Ingeniero Industrial
Curso 2009/10
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
17 de septiembre de 2010

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones. De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Las fechas de publicación de las notas y de revisión se anunciarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina.

Teoría y cuestiones

1. Se llaman *ondas viajeras* (*traveller waves*) de la ecuación de Klein-Gordon

$$y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) - \beta y(t,x), \quad t>0,\ x\in \mathbb{R} \tag{K-G}$$

($c,\beta>0$ constantes) a las soluciones que son de la forma $y(t,x)=\phi(x+\alpha t)$, donde $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función denominada *perfil* de la onda y $\alpha>0$ es una constante.

(a) **(0.5 Ptos.)** Demuestra que los perfiles de las ondas viajeras deben ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\left(\alpha^2-c^2\right)\phi''(s)+\beta\phi(s)=0$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Resuelve la ecuación anterior y obtén las distintas clases de soluciones del tipo onda viajera de (K-G) en función del signo de α^2-c^2.

(c) **(0.5 Ptos.)** ¿Existe alguna onda viajera de (K-G) para las condiciones iniciales

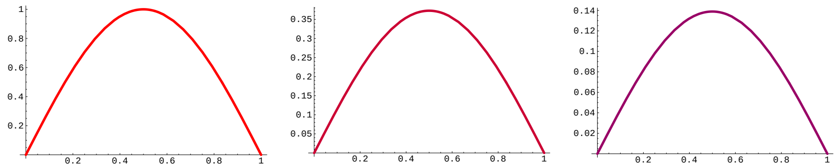
$$y(0,x)=\cos(x),\quad y_t(0,x)=0\ ?$$

Razona la respuesta y en caso afirmativo calcula su expresión.

2. Sea el siguiente problema de contorno de tipo Dirichlet para la ecuación del calor homogénea

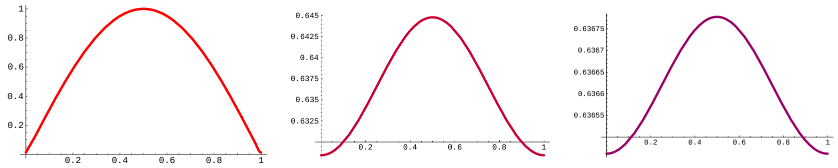
$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x)=u_{xx}(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0)=u(t,1)=0, & t>0 \end{array}\right\} \tag{$\mathcal{CD}$}$$

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la función $u(t,x)=e^{-\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(\pi x)$ es solución de ($\mathcal{CD}$).



$t=0$ $t=0.1$ $t=0.2$

Figura 1:



$t=0$ $t=0.1$ $t=0.2$

Figura 2:

(b) **(0.5 Ptos.)** Las figuras de la parte superior corresponden al valor de la temperatura de una barra unidad en los diferentes instantes que se indican. ¿Cuál de ellas corresponde a la solución de ($\mathcal{CD}$)? ¿Por qué?

Problemas

1. **(2.5 Ptos.)** Utiliza el Método de las características para resolver la siguiente ecuación lineal con una condición de Cauchy

$$\left.\begin{array}{ll} xu_x(x,y,z)+2yu_y(x,y,z)+\beta u_z(x,y,z)-3\log(x)u(x,y,z)=0, & x>0,\ y,z\in\mathbb{R} \\ u(x,y,x)=\mathrm{sen}(xy), & x>0,\ y\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

donde $\beta\in\mathbb{R}$ es una constante. ¿Está la solución definida en todos los puntos de la superficie $\mathcal{S}$ asociada a la condición de Cauchy? ¿Depende del valor de la constante β? Razona la respuesta.

2. **(2.5 Ptos.)** Consideremos la evolución de la temperatura en una barra de longitud unidad de forma que:

- El calor se transmite únicamente por conducción.
- La barra se encuentra inicialmente a temperatura constante igual a u_0.
- Se conoce el valor de la temperatura en los extremos, que va oscilando alrededor del valor u_0 con frecuencias distintas en cada uno de ellos.

El problema se formula matemáticamente como

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(0,x) = u_0, & 0<x<1 \\ u(t,0) = u_0\cos(\alpha t), \quad u(t,1) = u_0\cos(\beta t) & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{EC})$$

donde $u_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes, con $\alpha \neq \beta$. Utiliza el Método de separación de variables para determinar el valor de la función $u(t,x)$ que describe la evolución térmica de la barra.

3. **(2.5 Ptos.)** Se considera la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta inicialmente en reposo:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x) + \mathcal{X}_{[T,1+T]}(t)\cos(\alpha x) & t>0,\ x>0 \\ y(0,x) = 0, \quad y_t(0,x) = 0, & x>0 \\ y(t,0) = \mathcal{X}_{[1,+\infty[}(t)\varphi(t), & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

siendo $\alpha > 0$, $T > 1$ constantes,

$$\mathcal{X}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función de pulsación o característica del intervalo $[a,b]$ $(a < b \leq +\infty)$ y, finalmente, $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria. Utiliza la transformada de Laplace para obtener la **solución acotada** del problema $(\spadesuit)$.

4. Sea el siguiente problema de Laplace en un dominio semicircular con condiciones de contorno mixtas Dirichlet+Neumann:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in D \\ \nabla u(x,y) \cdot \boldsymbol{n} = 0, & x^2+y^2=1,\ y>0 \\ u(x,0) = \cos(2\pi x), & -1<x<1 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{L})$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ y>0\right\}$ y siendo $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera.

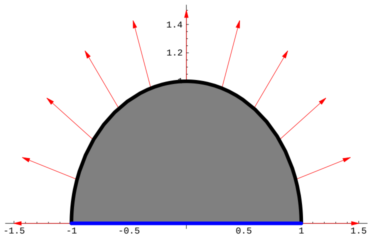


Figura 3: Conjunto D

(a) **(0.5 Ptos.)** Reescribe el problema en coordenadas polares, teniendo en cuenta que la condición de contorno de tipo Neumann sobre la parte superior de la frontera de D se convierte en

$$u_r(1,\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que, si $u(r,\theta)$ es la solución de $(\mathcal{L})$ dada en coordenadas polares, la función

$$\omega(r,\theta) = u(r,\theta) - \cos(2\pi r)$$

es solución de una ecuación de Poisson (Laplace no homogénea) con condiciones de contorno mixtas Dirichlet+Neumann homogéneas, es decir, se verifica que

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_r(1,\theta) = 0, & 0<\theta<\pi \\ \omega(r,0) = \omega(r,\pi) = 0, & 0<r<1 \end{array}\right\}$$

(c) **(1.5 Ptos.)** Utiliza en Método de separación de variables para obtener el valor de $\omega(r,\theta)$.