Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2008/09
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
10 de septiembre de 2009

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones. De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Las fechas de publicación de las notas y de revisión se anunciarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina.

Teoría y cuestiones

1. **(1 Pto.)** La descripción de las ondas superficiales en un canal de aguas someras lleva a plantear la *ecuación de Korteweg-de Vries*

$$u_t(t,x) + \alpha\, u_{xxx}(t,x) + \beta\, u(t,x) u_x(t,x) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \qquad (\heartsuit)$$

con $\alpha, \beta \geq 0$ constantes, junto con las condiciones de contorno

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(t,x) = 0, \qquad t > 0 \qquad (\spadesuit)$$

Comprueba que, para cada solución de ($\heartsuit$)-($\spadesuit$), el funcional de energía

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t,x)\, dx$$

se mantiene constante a lo largo del tiempo.

2. Indica, justificando adecuadamente la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(y^2)\, dy\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny)\operatorname{sen}(y^2)\, dy\right)^2 \geq 2\pi^2 + 1$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(y^2)\, dy + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny)\operatorname{sen}(y^2)\, dy = \pi \operatorname{sen}(\pi^2)$$

(c) **(0.5 Ptos.)** Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny)\operatorname{sen}(y^2+\alpha)\, dy = \operatorname{sen}(\alpha)$$

Problemas

1. Dado el problema de valor inicial para la ecuación de Burgers:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

con $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria de clase C^1:

(a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza el método de las características para comprobar que la solución verifica la ecuación implícita

$$u(t,x) = f(x - tu(t,x))$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Utiliza el Teorema de la función implícita para demostrar que si para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, entonces las soluciones del problema anterior están definidas en todo el dominio temporal $]0, +\infty[$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(c) **(0.5 Ptos)** ¿Qué ocurre si $f(x) = x^2$? ¿Está la solución definida en $]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}$?

2. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el siguiente problema con condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas para la ecuación del telégrafo:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x) - \beta y_t(t,x), & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & 0 < x < \pi \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,\pi) = \alpha \operatorname{sen}(t), & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\diamondsuit)$$

con $\alpha > 0$, $0 < \beta < 2$ constantes. Utiliza el método de separación de variables para resolver ($\diamondsuit$).

Sugerencia: Mediante el procedimiento estándar es posible obtener un problema equivalente con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas.

Sigue detrás ⇒

3. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución acotada de la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \delta(t-2)\cos(\pi x), & t,x>0 \\ y(t,0) = \operatorname{sen}(1+t), & t>0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x>0 \end{array}\right\}$$

siendo δ la función impulso de Dirac.

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio circular cuyos extremos permanecen fijos:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\in D \\ u(x,y) = 0, & (x,y)\in \partial D \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

con $D = \big\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 3\big\}$.

(**Ayuda:** Reescribir el problema usando coordenadas polares y separar las variables, teniendo en cuenta que la función asociada al radio debe estar definida en cero y la función asociada al ángulo y su derivada son 2π-periódicas).