Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2008/09
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
7 de febrero de 2009

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones. De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Las fechas de publicación de las notas y de revisión se anunciarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina.

Teoría y cuestiones

1. Indica, justificando adecuadamente la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Existe una función impar $f \in L^2(-\pi,\pi)$ de forma que su serie de Fourier trigonométrica es de la forma

   $$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{1+n} \operatorname{sen}(nx)$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Si las funciones $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman una base ortonormal del espacio $L^2(0,1)$, se verifica la igualdad

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \phi_n(y)\, dy \right)^2 = 1$$

   Sugerencia: La función constante igual a uno pertenece a $L^2(0,1)$.

   (c) **(0.5 Ptos.)** Para las funciones $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ del apartado anterior se tiene que

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(y) \cos\left(\pi + y^2\right) dy = \pi/2$$

   Sugerencia: La función $\cos\left(\pi + x^2\right)$ está en $L^2(0,1)$.

2. Dado el siguiente problema inicial para la ecuación de ondas en la recta real

   $$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

   (a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la función

   $$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$$

   es solución de ($\heartsuit$) para cualquier función arbitraria $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. ¿Significa esto que el problema está *bien puesto* en el sentido de Hadamard?

   (b) **(0.5 Ptos.)** ¿Qué ocurre si añadimos la condición $u_t(0,x) = 0$?

Problemas

1. Sea el problema de Cauchy

   $$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+\varepsilon u(t,x))\, u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \phi(x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

   con $\varepsilon > 0$ constante y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva.

   (a) **(2 Ptos.)** Utiliza el Método de las características para encontrar la solución de ($\clubsuit$).

   (b) **(0.5 Ptos.)** ¿Está la solución definida en todo el dominio $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$? En caso negativo, ¿cuál es su deminio de definición?

2. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el siguiente problema con condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas para la ecuación del telégrafo:

   $$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x) - \beta y_t(t,x), & t>0,\ 0<x<\pi \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & 0<x<\pi \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,\pi) = \alpha \operatorname{sen}(t), & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

   con $\alpha, \beta > 0$ constantes. Utiliza el método de separación de variables para resolver ($\heartsuit$).

   Sugerencia: Mediante un procedimiento estándar es posible obtener un problema equivalente con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas.

Sigue detrás ⇒

3. La evolución de la temperatura en una barra unidimensional de longitud unidad aislada en los extremos y sobre la que actúa durante un cierto periodo de tiempo una fuente de calor se describe matemáticamente mediante el siguiente problema (suponiendo que solamente se transmite calor por difusión):

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \alpha \mathcal{X}_{[T_1,T_2]}(t), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(0,x) = \cos(\pi x), & 0<x<1 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

con $c>0$, $0<T_1<T_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ constantes, donde $u(t,x)$ indica la temperatura del punto x en el instante t y

$$\mathcal{X}_{[T_1,T_2]}(t) = \begin{cases} 1, & T_1 \le t \le T_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es la función característica del intervalo temporal $[T_1,T_2]$ durante el cual actúa sobre la barra una fuente de calor de intensidad α.

(a) **(1.5 Ptos.)** Suponiendo que $T_2 < \infty$, utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución de $(\spadesuit)$.

(b) **(0.5 Ptos.)** Encuentra la solución de $(\spadesuit)$ para $T_2 = \infty$.

(c) **(0.5 Ptos.)** Determina el estado asintótico del sistema, es decir, el valor de la temperatura en cada punto cuando $t \to +\infty$ para la solución obtenida en cada uno de los anteriores apartados. ¿Observas alguna diferencia? ¿Puedes darle una interpretación física?

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve el siguiente problema de Neumann para la ecuación de Poisson en el disco unidad $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = g(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ \nabla u(x,y)\cdot \mathbf{n} = 0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de $\partial\Omega$ y

$$g(x,y) = \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2}, & \text{si } y>0 \\ 0, & \text{si } y\le 0 \end{cases}$$

Sugerencia: Reescribir el problema en coordenadas polares teniendo en cuenta que al separar las variables la función asociada al ángulo y su derivada son 2π-periódicas. Además, la condición de contorno en polares queda de la forma:

$$u_r(1,\theta) = 0, \quad 0<\theta<2\pi$$