funciones polinómicas

La función analítica más sencilla (no constante) es la función $f(z) = z$, cuya derivada es 1. Puesto que la suma y el producto de dos funciones analíticas es también analítica, se tiene que todo polinomio

$$p_n(z) = a_n z_n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

es una función analítica y $p_n'(z) = na_n z_{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + a_1$. Para todo $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, los coeficientes a_k son números complejos y si $a_n \neq 0$ se dice que el polinomio tiene grado n. Si $n \geq 1$, entonces la ecuación $p_n(z) = 0$ tiene al menos una raíz. El **Teorema Fundamental del Álgebra** asegura que $p_n(z) = 0$ tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$, no necesariamente distintas: $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. En este caso, el polinomio se factoriza como

$$p_n(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n).$$

Sea $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se llama **multiplicidad de la raíz** α_k al número de veces en las que aparece α_k en el conjunto $\mathcal{A}$. Sea $l \in \mathbb{N}, l \geq 1$. Se dice que α_k es un **cero de orden** l si la multiplicidad de α_k es l.

3.2. Funciones racionales

Una función racional se define como cociente de dos polinomios:

$$R(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)}.$$

Supondremos que $p_n(z)$ y $q_m(z)$ no tienen ceros comunes. Los ceros de $q_m(z)$ se llaman **polos** de $R(z)$, siendo el **orden del polo** igual al orden del correspondiente cero de q_m. La función $R(z)$ es derivable en los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $q_m(z) \neq 0$ y su derivada se obtiene aplicando la regla de derivación del cociente. Además toda función racional admite una representación mediante fracciones simples que técnicamente se obtiene de manera análoga al caso de funciones racionales en $\mathbb{R}$.

Si $n = m = 1$, entonces $R(z)$ se denomina **función racional lineal**. Más precisamente, las funciones de este tipo se representan mediante: $w = R(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. $R(z)$ está definida en todo $\mathbb{C}$ salvo $z = -d/c$, es unívoca y tiene función inversa:

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a},$$

que es unívoca. En este caso, se dice que $R(z)$ es una función de una sola **hoja**.

3.3. Función potencial

La función potencial $w = z^n, n \in \mathbb{N}$ es analítica en todo el plano complejo. Si denotamos $w = R(\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta))$ y $z = r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$, entonces

$$w = z^n \Leftrightarrow R = r^n, \beta = n\alpha.$$

Por tanto, si z_1 y z_2 son dos números complejos tales que $|z_1| = |z_2| = r$ y $\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2k\pi}{n}$ para $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $z_1^n = z_2^n$. Por tanto, la función potencial **no es de una hoja** en el plano z. La función inversa se denomina **raíz** n**-ésima**, $z = \sqrt[n]{w}$ y es una función definida en todo $\mathbb{C}$. Es un ejemplo de función **multiforme** porque fijado $w = R(\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta))$ existen n valores diferentes para $\sqrt[n]{w}$. En concreto, $\sqrt[n]{w} = z_k$, donde cada z_k viene dada por

$$z_k = r(\cos(\alpha_k) + i\,\mathrm{sen}(\alpha_k)), \text{ con } r = +\sqrt[n]{R} \in \mathbb{R} \text{ y } \alpha_k = \frac{\beta + 2k\pi}{n}; \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

3.4. Función exponencial

Se define para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, la función **exponencial compleja** y se denota $\exp(z)$ como la función

$$w = \exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)). \tag{2}$$

Para $x = 0$ se tiene la **fórmula de Euler**

$$\exp(iy) = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y).$$

Conviene observar que $\exp(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Algunas de las propiedades más relevantes de $\exp(z)$ son las siguientes:

($\star$) Si $z \in \mathbb{R}$, la definición (2) coincide con la definición de la función exponencial de variable real.

($\star\star$) La función $\exp(z)$ es entera y $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\exp(z)) = \exp(z)$.

($\star\star\star$) La función exponencial posee la propiedad $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

($\star\star\star\star$) La función exponencial es periódica de periodo imaginario $2\pi i$, i.e.,

$$\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i); \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

En consecuencia, $\exp(z)$ no es de una sola hoja en el plano z. Sin embargo, para cada banda de $\mathbb{C}$ de la forma

$$\mathcal{B}_b = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; \quad b - \pi < y < b + \pi, b \in \mathbb{R}\},$$

se tiene que la función $\exp(z) : \mathcal{B}_b \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ es de una sola hoja.

3.5. Función logarítmica

La función logarítmica compleja es la **función inversa de la exponencial** compleja:

$$\log(w) = z \Leftrightarrow \exp(z) = w, (w \neq 0).$$

Por la propiedad ($\star\star\star\star$) se tiene que $\log(w)$ es una función multiforme. En concreto, si $w = R\exp(i\beta), \beta \in \mathrm{Arg}(w)$, entonces existen infinitos valores de z tales que $\log(w) = z$. En concreto para todo z de la forma:

$$z = \log(w) = \log(|w|) + i\mathrm{Arg}(w) = \log(|w|) + i(\beta + 2k\pi); \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Se define **logaritmo principal** de w al valor

$$z = \log_p(w) = \log(|w|) + i\,\arg_p(w),$$

donde $\arg_p(w) \in \mathrm{Arg}(w)$ y cumple $\arg_p(w) \in (-\pi, \pi)$. Es posible definir la función logarítmica compleja de modo que sea una función unívoca. Basta con considerar los rayos o semirrectas de la forma

$$\mathcal{R}_b = \{w = -r\exp(ib); \quad r > 0, b \in \mathbb{R}\}.$$

De este modo, para cada $b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\log : \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}_b \subset \mathbb{C} \mapsto \mathcal{B}_b \subset \mathbb{C}$$

es una función unívoca. En este caso, $\log(w)$ es analítica para todo $w \in \mathbb{C}\setminus\mathcal{R}_b$ y $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(\log(w)) = \dfrac{1}{w}$.

3.6. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Se definen las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ mediante

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Algunas de las propiedades más relevantes del seno y coseno de variable compleja, son las siguientes:

- Si $z = x \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ coinciden con el seno y el coseno de variable real.
- Son funciones enteras.
- Satisfacen las fórmulas de derivación usuales: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\operatorname{sen}(z)) = \cos(z)$ y $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\cos(z)) = -\operatorname{sen}(z)$.
- Son funciones periódicas de periodo 2π. En consecuencia, no son de una sola hoja y sus inversas, $\operatorname{arc\,sen}(z)$ y $\arccos(z)$, son funciones multiformes.
- $\operatorname{sen}(z)$ es impar y $\cos(z)$ es par.
- Satisfacen las identidades trigonométricas usuales.
- No son funciones acotadas, a diferencia de lo que sucede en $\mathbb{R}$.

Se definen las funciones **tangente**, **seno hiperbólico** y **coseno hiperbólico**, respectivamente como:

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}, \quad \operatorname{senh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad \text{y} \quad \cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

Entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas existen las siguientes relaciones:

$$\cosh(z) = \cos(iz), \quad \operatorname{senh}(z) = -i\operatorname{sen}(iz), \quad \cos(z) = \cosh(iz), \quad \operatorname{sen}(z) = -i\operatorname{senh}(iz).$$