Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2007/08
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
25 de enero de 2008

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones, excepto los alumnos que presentaron trabajos, los cuales deberán **elegir una** de las cuestiones que valen medio punto.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Tal como se indica en la convocatoria, las notas se publicarán el **martes 5 de febrero** en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina. El horario de revisión será:
  - ✓ Martes 5, de **15:30** a **17:30**
  - ✓ Miércoles 6, de **9:30** a **11:30**

TEORÍA Y CUESTIONES

1. Las oscilaciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli de longitud unidad no sometida a carga, de forma que está empotrada en el extremo $x = 0$ y en el otro tiene suspendida una masa puntual de magnitud m, se describen matemáticamente mediante el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} \rho(x)y_{tt}(t,x) + (EI(x)y_{xx}(t,x))_{xx} = 0, & t>0,\ 0<x<1 \\ y(t,0) = y_x(t,0) = 0, & t>0 \\ y_{xx}(t,1) = 0,\ \mathcal{V}(t,1) = my_{tt}(t,1), & t>0 \end{array}\right\} \qquad \text{(E-B)}$$

donde y indica el desplazamiento respecto de la horizontal, ρ es la densidad de la viga (que no es constante), EI es el coeficiente de rigidez y $\mathcal{V}(t,x) = (EI(x)y_{xx}(t,x))_x$ es el valor de los esfuerzos cortantes. La energía de la viga se define mediante la expresión

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho(x)y_t^2(t,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 EI(x)y_{xx}^2(t,x)\,dx$$

que es suma de la energía cinética y de la energía potencial elástica.

   (a) **(1,5 Ptos.)** Comprueba que la función

$$\mathcal{E}(t) + \frac{m}{2}y_t^2(t,1)$$

   es constante.

   (b) **(0,5 Ptos.)** Determina el valor de dicha constante para las condiciones iniciales

$$y(0,x) = \alpha\,\mathrm{sen}(\pi x), \quad y_t(0,x) = 0, \quad 0<x<1$$

   ($0 < \alpha$ constante) correspondientes a una viga de forma sinusoidal inicialmente en reposo.

2. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando convenientemente la respuesta:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \log(1+x^2)\cos(n\pi x)\,dx = \pi$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Dado el siguiente sistema de Sturm-Liouville singular de tipo Bessel,

$$\left.\begin{array}{ll} x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = -\mu^2x^2y(x), & 0<x<1 \\ \exists\ y(0), & \\ \alpha y(1) + \beta y'(1) = 0 & \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$

   con $\alpha, \beta > 0$ constantes, se tiene que μ^2 es un valor propio de (S-L) si y solamente si μ es solución de la ecuación

$$\alpha J_1(\mu) + \beta\mu J_1'(\mu) = 0$$

   (c) **(0.5 Ptos.)** El problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{ll} yu_x(x,y) + xu_y(x,y) = 1, & x,y>0 \\ u(x,x) = \pi, & x>0 \end{array}\right\}$$

   está bien puesto en el sentido de Hadamard.

Sigue detrás ⇒

Problemas

1. Dado el problema:

$$\left.\begin{array}{ll} (\varepsilon+t)\, u_t(t,x) + (1+u(t,x))\, u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \varepsilon x + \alpha, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

con $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ constantes:

(a) **(2 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

(b) **(0.5 Ptos.)** ¿Qué ocurre con el problema $(\mathcal{P}_0)$? Estudia la existencia de solución dependiendo del valor de α.

$$\left.\begin{array}{ll} t u_t(t,x) + (1+u(t,x))\, u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \alpha, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_0)$$

2. **(2.5 Ptos)** Se considera una cuerda elástica de longitud infinita inicialmente en reposo, de forma que su extremo permanece fijo. Durante un periodo de tiempo se hace actuar una fuerza perpendicular a la cuerda que provoca que empiece a oscilar transversalmente. Este fenómeno se describe matemáticamente mediante el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \mathcal{X}_{[0,T]}(t)\alpha\,\mathrm{sen}(x), & t>0,\ x>0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x>0 \\ y(t,0) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

con $c, \alpha > 0$ constantes, donde $y(t,x)$ indica el desplazamiento de la cuerda respecto de la horizontal del punto x en el instante t y

$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0\le t\le T \\ 0, & t>T \end{cases}$$

es la función característica del intervalo temporal $[0,T]$. Utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución **acotada** de $(\spadesuit)$.

3. **(2,5 Ptos.)** Resuelve el siguiente problema de transmisión de calor por conducción en una barra unidimensional con condiciones de contorno de tipo Robin en los extremos, de forma que la temperatura inicial es constante e igual a $u_0 \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0) + \alpha u_x(t,0) = 0, & t>0 \\ u(t,1) + \alpha u_x(t,1) = 0, & t>0 \\ u(0,x) = u_0, & 0<x<1 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

donde $c, \alpha > 0$ son constantes.

4. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el problema de determinar la evolución de la temperatura en un disco de centro cero y radio uno $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$. Esta situación se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t>0,\ (x,y)\in D \qquad \text{(EC)}$$

junto con la condición de contorno de tipo Neumann

$$\nabla u\cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0,+\infty[\times\partial D \qquad \text{(CC)}$$

que indica que el recinto D está aislado, siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera de D. Obtén la solución del problema (EC)-(CC) para la distribución inicial de temperaturas

$$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2<\frac{1}{4},\ y>0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ayuda:

- ✓ La condición (CC) se rescribe en coordenadas polares de la forma:

$$u_r(1,\theta) = 0, \quad 0<\theta<2\pi$$

- ✓ Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \subset]0,+\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm} r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,1)$, con $\omega(r) = r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2 - n^2\right) J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$