Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

**Ingeniero Industrial**
**Curso 2006/07**
**Transformadas Integrales y**
**Ecuaciones en Derivadas Parciales**
**5 de septiembre de 2007**

---

## Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones, excepto los alumnos que presentaron trabajos, los cuales deberán **elegir una** de las cuestiones que valen medio punto.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Tal como se indica en la convocatoria, las notas se publicarán el **lunes 10 de septiembre** en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina. El horario de revisión será:
  - ✓ Lunes 10, de **15:30** a **17:30**
  - ✓ Martes 11, de **9:30** a **11:30**

---

## Teoría y cuestiones

1. Dado el siguiente problema, que describe las oscilaciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli de longitud unidad empotrada en los extremos y con un término fuente $f$ dependiente de la posición $x$ y del estado $u$:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x)+\kappa^2 u_{xxxx}(t,x)=f(x,u(t,x)), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0)=u_x(t,0)=0, & t>0 \\ u(t,1)=u_x(t,1)=0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad \text{(E-B)}$$

se define la energía del sistema mediante la expresión

$$\mathcal{E}(t)=\frac{\kappa^2}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(t,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x)\,dx$$

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la función

$$\mathcal{H}(t)=\mathcal{E}(t)-\int_0^1 F(x,u(t,x))\,dx$$

es constante, siendo $F:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, de forma que $\frac{\partial F}{\partial u}(x,u)=f(x,u)$.

(b) **(0.5 Ptos.)** Suponiendo además que para cada $x\in[0,1]$, $F(x,u)=0$, si $|u|\le 1$, determina el valor de $\mathcal{H}$ para las condiciones iniciales

$$u(0,x)=\alpha\,\mathrm{sen}(\pi x),\quad u_t(0,x)=0,\quad 0<x<1$$

($0<\alpha<1$ constante) correspondientes a una viga de forma sinusoidal inicialmente en reposo.

2. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando convenientemente la respuesta:

(a) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos(x^2)\cos(nx)\,dx=1$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Dado el siguiente sistema de Sturm-Liouville singular de tipo Bessel,

$$\left.\begin{array}{ll} x^2f''(x)+xf'(x)-f(x)=-\mu^2x^2f(x), & 0<x<1 \\ \exists\ f(0), & \\ \alpha f(1)+\beta f'(1)=0 & \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$

con $\alpha,\beta>0$ constantes, se tiene que $\mu^2$ es un valor propio de (S-L) si y solamente si $\mu$ es solución de la ecuación

$$\alpha J_1(\mu)+\beta\mu J_1'(\mu)=0$$

(c) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la identidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(\pi x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx\right)^2=\pi^2-\mathrm{sen}\left(\pi^2\right)\cos\left(\pi^2\right)$$

---

**Sigue detrás ⇒**

PROBLEMAS

1. Dado el problema:

$$\left.\begin{array}{ll} (\varepsilon + t)\, u_t(t,x) + (1+u(t,x))\, u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \varepsilon\phi(x) + \alpha, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

con $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, constantes y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva:

(a) **(2 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

(b) **(0.5 Ptos.)** ¿Qué ocurre con el problema $(\mathcal{P}_0)$? Estudia la existencia de solución dependiendo del valor de $\alpha$.

$$\left.\begin{array}{ll} t u_t(t,x) + (1+u(t,x))\, u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \alpha, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \quad (\mathcal{P}_0)$$

2. **(2.5 Ptos)** Se considera una cuerda elástica de longitud unidad inicialmente en reposo, de forma que uno de sus extremos permanece fijo, mientras que se hace oscilar el otro transversalmente de forma periódica. Se ejerce además una fuerza constante (en tiempo) sobre cada uno de los puntos de la cuerda, obteniéndose el siguiente modelo matemático para describir las oscilaciones transversales en cada punto a lo largo del tiempo:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \operatorname{sen}(2\pi x), & t>0,\ 0<x<1 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & 0<x<1 \\ \left.\begin{array}{l} y(t,0) = 0 \\ y(t,1) = \alpha \operatorname{sen}(t) \end{array}\right\} & t>0 \end{array}\right\} \quad (\spadesuit)$$

con $\alpha > 0$ constante, donde $y(t,x)$ indica el desplazamiento de la cuerda respecto de la horizontal del punto $x$ en el instante $t$ . Utiliza el método de separación de variables para obtener la solución de $(\spadesuit)$.

3. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio circular cuyos extremos permanecen fijos:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = x - \sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\in\Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\right\}$, siendo $R > 1$.

(**Ayuda:** Usar coordenadas polares, teniendo en cuenta que al separar las variables, la función asociada al radio debe estar definida en cero y la función asociada al ángulo y su derivada son $2\pi$-periódicas).

4. Consideremos un problema unidimensional de transmisión de calor por conducción en una barra aislada en los extremos, de forma que la temperatura inicial es constante y durante un periodo de tiempo $[T_0, T_1]$ actúa una fuente de calor

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \cos(\pi x)\, \mathcal{X}_{[T_0,T_1]}(t), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(0,x) = u_0, & 0<x<1 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \quad (\clubsuit)$$

donde $u_0 \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $0 < T_0 < T_1$ son constantes, y

$$\mathcal{X}_{[T_0,T_1]}(t) = \begin{cases} 1, & T_0 \le t \le T_1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) **(1.25 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución de $(\clubsuit)$.

(b) **(0.75 Ptos.)** Encuentra la solución de $(\clubsuit)$ cuando la fuente de calor actúa indefinidamente, es decir, cuando $T_1 = \infty$.

(c) **(0.5 Ptos.)** Estudia el comportamiento asintótico de las soluciones obtenidas en los apartados anteriores calculando el límite cuando $t \to +\infty$. ¿Puedes explicar desde un punto de vista físico las diferencias que se observan?